从高考到联赛一试专题讲座丛书

函数g(x)=ax+b/x的结构与应用

◎ 甘大旺　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

从高考到联赛一试专题讲座丛书

函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 的结构与应用

甘大旺　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

函数 $g(x)=ax+b/x$ 的结构与应用/甘大旺编著.
—杭州：浙江大学出版社，2010.6

ISBN 978-7-308-07669-2

Ⅰ.①函… Ⅱ.①甘… Ⅲ.①函数—研究 Ⅳ.①O174

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 106986 号

内 容 简 介

笔者把多年来对函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 研究的学术形态转化为学生易于阅读的学习形态，第一章用通俗、规范的表述来引导学生探究此函数及其图象的性质和价值，第二章分年度讲解此函数在高考题和竞赛题中的合理运用、分单元精选模拟题提供给学生进行针对性训练，第三章运用变式、变通的数学技能对此函数进行外延性类比探究，期望由本书所引领的数学探究既可以促进学生的自学又能够便利于教师的指导。

函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 的结构与应用

甘大旺　编著

责任编辑　沈国明
文字编辑　吴　慧
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　杭州杭新印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　8.75
字　　数　220 千
版 印 次　2010 年 6 月第 1 版　2010 年 6 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-07669-2
定　　价　18.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话（0571）88925591

前　　言

经过初步学习基本不等式 $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$(这里 $a>0$、$b>0$,其中当且仅当 $a=b$ 时取等号)后,同学们能够做到:先求出函数 $y=x+\frac{1}{x}(x>0)$ 当 $x=1$ 时取得最小值 2,函数 $y=2x+\frac{3}{x}(x>0)$ 当 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时取得最小值 $2\sqrt{6}$,等等;再体会到一般函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}(x>0$,常数 a、$b>0)$ 当 $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$ 时取得最小值 $2\sqrt{ab}$. 然后,也有聪明的学生会自然提问此函数 $g(x)$ 在区间 $\left(0,\sqrt{\frac{b}{a}}\right]$、$\left[\sqrt{\frac{b}{a}},+\infty\right)$ 上依次递减、递增吗?此函数 $g(x)$ 及其图象还有其他性质吗?对于任意非零常数 a、b 如何?其变式及应用如何?

思索并解答上述一连串问题,同学们不但自然而然地进入了德国教育学家瓦根舍因倡导的"范例学习"和美国现代教育心理学家布鲁纳倡导的"发现学习"的范畴,而且也符合当今我国主张的"利用已有的知识与经验,主动探究知识的发生与发展"的课改精神. 为了促使学生对函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 的学习和探究既轻松又高效,笔者感到责无旁贷!

笔者在华中师大《数学通讯》1992 年第 2 期上发表的文章《函数 $y=ax+\frac{b}{x}$ 的性质及应用》,拉开了我国中学数学界对此函数的研究序幕. 此研究在 5 年后出现了转机,1997 年全国高考数学试卷出现了一道高考题:甲、乙两地相距 s 千米,汽车从甲地匀速行驶到乙地,速度不得超过 c 千米 / 时,已知汽车每小时的运输成本(以元为单位)由可变部分和固定部分组成:可变部分与速度 v(千米 / 时)的平方成正比,比例系数为 b;固定部分为 a 元. (1) 把全程运输成本 y(元)表示为速度 v(千米 / 时)的函数,并指出这个函数的定义域;(2) 为了使全程运输成本最小,汽车应以多大速度行驶?(这道标志性高考题现在又被选编成为人教课标 A 版高中数学必修 5 第三章的复习题)此后十多年,函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 就一直是我国中学数学教师的研究热点,其创新性或介绍性的教研文章遍及全国多家中数报刊,而且以此函数为载体编拟高考题、竞赛题在近年备受命题专家的青睐.

目前在我国高中数学课改的数学探究性课题学习中,“教师应该为学生提供较为丰富的数学探究课题的案例和背景材料”,使学生的数学探究有范例、有目标、有实效.顺应课改主流,笔者萌生了编写本书的念头,把多年来对函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 研究的学术形态转化为学生易于阅读的学习形态,努力使知识的发生、发展过程同学生的认知、探究过程达到和谐共进的理想境界,并注重与相关的高考题研究、竞赛题研究、模拟题训练结合起来,期望由本书所引领的数学探究既可以提高学生的数学成绩、自学能力和发展潜质,又能够为中学数学教师指导学生开展其他课题的探究学习提供借鉴思路.

本书的编写得到了宁波市北仑区教育局的支持,所在学校的领导和数学组的老师提供了许多便利条件,我教的多届学生验算了部分习题答案,我国中学数学界的许多同行期待和鼓励我完成这本专著,几家杂志刊载了我的相关研究论文,我也阅读了许多同行和专家的相关文献,浙江大学出版社的几位编辑老师细致审校了书稿,在此我一并表示真挚感谢!

因为笔者的水平有限,所以书中难免出现笔误和欠缺,诚请大家把批评、指正、建议通过电子邮件发到我的邮箱 gandawang@163.com,我将及时回复或在再版时鸣谢!

甘大旺

2010 年 4 月于宁波市北仑明港中学

目　录

CONTENTS

第一章　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 及其图象的探究导引 …… 1

第 1.1 节　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 的性质及应用　/ 1

第 1.2 节　运用转轴法探究双曲线 $y=ax+\frac{b}{x}$ 的几何特征　/ 6

第 1.3 节　关于曲线 $y=ax+\frac{b}{x}$ 的两道高考题的统一类比　/ 12

第 1.4 节　一道曲线 $y=x+\frac{1}{x}$ 联赛题的别解和类比探究　/ 15

第二章　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在高考题和竞赛题中的应用 …… 20

第 2.1 节　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在高考题中的应用　/ 20

2.1.1　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在 2004 年以前高考题中的应用　/ 20

2.1.2　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在 2005 年高考题中的应用　/ 24

2.1.3　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在 2006 年高考题中的应用　/ 27

2.1.4　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在 2007 年高考题中的应用　/ 31

2.1.5　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在 2008 年高考题中的应用　/ 34

2.1.6　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在 2009 年高考题中的应用　/ 39

第 2.2 节　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在竞赛题中的应用　/ 43

2.2.1　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在 2002 年以前竞赛题中的应用　/ 43

2.2.2　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在 2003 年竞赛题中的应用　/ 46

2.2.3　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在 2004 年竞赛题中的应用　/ 48

2.2.4　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在 2005 年竞赛题中的应用　/ 50

2.2.5　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在 2006 年竞赛题中的应用　/ 52

2.2.6　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在 2007 年竞赛题中的应用　/ 55

2.2.7　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在 2008 年竞赛题中的应用　/ 59

2.2.8　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在 2009 年竞赛题中的应用　/ 63

第 2.3 节　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在高考、竞赛模拟题中的应用　/ 66

2.3.1　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在集合、逻辑模拟题中的应用　/ 66

2.3.2　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在函数模拟题中的应用　/ 69

2.3.3　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在方程、代数式模拟题中的应用　/ 71

2.3.4　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在不等式模拟题中的应用　/ 74

2.3.5　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在数列模拟题中的应用　/ 77

2.3.6　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在三角函数、平面向量模拟题中的应用　/ 80

2.3.7　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在解析几何模拟题中的应用　/ 84

2.3.8　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在立体几何模拟题中的应用　/ 89

2.3.9　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在导数模拟题中的应用　/ 91

2.3.10　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在复数、数论模拟题中的应用　/ 93

2.3.11　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 在综合模拟题中的应用　/ 95

第三章　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 的外延性类比探究 ······ 103

第 3.1 节　类比于双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 来探究函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 的图象与性质　/ 103

第 3.2 节　函数 $y=\frac{x}{ax^2+b}$ 的性质及其应用　/ 107

第 3.3 节　非退化型二次分式函数 $y=\frac{dx^2+ex+f}{ax^2+bx+c}$ 的性质及其应用　/ 115

参考答案 ······ 127

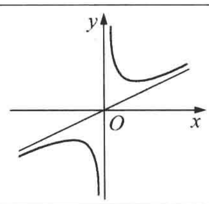
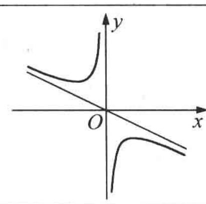
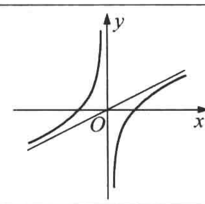
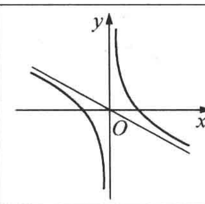
主要参考文献 ······ 133

第一章　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 及其图象的探究导引

第 1.1 节　函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 的性质及应用

函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}(ab\neq 0)$ 是正比例函数 $y=ax$ 与反比例函数 $y=\frac{b}{x}$ 的和函数，研究它的性质及其应用，很有实用价值.

为了具有条理性，现将函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 按 a、b 的正负性分成（Ⅰ）、（Ⅱ）、（Ⅲ）、（Ⅳ）等四种类型，下表对照其图象分述它们的性质：

内容项目 \ 函数类型	$g(x)=ax+\frac{b}{x}$（其中 $a\cdot b\neq 0$）			
	（Ⅰ）：$\begin{cases}a>0\\b>0\end{cases}$	（Ⅱ）：$\begin{cases}a<0\\b<0\end{cases}$	（Ⅲ）：$\begin{cases}a>0\\b<0\end{cases}$	（Ⅳ）：$\begin{cases}a<0\\b>0\end{cases}$
图象形状				
图象极小值点坐标	$\left(\sqrt{\frac{b}{a}},2\sqrt{ab}\right)$	$\left(-\sqrt{\frac{b}{a}},2\sqrt{ab}\right)$	不存在	不存在
图象极大值点坐标	$\left(-\sqrt{\frac{b}{a}},-2\sqrt{ab}\right)$	$\left(\sqrt{\frac{b}{a}},-2\sqrt{ab}\right)$	不存在	不存在
图象渐近线	两条渐近线 $x=0$、$y=ax$			
奇偶性	奇函数（图象关于原点 O 对称）			
递减区间	$\left(0,\sqrt{\frac{b}{a}}\right]$、$\left[-\sqrt{\frac{b}{a}},0\right)$	$\left[\sqrt{\frac{b}{a}},+\infty\right)$、$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{b}{a}}\right]$	不存在	$(0,+\infty)$、$(-\infty,0)$
递增区间	$\left[\sqrt{\frac{b}{a}},+\infty\right)$、$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{b}{a}}\right]$	$\left(0,\sqrt{\frac{b}{a}}\right]$、$\left[-\sqrt{\frac{b}{a}},0\right)$	$(0,+\infty)$、$(-\infty,0)$	不存在

限于篇幅,笔者把上述性质的证明过程留给读者完成.

灵活运用上述的函数性质,能直观、简捷地解决有关函数单调性与值域、不等式与方程、解几与数列等问题.必须注意到:函数 $y=a(x-c)+\dfrac{b}{x-c}+d(ab\neq 0)$ 的图象可以由函数 $g(x)=ax+\dfrac{b}{x}$ 的图象沿向量 $\overrightarrow{m}=(c,d)$ 平移而得到,因而可推知其极值点、单调性、图象渐近线等相应性质.

一、探求函数单调性、值域及最值

例 1 (2007年希望杯赛高二培训题)已知 $f(x)=x^2-8x+7$,$g(x)=x+\dfrac{4}{x}$,则复合函数 $f(g(x))$ 的单调递增区间是________.

解 函数 $f(g(x))$ 的定义域是 $\{x\in\mathbf{R}\,|\,x\neq 0\}$.

当 $x\leqslant -2$ 时,可知内层函数 $g(x)=x+\dfrac{4}{x}$ 在 $(-\infty,-2]$ 上递增且取值范围是 $(-\infty,-4]$.又因为外层函数 $f(x)=x^2-8x+7$ 在 $(-\infty,-4]$ 上递减,所以 $f(g(x))$ 在 $(-\infty,-2]$ 上递减.

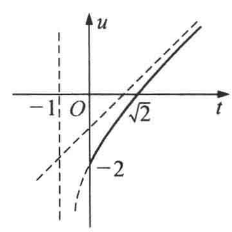
当 $-2\leqslant x<0$ 时,内层函数 $g(x)=x+\dfrac{4}{x}$ 在 $[-2,0)$ 上递减且取值范围是 $(-\infty,-4]$.又因为外层函数 $f(x)=x^2-8x+7$ 在 $(-\infty,-4]$ 上递减,所以 $f(g(x))$ 在 $[-2,0)$ 上递增.

同理可得,$f(g(x))$ 在 $(0,2]$ 上递减、在 $[2,+\infty)$ 上递增.

总之,复合函数 $f(g(x))$ 的单调递增区间是 $[-2,0)$、$[2,+\infty)$.

说明:① 用导数法也可以解答此题,但运算量相当大;② 本节选自于1992年2月发表在《数学通讯》上的参考文献【1】,出自2007年的本例是编著此书时增加的.

例 2 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x-1}+1}{x-3}$ 的值域.



解 令 $t=\sqrt{x-1}$,则函数式变形为

$$y=\frac{t+1}{t^2-2}=\frac{t+1}{(t+1)^2-2(t+1)-1},$$

即 $$y=\frac{1}{(t+1)-\dfrac{1}{t+1}-2}(\text{其中 } t\geqslant 0 \text{ 且 } t\neq\sqrt{2}).$$

在直角坐标系 tOu 内,由函数 $u=(t+1)-\dfrac{1}{t+1}-2(t\geqslant 0$ 且 $t\neq\sqrt{2})$ 的图象知,$u\geqslant -2$ 且 $u\neq 0$.

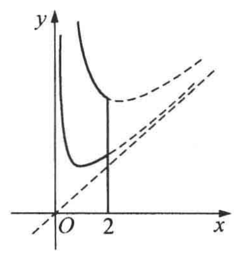
又因为 $y=\dfrac{1}{u}$,则 $y\leqslant -\dfrac{1}{2}$ 或 $y>0$.

故所求函数的值域是 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup(0,+\infty)$.

说明：对含有根式和分式的原函数解析式进行合理变形，是运用函数 $u=(t+1)-\frac{1}{t+1}-2(t\geqslant 0$ 且 $t\neq\sqrt{2})$ 的基础.

例 3　(1986 年上海市高中竞赛决赛题)设 a、θ 均为实数，$a>1$，试求当 θ 变化时，函数 $\frac{(a+\sin\theta)(4+\sin\theta)}{1+\sin\theta}$ 的最小值.

解　$$\frac{(a+\sin\theta)(4+\sin\theta)}{1+\sin\theta}=\frac{[(1+\sin\theta)+(a-1)]\cdot[(1+\sin\theta)+3]}{1+\sin\theta}$$
$$=(1+\sin\theta)+\frac{3(a-1)}{1+\sin\theta}+(a+2).$$



令 $y=(1+\sin\theta)+\frac{3(a-1)}{1+\sin\theta}$、$x=1+\sin\theta$，则 $y=x+\frac{3(a-1)}{x}$(其中 $a>1,0<x\leqslant 2$)，其图象是位于第一象限的曲线段. 根据类型(Ⅰ)的极小值点$(\sqrt{3(a-1)},2\sqrt{3(a-1)})$的横坐标分两类情况讨论：

(ⅰ)当 $0<\sqrt{3(a-1)}\leqslant 2$，即 $1<a\leqslant\frac{7}{3}$ 时，

$y_{\min}=2\sqrt{3(a-1)}$.

(ⅱ)当 $\sqrt{3(a-1)}>2$，即 $a>\frac{7}{3}$ 时，$y_{\min}=y(2)=2+\frac{3(a-1)}{2}=\frac{3a+1}{2}$.

由于 $\frac{(a+\sin\theta)(4+\sin\theta)}{1+\sin\theta}=y+(a+2)$，

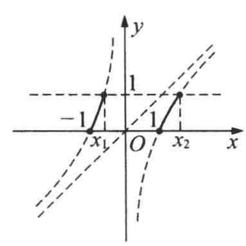
则当 $1<a\leqslant\frac{7}{3}$ 时，$\frac{(a+\sin\theta)(4+\sin\theta)}{1+\sin\theta}$ 的最小值为 $2\sqrt{3(a-1)}+(a+2)$；

当 $a>\frac{7}{3}$ 时，$\frac{(a+\sin\theta)(4+\sin\theta)}{1+\sin\theta}$ 的最小值为 $\frac{5}{2}(a+1)$.

说明：一般地，仿照例 1、例 2 的解法，能够探求分式函数 $y=\frac{dx^2+ex+f}{ax^2+bx+c}$(其中分子与分母互质，$\frac{d}{a}\neq\frac{e}{b}$，$a$ 与 d 不全为零，b 与 e 不全为零)在任意指定区间内的值域及最值.

二、不等式的求解与证明

例 4　(1988 年全国高考题)解不等式 $\lg\left(x-\frac{1}{x}\right)<0$.



解　原不等式等价于连接不等式 $0<x-\frac{1}{x}<1$.

在直角坐标系 xOy 内考虑函数 $y=x-\frac{1}{x}$ 的图象知，$0<y<1$ 的充要条件是 $-1<x<x_1$ 或 $1<x<x_2$(其中，x_1、x_2 是方程 $x-\frac{1}{x}=1$ 的两根，且满足 $-1<x_1<0<1<x_2$).

解方程 $x-\frac{1}{x}=1$ 即 $x^2-x-1=0$，得到两根 $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$、$x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 所以，原不等式的解集是 $\left(-1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

说明：命题组提供的解法是解不等式组

$$\begin{cases}0<x-\frac{1}{x},\\ x-\frac{1}{x}<1,\end{cases}\text{即}\begin{cases}\frac{x^2-1}{x}>0,\\ \frac{x^2-x-1}{x}<0.\end{cases}$$

例 5 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}_+$，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant n\cdot b$，其中整数 $n\geqslant 2$、实常数 $b\in(0,1]$，求证：

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}+\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}+\frac{1}{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}}.$$

证明 由均值不等式得

$$0<\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant b.$$

令 $x_1=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}$、$x_2=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，

则 x_1、$x_2\in(0,b]$，且 $x_1\leqslant x_2$.

又因为函数 $g(x)=x+\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,b]$ 上递减 $(0<b\leqslant 1)$，所以 $g(x_1)\geqslant g(x_2)$，

即 $g(x_2)\leqslant g(x_1)$. 代入得到

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}+\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$
$$\leqslant\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}+\frac{1}{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}}.\text{ 证毕.}$$

说明：根据函数 $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 四种类型（Ⅰ）、（Ⅱ）、（Ⅲ）、（Ⅳ）的凸凹性，我们能够派生出许多不等式.

三、讨论方程的实根

例 6 若关于 x 的方程 $\cos^2x+2a\cdot\sin x-3a-1=0$ 有实数根，求实数 a 的取值范围.

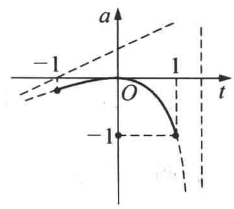
解 令 $t=\sin x$，则原不等式等价于

$$t^2-2a\cdot t+3a=0\text{（其中}|t|\leqslant 1\text{）}.$$

即
$$a=\frac{t^2}{2t-3}=\frac{(2t-3)^2+6(2t-3)+9}{4(2t-3)}$$
$$=\frac{2t-3}{4}+\frac{9}{4(2t-3)}+\frac{6}{4}\text{（其中}|t|\leqslant 1\text{）},$$

即
$$a=\frac{t-\frac{3}{2}}{2}+\frac{\frac{9}{8}}{t-\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}\text{（其中}-1\leqslant t\leqslant 1\text{）}.$$

在直角坐标系 tOa 内作出上述 a 关于 t 的函数图象知，此函数的值域是 $\{a\,|-1\leqslant a\leqslant 0\}$，所以，实数 a 的取值范围是 $\{a\,|-1\leqslant a\leqslant 0\}$.

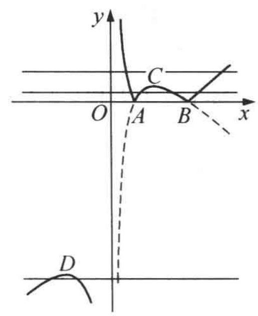


说明：(1) 用其他多种换元方式也可解答此题；(2) 假如题设方程在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上有两个不等实根，那么如何求实数 a 的取值范围？

例 7　当实数 m 为何值时，关于 x 的方程 $|x^2-4x+3|=mx$ 分别有 2 个、4 个不同实根？

解　设 $f(x)=\dfrac{|x^2-4x+3|}{x}$，则原方程等价于方程 $f(x)=m$. 根据分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{3}{x}-4 & (x<0\text{ 或 }0<x\leqslant 1\text{ 或 }x\geqslant 3)\\ -x-\dfrac{3}{x}+4 & (1<x<3)\end{cases}$$



的图象，并考虑到图象的两个零点 $A(1,0)$、$B(3,0)$ 和极大值点 $C(\sqrt{3},4-2\sqrt{3})$、极小值点 $D(-\sqrt{3},-4-2\sqrt{3})$，可知结论——

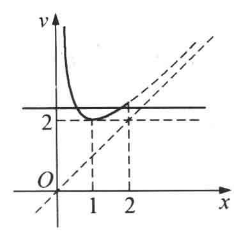
当 $m<-4-2\sqrt{3}$ 或 $m>4-2\sqrt{3}$ 或 $m=0$ 时，原方程有 2 个不同实根；当 $-4-2\sqrt{3}<m<4-2\sqrt{3}$ 时，原方程有 4 个不同实根.

说明：(1) 此例的流行解法是考虑直线 $y=mx$ 与折抛物线 $y=|x^2-4x+3|$ 的公共点情况，但要两次用判别式法，计算烦琐；(2) 还可知当 $m=-4-2\sqrt{3}$ 此方程有唯一实根，当 $m=4-2\sqrt{3}$ 时此方程有 3 个不同实根.

四、研究其他综合问题

例 8　(1990 年上海市高三竞赛题) 设抛物线 $y=x^2+mx+2$ 与两个端点为 $(0,1)$、$(2,3)$ 的线段有两个相异的交点，则 m 的取值范围是____________.

解　联立方程组 $\begin{cases}y=x^2+mx+2,\\ y=x+1(0\leqslant x\leqslant 2).\end{cases}$



消去 y 得 $-mx=x^2-x+1\ (x\neq 0)$.

则　$1-m=x+\dfrac{1}{x}(0<x\leqslant 2)$.

在直角坐标系 xOv 内，平行直线系 $v=1-m$ 与曲线段 $v=x+\dfrac{1}{x}(0<x\leqslant 2)$ 有两个相异的交点的充要条件是 $v(1)<1-m\leqslant v(2)$，

代入得　$2<1-m\leqslant\dfrac{5}{2}$.

即　$-\dfrac{3}{2}\leqslant m<-1$. 故所求 m 的取值范围是 $\left[-\dfrac{3}{2},-1\right)$.

说明：同理知，当 $m<-\dfrac{3}{2}$ 时，题设抛物线与题设线段有一个交点；当 $m=-1$ 时，题设抛物线与题设线段相切于一点；当 $m>-1$ 时，题设抛物线与题设线段没有公共点.

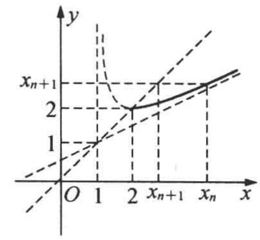
例 9 （1984 年全国高考题）设 $a>2$，给定数列 $\{x_n\}$，其中 $x_1=a$，$x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{2(x_n-1)}$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 求证：$x_n>2$，且 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1(n=1,2,3,\cdots)$.

证明 令 $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x-1)}$，则 $x_{n+1}=f(x_n)$. 由于 $f(x)=\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{1}{2(x-1)}+1$，则 $f(x)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上递增（如图），其中 $f(2)=2$.

下面用数学归纳法证明 $x_n>2(n\in\mathbf{N}_+)$.

（ⅰ）当 $n=1$ 时，$x_1=a>1$；

（ⅱ）假设当 $n=k(\in\mathbf{N}_+)$ 时 $x_k>2$，那么当 $n=k+1$ 时，$x_{n+1}=f(x_n)>f(2)=2$，即 $x_{n+1}>2$.



综合（ⅰ）和（ⅱ）知，$x_n>2(n\in\mathbf{N}_+)$.

再令 $g(x)=x$，则不等式 $f(x)<g(x)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 内恒成立（如图），

则 $\quad 2<x_{n+1}=f(x_n)<g(x_n)=x_n$，

所以，$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1(n=1,2,3,\cdots)$.

说明： 曲线段 $y=\dfrac{x^2}{2(x-1)}(x>2)$ 夹在角域 $\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{x+1}{2}<y<x,x>1\right\}$ 内.

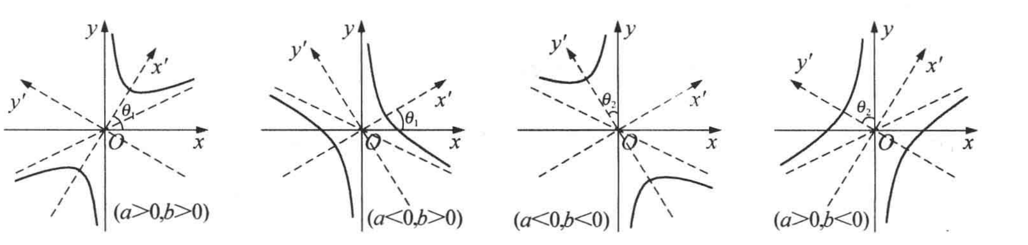
综上各例，运用函数 $g(x)=ax+\dfrac{b}{x}(ab\neq0)$ 的性质，是学生提高创造能力的一个好素材；而且，此函数的图象，是专家编拟高考题、竞赛题的一个直观模型.

第 1.2 节　运用转轴法探究双曲线 $y=ax+\dfrac{b}{x}$ 的几何特征

本节运用转轴法来验证函数 $y=ax+\dfrac{b}{x}\ (ab\neq0)$ （1）

的图象是双曲线，并着重探究这种双曲线及其平移状态的几何特征.

引理 1 如图所示，对于曲线（1），当 $b>0$ 时，把直线 $y=ax$ 到 y 轴的角的平分线记为 x' 轴，则 x 轴正方向到 x' 轴正方向的角 $\theta_1=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arctan a$；当 $b<0$ 时，把 y 轴到直线 $y=ax$ 的角的平分线记为 y' 轴，则 y 轴正方向到 y' 轴正方向的角 $\theta_2=\theta_1=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arctan a$.



证明　如图，当 $b>0$ 时，$\theta_1=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}+\arctan a\right)-0=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arctan a$；当 $b<0$ 时，

$$\theta_2=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+(\pi+\arctan a)\right]-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arctan a.$$

引理 2　将直角坐标系 xOy 的 x 轴、y 轴绕原点 O 逆转 $\theta=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arctan a$ 角分别得到 x' 轴、y' 轴，则任意点 P 在系 xOy、$x'Oy'$ 内的依次坐标 (x,y)、(x',y') 满足两个关系式

$$\begin{cases}x=\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{2\sqrt{1+a^2}}}\cdot x'-\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{a}{2\sqrt{1+a^2}}}\cdot y',\\ y=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{a}{2\sqrt{1+a^2}}}\cdot x'+\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{2\sqrt{1+a^2}}}\cdot y';\end{cases}\tag{2}$$

$$\begin{cases}x'=\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{2\sqrt{1+a^2}}}\cdot x+\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{a}{2\sqrt{1+a^2}}}\cdot y,\\ y'=-\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{a}{2\sqrt{1+a^2}}}\cdot x+\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{2\sqrt{1+a^2}}}\cdot y.\end{cases}\tag{3}$$

证明　由于 $\theta=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arctan a\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

则　$$\sin\theta=\sin\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan a\right)\right]=\sqrt{\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\arctan a\right)\right]}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sin(\arctan a)}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{a}{2\cdot\sqrt{1+a^2}}},\tag{4}$$

则　$$\cos\theta=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{a}{2\cdot\sqrt{1+a^2}}}.\tag{5}$$

将(4)、(5)代入一般转轴公式

$$\begin{cases}x=x'\cdot\cos\theta-y'\cdot\sin\theta,\\ y=x'\cdot\sin\theta+y'\cdot\cos\theta;\end{cases}\quad 和\begin{cases}x'=x\cdot\cos\theta+y\cdot\sin\theta,\\ y'=-x\cdot\sin\theta+y\cdot\cos\theta.\end{cases}$$

于是，便得到了公式(2)、(3). 证毕.

定理　函数 $g(x)=ax+\dfrac{b}{x}(ab\neq 0)$ 的图象是双曲线，其中实半轴、虚半轴的长度分别为

$$a'=\sqrt{2|b|\cdot\left(\sqrt{1+a^2}+\frac{|b|}{b}\cdot a\right)}、b'=\sqrt{2|b|\cdot\left(\sqrt{1+a^2}-\frac{|b|}{b}\cdot a\right)}.$$

证明　将函数式 $y=ax+\dfrac{b}{x}$ 去分母得到

$$ax^2=xy-b.$$

按照引理 2 转轴后，将(2)式代入上式并整理得到

$$\left(\frac{a}{2}-\frac{a^2}{2\sqrt{1+a^2}}\right)x'^2-\frac{ax'y'}{\sqrt{1+a^2}}+\left(\frac{a}{2}+\frac{a^2}{2\sqrt{1+a^2}}\right)y'^2$$

$$=\left(\frac{x'^2}{2\sqrt{1+a^2}}-\frac{a\cdot x'y'}{\sqrt{1+a^2}}-\frac{y'^2}{2\sqrt{1+a^2}}\right)-b,$$

即
$$\frac{a-\sqrt{1+a^2}}{2}\cdot x'^2+\frac{a+\sqrt{1+a^2}}{2}\cdot y'^2=-b,$$

即
$$\frac{x'^2}{2(\sqrt{1+a^2}+a)}-\frac{y'^2}{2(\sqrt{1+a^2}-a)}=b. \tag{6}$$

故函数 $y=ax+\frac{b}{x}(ab\neq 0)$ 的图象是双曲线.

当 $b>0$ 时,双曲线方程(6)可化为

$$\frac{x'^2}{2b(\sqrt{1+a^2}+a)}-\frac{y'^2}{2b(\sqrt{1+a^2}-a)}=1,$$

此时得到 $a'=\sqrt{2b(\sqrt{1+a^2}+a)}=\sqrt{2|b|(\sqrt{1+a^2}+\frac{|b|}{b}a)}$、

$b'=\sqrt{2b(\sqrt{1+a^2}-a)}=\sqrt{2|b|(\sqrt{1+a^2}-\frac{|b|}{b}a)}$;

当 $b<0$ 时,双曲线方程(6)可化为

$$\frac{y'^2}{2|b|(\sqrt{1+a^2}-a)}-\frac{x'^2}{2|b|(\sqrt{1+a^2}+a)}=1,$$

此时得到 $a'=\sqrt{2|b|(\sqrt{1+a^2}-a)}=\sqrt{2|b|(\sqrt{1+a^2}+\frac{|b|}{b}a)}$、

$b'=\sqrt{2|b|(\sqrt{1+a^2}+a)}=\sqrt{2|b|(\sqrt{1+a^2}-\frac{|b|}{b}a)}$. 故定理证毕.

说明:根据定理的结果知,双曲线 $y=ax+\frac{b}{x}$ $(ab\neq 0)$ 不可能是等轴双曲线($a'\neq b'$,否则 $a=0$),此类双曲线与等轴双曲线 $y=\frac{b}{x}(b\neq 0)$ 一起构成了对称中心在原点的全部斜对称轴(即实轴、虚轴所在直线不重合于坐标轴)双曲线.

根据引理 1、2 和定理的证明过程,我们可得到——

推论 1 双曲线 $y=ax+\frac{b}{x}$ $(ab\neq 0)$ 的中心在坐标原点 O. 当 $b>0$ 时,该双曲线实轴所在直线的方程是 $y=(a+\sqrt{1+a^2})x$、虚轴所在直线的方程是 $y=(a-\sqrt{1+a^2})x$;当 $b<0$ 时,实轴所在直线的方程是 $y=(a-\sqrt{1+a^2})x$、虚轴所在直线的方程是 $y=(a+\sqrt{1+a^2})x$.

将双曲线 $y=ax+\frac{b}{x}(ab\neq 0)$ 的实轴所在直线绕原点 O 分别逆转或顺转 $\varphi=\arctan\frac{b'}{a'}=$

$\arctan(\sqrt{1+a^2}-\frac{|b|}{b}a)$ 角，便能得到两条渐近线. 这样，我们容易获知 ——

推论 2　双曲线 $y=ax+\frac{b}{x}$ $(ab\neq 0)$ 的两条渐近线是 y 轴 $x=0$ 和直线 $y=ax$.

由推论 2 知双曲线 $y=ax+\frac{b}{x}$ $(ab\neq 0)$ 的两条渐近线的夹角不可能是直角，这样也验证了此类双曲线不可能是等轴双曲线.

运用定理中的 a' 和 b'，不难得到 ——

推论 3　双曲线 $y=ax+\frac{b}{x}(ab\neq 0)$ 的半焦距为 $c'=2\sqrt{|b|\cdot\sqrt{1+a^2}}$、离心率为

$$e=\sqrt{2(1+a^2-\frac{|b|}{b}a\cdot\sqrt{1+a^2})}\neq\sqrt{2}.$$

根据(6)式与共轭双曲线的定义得到 ——

推论 4　两条双曲线 $y=ax+\frac{b}{x}$、$y=ax-\frac{b}{x}$(其中 $ab\neq 0$) 是相互共轭的.

由于函数 $y=\frac{px^2+mx+n}{qx+r}$($pq\neq 0$ 且分子与分母互质)、$y=(ax+c)+\frac{b}{x-d}(ab\neq 0)$ 的解析式都可以化归成为 $y=a(x-d)+\frac{b}{x-d}+h(ab\neq 0)$　　(7)

的规范形式，因此有必要研究函数(7)的几何特征. 因为函数(7)的图象是双曲线(1)右移 d、上移 h 个"数量"单位(即沿向量 $\boldsymbol{v}=(d,h)$ 平移)所得到的全等双曲线，所以我们容易迁移推出一般结论 ——

推论 5　(Ⅰ) 双曲线(7)与(1)具有相同的实半轴长 a'、虚半轴长 b'、离心率 e；

(Ⅱ) 双曲线(7)不是等轴双曲线，中心是 $O'(d,h)$，两条渐近线方程是 $x=d$ 和 $y-h=a(x-d)$，实轴所在直线的方程是 $y-h=(a+\frac{|b|}{b}\sqrt{1+a^2})(x-d)$、虚轴所在直线的方程是 $y-h=(a-\frac{|b|}{b}\sqrt{1+a^2})(x-d)$；

(Ⅲ) 双曲线(7)的共轭双曲线方程是

$$y=a(x-d)-\frac{b}{x-d}+h(ab\neq 0).$$

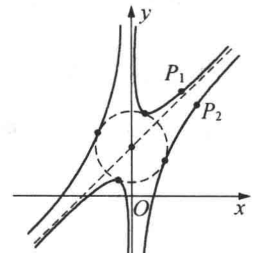
例 1　(2009 年广东省高考题) 已知二次函数 $y=g(x)$ 的导函数的图象与直线 $y=2x$ 平行，且 $y=g(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值 $m-1$ $(m\neq 0)$. 若曲线 $y=f(x)=\frac{g(x)}{x}$ 上的点 P 到点 $Q(0,2)$ 的距离的最小值为 $\sqrt{2}$，求 m 的值.

解　设二次函数 $y=g(x)=ax^2+bx+c$，由于 $g'(x)=2ax+b$ 的图象与直线 $y=2x$ 平行，则 $a=1$. 于是，依题意得

$$x^2+bx+c=g(x)\equiv(x+1)^2+(m-1)=x^2+2x+m.$$

比较系数得 $b=2$、$c=m$，则 $f(x)=\frac{g(x)}{x}=x+\frac{m}{x}+2$.

由推论 5(Ⅱ)、(Ⅰ)知，双曲线 $y=x+\frac{m}{x}+2$ 的中心是点 $Q(0,2)$，两条渐近线方程是 $x=0$ 和 $y=x+2$，实半轴长 $a'=\sqrt{2(\sqrt{2}|m|+m)}$.



因为双曲线 $y=x+\frac{m}{x}+2$ 上的动点 P 到点 $Q(0,2)$ 的距离的最小值为 $\sqrt{2}$，则 $\sqrt{2}=\sqrt{2(\sqrt{2}|m|+m)}$，即 $1=\sqrt{2}|m|+m$.

解得
$$m=-1\pm\sqrt{2}.$$

评注： ① 任意双曲线上的动点到双曲线中心的距离的最小值等于该双曲线的实半轴的长度；② 本节选自于 2003 年 9 月发表在《数学通讯》上的参考文献【5】，本例是编著此书时增加的.

例 2 求双曲线 $y=\frac{x^2-8x+19}{2x-6}$ 的离心率、焦点坐标、虚轴所在直线的方程，并画出双曲线.

解法 1 将函数式变形为

$$y=\frac{x^2-8x+19}{2x-6}=\frac{(x-3)^2-2x+10}{2(x-3)}$$
$$=\frac{(x-3)^2-2(x-3)+4}{2(x-3)}=\frac{x-3}{2}+\frac{2}{x-3}-1.$$

这里，$a=\frac{1}{2}$、$b=2$、$d=3$、$h=-1$. 于是运用推论 5 和推论 3 求得，半焦距为 $c'=2\sqrt[4]{5}$、离心率为 $e=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

根据引理 2 和 $b>0$ 设 x 轴到双曲线实轴所在直线的角为 θ，则运用公式(4)、(5)求得

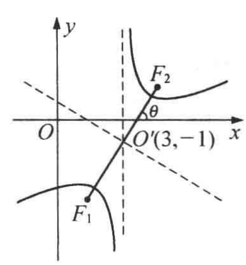
$$\sin\theta=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}},\ \cos\theta=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}}.$$

又因为双曲线的中心是 $O'(3,-1)$，则焦点 $F_1(3-c'\cdot\cos\theta,-1-c'\cdot\sin\theta)$、$F_2(3+c'\cdot\cos\theta,-1+c'\cdot\sin\theta)$ 的坐标依次是

$$(3-\sqrt{2(-1+\sqrt{5})},-1-\sqrt{2(1+\sqrt{5})})、$$
$$(3+\sqrt{2(-1+\sqrt{5})},-1+\sqrt{2(1+\sqrt{5})}).$$

由于双曲线虚轴所在直线的斜率

$$k=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$



则虚轴所在直线的方程是 $y+1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}(x-3)$，

即是 $(1-\sqrt{5})x-2y-(5-3\sqrt{5})=0$.