全国高等教育自学考试教材

高等数学

（工业与民用建筑专业）

周鸿印 主编

上　　册

武汉大学出版社

全国高等教育自学考试教材

高等数学

（工业与民用建筑专业）

上　　册

周鸿印　主编

武汉大学出版社

1988

内 容 提 要

本书根据土建类专业专科《高等数学》考试大纲编写，分上、下两册。上册内容为一元函数微积分，包括函数、极限、连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分以及定积分与它的应用。内容符合自学考试的要求、具有自学教材的特点。在编写时力求做到便于自学、达到“无师自通”的要求。

本书是土建类各专业专科自学考试教材，也可作为其它专科自学用书及全日制、函授类有关专科的教学参考书。

全国高等教育自学考试教材

高 等 数 学

（土建类专业）

上 册

周鸿印 主编

*

武汉大学出版社出版

（武昌 珞珈山）

新华书店湖北发行所发行 武汉市汉桥印刷厂印刷

*

850×1168毫米 1/32 15.125印张 383千字

1988年6月第1版 1990年7月第2次印刷

印数：7201—17200

ISBN 7—307—00412—7/O・38

定价：5.60元

出 版 前 言

高等教育自学考试教材建设是高等教育自学考试工作的一项基本建设。经国家教育委员会同意，我们拟有计划、有步骤地组织编写一些高等教育自学考试教材，以满足社会自学和适应考试的需要。《高等数学》是为高等教育自学考试土建类专业组编的一套教材中的一种。这本教材根据专业考试计划，从造就和选拔人才的需要出发，按照全国颁布的《高等数学自学考试大纲》的要求，结合自学考试的特点，组织高等院校一些专家学者集体编写而成的。

土建类专业《高等数学》自学考试教材，是供个人自学、社会助学和国家考试使用的；无疑也适用于其他相同专业方面的学习需要。现经审定同意予以出版发行。我们相信，随着高教自学考试教材的陆续出版，必将对我国高等教育事业的发展，保证自学考试的质量起到积极的促进作用。

编写高等教育自学考试教材是一种新的尝试，希望得到社会各方面的关怀和支持，使它在使用中不断提高和日臻完善。

全国高等教育自学考试指导委员会

一九八七年九月

编者的话

编写本书的目的在于为有志于自学成才的青年提供一本既符合自学考试的要求又便于自学的《高等数学》用书。

通过对本书的学习，我们希望自学者能够掌握矢量代数与空间解析几何、微积分以及常微分方程的基本知识，必要的基础理论和常用的运算方法，并具备较熟练的运算能力、一定的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和运用数学知识解决实际问题的能力，为学习后继课程及从事工程技术工作打下必要的数学基础。具体要求如下：

1．正确理解下列基本概念和存在于它们之间的内在联系：

函数，极限，无穷小，无穷大，连续，导数，微分，不定积分，定积分，偏导数，全微分，二重积分，平面曲线积分，微分方程。

2．正确理解和应用下列基本定理和公式：

极限的主要定理，拉格朗日定理，泰勒公式，变上限的定积分对上限的求导公式，牛顿-莱布尼兹公式，格林公式。

3．牢固掌握下列公式：

基本初等函数的导数公式，基本积分公式。

4．熟练运用下列法则和方法：

函数的和、差、积、商的求导法则，复合函数的求导法则，罗必达法则，极值判定法，换元积分法，分部积分法，二重积分的计算法，平面曲线积分的计算法，变量可分离的一阶微分方程的解法，一阶线性微分方程和二阶常系数线性微分方程的解法。

5．运用微积分和常微分方程的方法，能解决一些简单的几何、力学和物理问题。

为了达到以上基本要求，必须刻苦学习并注意不断改进学习方法，以提高学习效果。适合个人特点的好的学习方法，需要在学习过程中不断探索，没有万应灵方。这里仅就一般情况提出一些建议，供自学本书的读者参考。

1．学习要有计划，贵在坚持。每个自学者都要根据自己的具体情况，定出切实可行的学习计划，如无特殊原因，都要坚持按计划进行学习。如发现计划不切实际，或情况有变化，则应及时修改计划。根据本书的内容，大约需要自学总时数420小时，各章时数分配大致如下：

预备知识	10小时	第一章	20小时
第 二 章	50小时	第三章	50小时
第 四 章	40小时	第五章	30小时
第 六 章	40小时	第七章	40小时
第 八 章	40小时	第九章	40小时
第 十 章	30小时	总复习	30小时

2．要仔细阅读教材，对于基本概念要反复理解，逐渐加深。对于一些公式要自己独立地进行推导；对于一些例题，要自己独立地进行演算；重要的定义、定理和公式要在理解的基础上熟记；在阅读教材的过程中，要善于发现并提出问题；为解决疑难问题，可以有目的有选择地看参考书；为了加深对教材的理解和记忆，在阅读教材时要作好笔记，最低限度应作出教材内容的摘要。

3．在充分阅读教材的基础上，认真作习题，以加深对内容的理解，并提高解题的技能。对于基本题（如求极限、求导数、求积分等）要多作一些，达到熟练的程度，也要作一些难度较大的题，以提高分析问题、解决问题的能力。作题时书写要工整，计算要准确，论证要符合逻辑。作完题后，再去对照书末的答案，如发现错误，应找出原因，加以改正。

4．作好小结，进行阶段复习和总复习。每学完一章，应对

本章的基本内容（基本概念、基本理论与公式、基本方法）进行系统的小结；书中的小结，只供参考。小结应在经过自己独立思考、对内容融会贯通的基础上完成，不要抄书。每一阶段应在认真复习的基础上，任选一份《阶段测验题》，限时（150分钟）闭卷作出后，进行自我评定，发现没有学好的地方，要及时补课。在学完全书后，要进行总复习，除弄清楚每章的内容外，还要注意各章的联系，并完成总复习题。

由于编者水平有限，缺乏编写自学教材的经验，本书定会存在许多缺点和不足之处，恳切希望广大读者批评指正，以便再版时修改。

谨向在本书的编写出版过程中，进行指导，参加审稿，提供帮助，付出了辛勤劳动的所有同志们，致以衷心的感谢。

编　者

1987年5月

目　　录

绪　论

高等数学是工科各专业的一门重要的基础课，是工程技术人员必须掌握的理论工具。其内容包括空间解析几何与矢量代数、微积分以及常微分方程。在开始学习高等数学的时候，对它的研究对象、方法及对自然科学的作用，有一些初步的了解，是完全必要的；但要在学完全书之后，甚至在学习有关的后续课程时，才能对这些方面有较深入的了解。

一、数学研究的对象及其特点

数学研究的对象是什么？恩格斯在《反杜林论》中作了科学的概括——他说：“纯数学的对象是现实世界中的空间形式与数量关系，所以是非常现实的材料。这些材料以极度抽象的形式出现，这只能在表面上掩盖它起源于外部世界的事实。”① 我们过去所学的初等数学中，算术和代数主要研究数量关系，几何主要研究空间形式，三角则既研究空间形式，也研究数量关系。从解析几何开始，进入了高等数学的范畴，高等数学所研究的仍然是数量关系与空间形式，而且是将数与形紧密结合在一起进行研究的。

由于数学是在纯粹的形式下来研究数与形的，高度的抽象性就成为数学的第一大特点：算术里面的整数与分数，代数里面的a与b，x与y，几何里面的点、线、面，都是抽象的概念。然而，

---

① 恩格斯：《反杜林论》，第35页，中共中央马、恩、列、斯著作编译局译，人民出版社，1970，12。

任何抽象的概念、理论、公式，归根到底，是来源于现实的，是客观实际在人的头脑中的反映。例如，从三只羊加五只羊等于八只羊，三匹布加五匹布等于八匹布等等许多事实中，我们抽象出 $3+5=8$ 这一数量关系，从 $3+5=5+3$，$7+8=8+7$ 等等许多具体的数量关系中，我们抽象出 $a+b=b+a$ 这一数量运算规律。又如，从正方形面积 $A=x^2$（x表示边长），圆面积 $A=\pi r^2$（r表示圆的半径），自由落体运动所经路程 $S=\frac{1}{2}gt^2$（g表示重力加速度，t表示时间）等等具体关系中，我们舍弃变量的具体含义，就得到抽象的二次函数 $y=ax^2$（a为非零常数）；从 $y=ax$，$y=ax^2$，$y=ax^3$，……等函数中我们抽象出一般的正整幂函数 $y=ax^n$（n为正整数），进一步抽象，我们得到一般的幂函数 $y=ax^\alpha$（α为实数）。从许多具体的函数关系中，我们抓住它们的共同本质——对应关系，就得到一般的函数概念及其抽象的表写形式：$y=f(x)$。从这些例子可以看出，数学愈发展，抽象程度就愈高，概括力也愈强。

数学研究的主要方法是从已知的概念、理论出发，通过逻辑推理，得出新的理论。因此，严密的逻辑性就成为数学的第二大特点。在数学中，要肯定一个命题为真，必须进行符合逻辑的推证；要说明某一命题不真，必须举出反例。值得注意的是，数学命题的真假是相对于一定的公理体系而言的。因为公理体系是逻辑推理的出发点，它本身的正确性，是无法用逻辑推理来证明的，所以，归根到底，数学的真理性还需经受实践的检验。

任何事物及其运动（发展、变化），都具有一定的数量关系，都离不开一定的空间形式，这就决定了数学的第三大特点——应用的广泛性。初等数学在日常生活中的广泛应用，这是大家深有体会的；高等数学的概念、理论和方法也日益广泛地应用于各门科学和技术之中。数学应用的广泛性与其高度的抽象性及逻辑的严密性是紧密相联的，正是由于数学的高度抽象性，它的每

一个概念、理论、公式、方法就能反映出许多不同事物在数量关系或（及）空间形式方面的共同属性，从而可以应用于许多不同事物之中；正是由于数学具有严密的逻辑性，它就能成为各门科学技术的精确的科学语言和可靠的科学方法。

二、高等数学的对象、方法和它对于自然科学的作用

什么是高等数学？一是泛指自十七世纪至十九世纪中叶这段历史时期所发展起来的数学，它以研究变量为其重要特征，故又称为“变量的数学”；另一是专指本课程而言，它是前者最基本的组成部分。

本课程以微积分为主体，空间解析几何是为讲二元函数微积分作准备的，常微分方程可看作微积分的发展和应用。微积分研究的是变量及变量之间的一种相互依赖关系——函数关系，包括函数的分析性质（连续性、可微性、可积性等）、分析运算（极限运算、微分法、积分法等）、有关的基本概念、基本理论及它们的应用。解决微积分问题最基本的方法是极限方法（或称为无穷小分析方法），它本质上是一种辩证的方法。

高等数学对自然科学的发展起着极其重要的作用。在十六世纪，由于航海、采矿、修筑运河等生产实践的需要，促使天文学、力学等得到了迅速的发展，提出了许多初等数学不能解决的问题，促使数学由初等数学向高等数学发展，十七世纪笛卡儿把变量引进了数学，微积分学亦随之而诞生，标志着数学的发展进入了一个新的时代。高等数学不仅为自然科学提供了新的计算工具。而且提供了一种精确的科学语言和科学方法。许多力学的、物理的、工程技术的基本概念，只有用高等数学才能精确地描述；许多自然科学的规律，只有利用高等数学才能加以深刻地揭

示；特别是，当前自然科学的各门学科都朝着愈来愈精确的方向发展，由定性向定量发展。数学方法和计算技术的广泛使用，已成为现代科学技术发展的主要特点之一。

预 备 知 识

这里介绍一些必要的预备知识：集合，实数及其绝对值，区间与点的邻域，充分条件和必要条件。对于已经掌握了这些知识的读者，可以略微翻阅一下，或者跳过去，从第一章开始阅读。

§0.1 集 合

一、集合的概念及表示方法

1. 集合的概念

先看几个例子。

（1） 某班的全体同学；

（2） 在同一平面上，到一个定点的距离等于某一常数的点；

（3） 2，3，0，-1，4。

象这些例子所叙述的确定对象或事物的全体叫做**集合**（简称**集**），集合里的每个个体叫做集合的元素。通常用大写字母A，B，C，X，Y等表示集合，用小写字母a，b，c，x，y等表示元素。

若x是集合A的元素，我们说x属于A，记作$x \in A$；若x不是集合A的元素，我们说x不属于A，记作$x \overline{\in} A$。集合与它的元素的关系是总体与个体的关系，任一集合都是由某些确定的个体所构成的总体，其中每一个体都是这集合的元素。下面再举两例。

（1） 设J是所有整数的集合。显然，任一整数都是J的元素，如$3\in J$，$-2\in J$等，而分数$\frac{1}{2}$、无理数$\sqrt{3}$、复数$2-3i$等都不是J的元素，即$\frac{1}{2}\overline{\in}J$，$\sqrt{3}\overline{\in}J$，$2-3i\overline{\in}J$等。

（2） 设集合A是由现有人口在300万以上的所有城市组成的。北京市是A的一个元素，即北京市$\in A$；而太原市不是A的元素，即太原市$\overline{\in}A$。

所谓一个集合A是给定的，就是说它具有哪些元素是确定的。任何一个对象或事物x，或者属于A，或者不属于A，不能含混不清。例如，“一切很大的实数”不能构成集合，因为“很大”一词没有确定的含义，无法判断1000是“很大”，还不是“很大”；又如，“某班的高个子学生”也不能构成集合，因为“高个子”是十分含糊的概念。

2．集合的表示法

表示集合的方法通常有列举法和描叙法。

（1）列举法——把集合的元素一一列举出来，写在花括号{ }内，每个元素仅写一次，不分次序，每个元素之间用“，”隔开。

例如，由数2，3，0，-1，4组成的集合A，可表示为$A=\{2,3,0,-1,4\}$，或$A=\{4,-1,0,3,2\}$，或$A=\{2,3,-1,4,0\}$等等，但不能写为$A=\{2,2,3,-1,4,0\}$或$\{2,2,3,3,0,-1,4\}$等。再如，平面上三个点$(2,1)$，$(3,-1)$，$(0,4)$构成的集合B，可表示为

$$B=\{(2,1),(3,-1),(0,4)\}.$$

又如，从1到50的全体整数构成的集合C，可表为

$$C=\{1,2,\cdots,50\};$$

一切正整数构成的集合N，可表为

$$N=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

（2） 描叙法——在花括号内的左边写出代表元素的符号，右边写出元素所具有的特性或满足的条件，中间用一条竖线隔开。例如，一切大于10的奇数的集合K，可表为

$$K=\{x\mid x>10,\ \text{且}x\text{为奇数}\}.$$

又如，一切实数的集合R，可表为

$$R=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}.$$

方程 $x^4-1=0$的实根构成的集合M，可表为

$$M=\{x\mid x^4-1=0,\ \text{且}x\in R\}$$

平面上坐标满足关系式$x^2+y^2\leqslant 1$的点(x,y)的全体构成的集合D，可表为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,\ x\in R,\ y\in R\}.$$

二、有限集与无限集

若集合中的元素个数是有限多个，则称这集合为**有限集合**。例如，$A=\{2,3,0,-1,4\}$，$B=\{(2,1),(3,-1),(0,4)\}$，$C=\{1,2,\cdots,50\}$都是有限集合。特别地，只含有一个元素a的集合，叫做**单元素集**，记为$\{a\}$，比如，

$$\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y+2)^2=0,\ x\in R,\ y\in R\}$$

就是单元素集，它只含一个元素$(1,-2)$，该集合可记为$\{(1,-2)\}$.

若集合中所含元素的个数是无限多个，则称这集合为**无限集合**。例如，$K=\{x\mid x>10,\ \text{且}x\text{为奇数}\}$、$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,\ x\in R,\ y\in R\}$都是无限集合。

不含任何元素的集合，叫做**空集合**，简称**空集**，用符号$\varnothing$表示。例如，$\{x\mid x^2+1=0,\ x\in R\}=\varnothing$，$\{x\mid x>1\text{且}x<-1\}=\varnothing$。注意，$\varnothing$与$\{0\}$不同，$\varnothing$表示不含任何元素的集合，$\{0\}$表示只含有一个元素0的单元素集，如

$$\{x\mid x^2=0\}=\{0\}.$$