科学天下 科学之美

数学证明之美

Q.E.D.

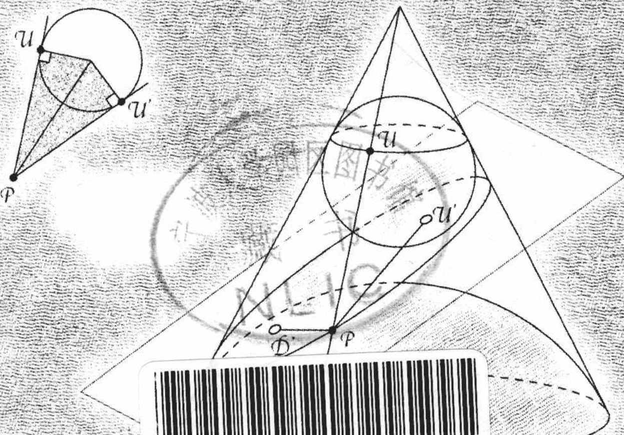
Beauty in Mathematical Proof

[英]博卡德·波斯特/著 贺俊杰 铁红玲/译

湖南科学技术出版社

科学天下 科学之美

数学证明之美



Q.E.D.

Beauty in Mathematical Proof

[英]博卡德·波斯特/著 贺俊杰 铁红玲/译

湖南科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学证明之美 / （英）波斯特著 ; 贺俊杰，铁红玲译. -- 长沙 : 湖南科学技术出版社，2011.11
（科学之美）
ISBN 978-7-5357-6924-4

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①波… ②贺… ③铁… Ⅲ. ①证明论—普及读物 Ⅳ. ①O141.2-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 220042 号

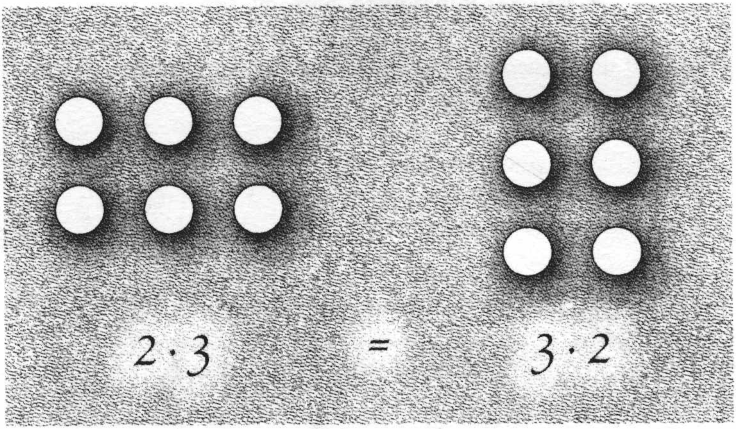
科学之美

数学证明之美

著　　者：[英]博卡德·波斯特
译　　者：贺俊杰　铁红玲
策划编辑：孙桂均　李　媛
文字编辑：陈一心
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市湘雅路 276 号
　　　　　http://www.hnstp.com
邮购联系：本社直销科　0731-84375808
印　　刷：长沙超峰印刷有限公司
　　　　　（印装质量问题请直接与本厂联系）
厂　　址：长沙市新开铺路 438 号
邮　　编：410007
出版日期：2012 年 1 月第 1 版第 1 次
开　　本：875mm×1092mm　1/24
印　　张：3
字　　数：50000
书　　号：ISBN 978-7-5357-6924-4
定　　价：15.00 元

Q.E.D.

BEAUTY IN MATHEMATICAL PROOF



written and illustrated by

Burkard Polster

WOODEN BOOKS

Walker & Company
New York

First published in the United States of America in 2004 by
Walker Publishing Company, Inc.

Published simultaneously in Canada by Fitzhenry and Whiteside,
Markham, Ontario L3R 4T8

For information about permission to reproduce selections from this book, write to Permissions, Walker & Company,
104 Fifth Avenue, New York, New York 10011.

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

Polster, Burkard.

Q.E.D.: beauty in mathematical proof / written and illustrated by Burkard Polster.

p. cm.

ISBN 0-8027-1431-5 (alk. paper)

1. Proof theory. 2. Logic, Symbolic and mathematical. I. Title: QED: beauty in mathematical proof. II. Title.

QA9.54.P65 2004

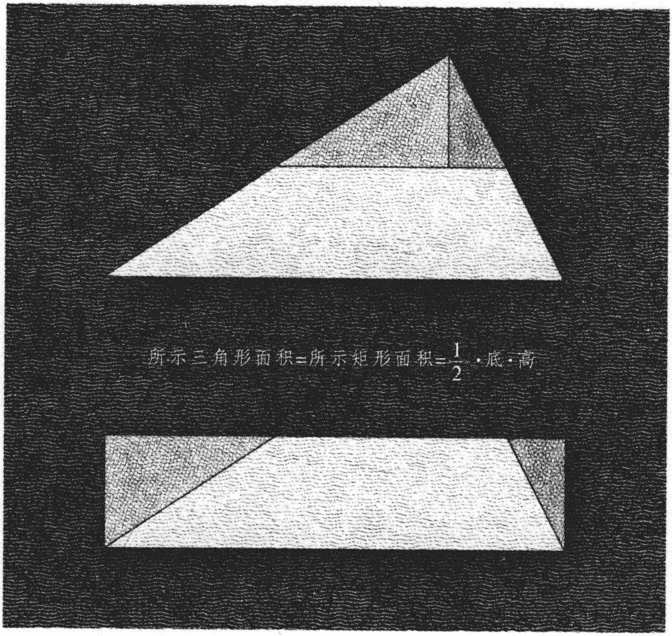
511.3'6—dc22 2004041905

Visit Walker & Company's Web site at www.walkerbooks.com

Printed in the United States of America

4 6 8 10 9 7 5

Q.E.D.

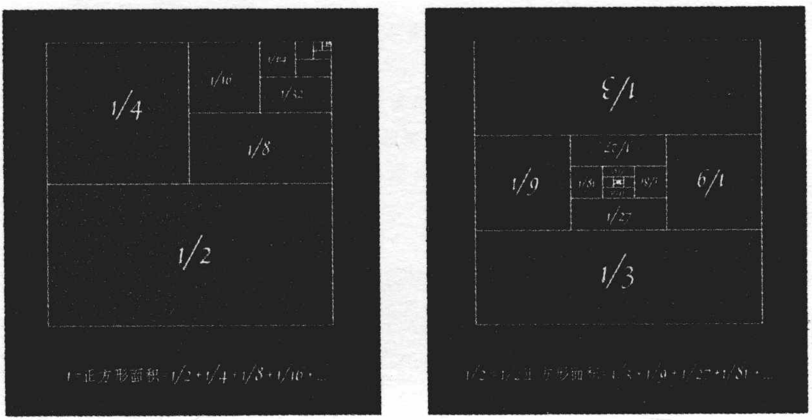


本书献给安努，感谢她的理解

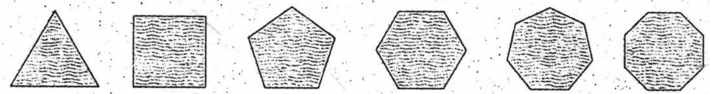
同时感谢过去和现在的数学家们，本书是从他们的观念中提炼而得的。

非常感谢马蒂·罗斯（Marty Ross）、约翰·史迪威尔（John Stillwel）的批评和建议。

最后，还要特别感谢约翰·马蒂诺（John Martineau）和道尔德·萨顿（Daud Sutton），是他们的耐心指导与帮助，使我在数学证明的美丽世界里大开了眼界。

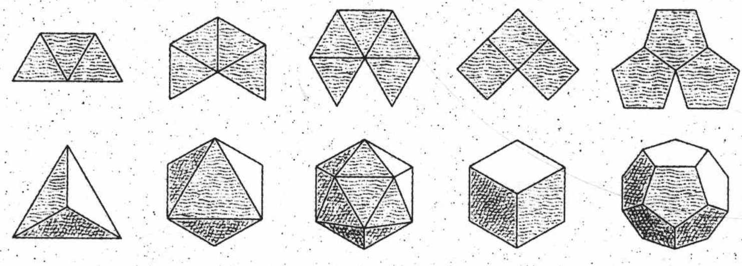


两个无穷和——包装完备，随时奉上。



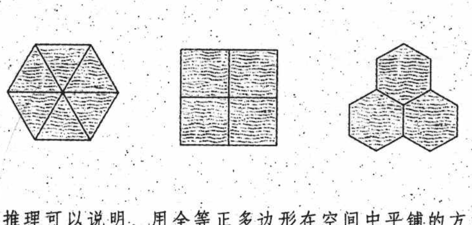
三角形　正方形　正五边形　正六边形　正七边形　正八边形

正多边形都是凸多边形，各边边长及各角角度都相等。有无穷多个正多边形。



四面体　八面体　十二面体　立方体　十二面体

正多面体都是凸多面体，各面形状和面数都相等。上图中第一列图是将3个或3个以上正多边形在一个顶角相接，然后将剩余的空间折入三维空间。可以证明，这样构造空间角，是将上述正多边形拓展成5个著名的正多面体的唯一方法。



同样的简单推理可以说明，用全等正多边形在空间中平铺的方式有三种。

目 录 CONTENTS

序

不少数学对象，每个人都可以欣赏到其优美之处。例如正多边形和正多面体，其完美之至仅次于圆形及球体，又如勾股定理，它是我们为自己建造直角世界的基石，还有圆锥截面，也许是我们用来描述天体运行轨迹的基本工具。

然而除了“基本相貌”以外，极少有人能够领略到数学的深层次的美。只有在数学家们研究并潜心做数学证明时，数学的大部分“容颜”美才会显现出来。而其他的人，即使训练有素也很难一睹芳容。

作为一名数学家，我宣布在我的证明以Q.E.D.三个字母终结时，我已经确定了该定理的真实性。Q.E.D.是拉丁语 quod erat demonstrandum 的缩写，意为“证明完毕”。Q.E.D.既是数学之美的同义词，同时也代表了这门古老科学看似遥不可及的一面。

不过，Q.E.D.也会出现在惊人的简单、生动而感人的证明完毕之后。本书呈现了一趟穿梭奇珍异宝之旅，沿途探索了数学证明背后的思想。现谨以此书献给所有对数学之美有探求兴趣的人们。

写于2003年7月，墨尔本

TREACHEROUS TRUTH

不可靠的真理

什么样的证明才完备?

如同在自然科学中一样，在数学中，我们也通过实验或对实例进行检验推测出定理。可是不论数学实验有多么自然、多么明确，都不能代替证明。如图 1 所示，圆周上给出 1 点、2 点、3 点、4 点、5 点，最多能分别在圆上定义出 1 个、2 个、4 个、8 个、16 个区域。但是当圆上有 6 个点时，却能在圆上定义出 31 个而不是 32 个区域。

又如著名的哥德巴赫猜想，指出任何大于 2 的偶数都可以表示成两个素数之和。例如：12 = 5 + 7 或 30 = 23 + 7 等。虽然这个猜想已验证过无数个数例，但是必须要做出证明，否则谁都无法保证下一个检验结果不会是错误的。

证明必须简短精练、一目了然且见解深刻。如图 2 上图，我们关于 0.999⋯（无限多个 9）等于 1 的证明，就是此类证明的体现。如此看来，任何无限循环的小数，都可以以同样的方式转换成看着较为舒适的整数。对图 2 中图——截去对角的国际象棋盘不能被多米诺骨牌完全覆盖，也是此类证明的典范，当然，还可以用其他棋盘完成证明。

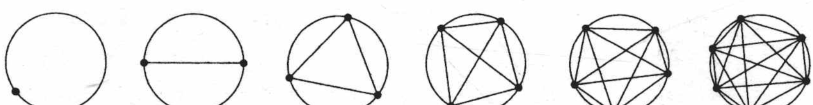


图 1

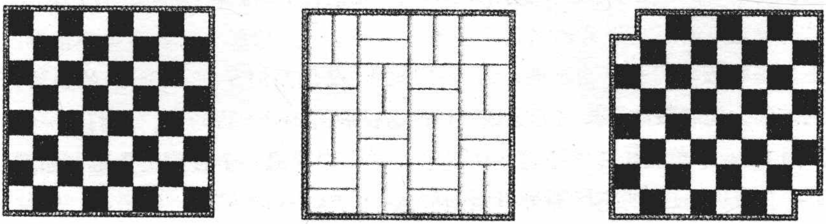
定理：　$1 = 0.999\ldots$

证明：设 $x = 0.999\ldots$. 则

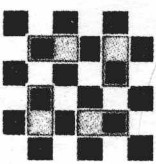
$$
\begin{array}{rl}
 & 10x = 9.999\ldots \\
- & x = 0.999\ldots \\
\hline
= & 9x = 9.000\ldots
\end{array}
$$

所以：$x = 1.000\ldots$

Q.E.D.



国际象棋盘能被多米诺骨牌盖全，其中每个骨牌覆盖两格，但是截去对角的棋盘却不行。



证明：无论怎样覆盖，每块多米诺骨牌都是覆盖一白格和一黑格，所以任何一种覆盖方式所覆盖的白格数量与黑格数量都相同。由于截去对角的国际象棋盘，其白格比黑格多两块，因此，多米诺骨牌无法将其完全覆盖。Q.E.D.

图 2

PYTHAGORAS'S THEOREM

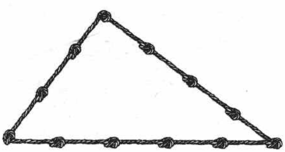
勾股定理

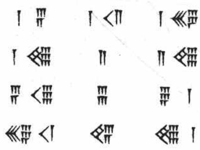
剖分证明法

勾股定理（约公元前 569~ 前 475 年）陈述道：直角三角形斜边的平方等于两直角边的平方和（图 4 上图）。用数学公式表示为：$a^2+b^2=c^2$。

证明：将边长为 a、b、c 的 4 个全等直角三角形，内置于边长为 $a+b$ 的大正方形中，会余出两个边长分别为 a 和 b 的小正方形（图 4 中左图）。而这 4 个直角三角形，在大正方形中的排列，亦可以余出一个边长为 c 的小正方形（图 4 中右图）。在这两种情况中，余出的小正方形面积均等于大正方形面积减去 4 个直角三角形面积之和的差。因此，图 4 中左图两个小正方形的面积等于 a^2+b^2，所得之和等于图 4 右图中小正方形的面积：即 c^2。Q.E.D.

反之，若三角形各边满足上述条件，则这个三角形一定是直角三角形。不过这则需要另外一个证明。若三角形的三条边是满足 $a^2+b^2=c^2$ 的整数，则被称为勾股数或毕氏三元数组（Pythagorean triples）。古时候，人们用一根 $3+4+5=12$ 单位长并等距打结的绳子，就可以围成一个直角三角形（如图 3 左下图），应用的实际原理就是勾股数（3 : 4 : 5）。另外，编号为“普林顿 322 号”（Plimpton 322）的巴比伦泥板上也列出了勾股数的整数对（见图 3 右下图），这些都说明勾股定理在被毕达哥拉斯证明之前，就已为人们所熟知了。





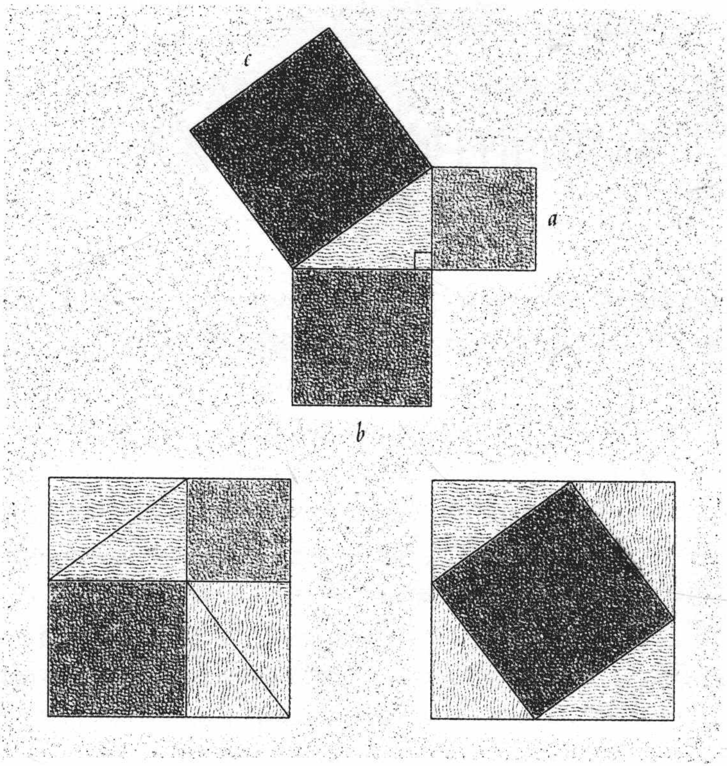
$65^2 + 72^2 = 97^2$

$119^2 + 120^2 = 169^2$

$319^2 + 360^2 = 481^2$

$2291^2 + 2700^2 = 3541^2$

图 3



即使不用正方形，而用随便什么3个相似的图形，置于直角三角形的3条边上，也同样可以证明，两个小图的面积之和等于大图面积。

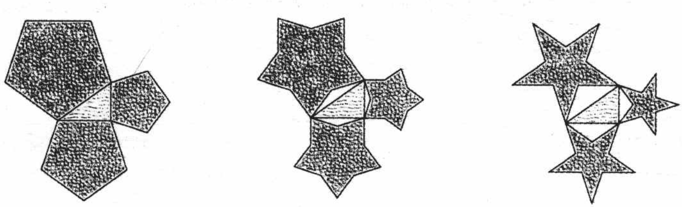


图4

PLANE AND SIMPLE

从平面开始，从简单入手

基本定理大全

欧几里得的《几何原本》（*Elements*，约公元前 325 ~ 前 265 年）中制订了一套严密的数学规则，这部巨著因为一直被广泛采用，所以其中大部分内容都已潜移默化地融入了我们的日常文化中。

在长达 13 卷的《几何原本》中，欧几里得由浅入深地逐步建立了一套复杂的定理网络。它们共同建立在一些被称作公理（axioms）或公设（postulates）的事实基础上，同时彼此之间又以逻辑论证相互联系。为了给本书后面的内容做准备，我们先从本页右边 4 个简单的条件开始讨论，这 4个条件可以按照箭头指示的方向和顺序推导出左边的定理。

我们还需要能够识别出三角形相同性的两个主要层次：如果两个三角形的角度相等，则它们是相似的（similar）三角形。因为，三角形中任意两角可以决定第三个角，因此只要证明两个三角形有两个角相等，那么这两个三角形就是相似三角形；但是，如果两个三角形还有两条边相等，则这两个三角形就是全等（congruent）三角形。若三角形的边角关系如图 5 所示，则这几个三角形都全等。例如图 5 右下图中的两个灰色三角形，它们的边均是 r 和 m，且都有一个直角，所以为全等三角形。因此，圆上两个切线线段 s 和 t 的长度也相等。

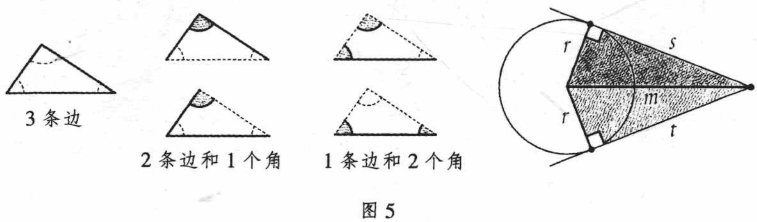


图 5

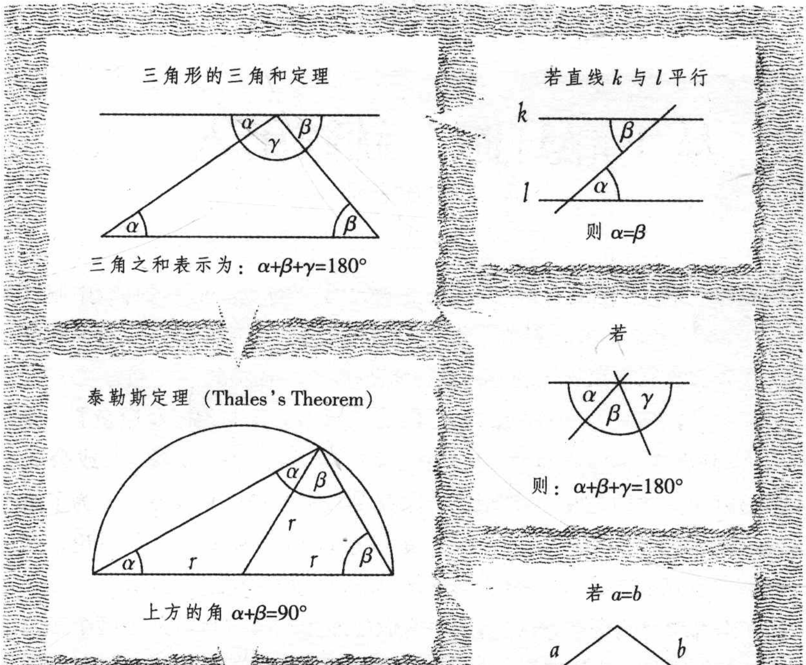

三角形的三角和定理
三角之和表示为：α+β+γ=180°
若直线 k 与 l 平行
则 α=β
若
则：α+β+γ=180°
泰勒斯定理（Thales's Theorem）
上方的角 α+β=90°
若 a=b
则 α=β，反之亦然
求矩形的面积
正方形面积=a²=bc=矩形面积
（根据相似三角形原理 a/c=b/a）
在相似三角形中
a/a'=b/b'

图 6

从“派”到“π”

FROM PIE TO PI

圆的奥秘

埃拉托色尼（Eratosthenes，公元前 276 ~ 前 194 年）因使用“比萨饼”[亦称派（Pie），见图 7] 法计算出地球圆周而闻名于世。一年中有一天，太阳会直射塞尼城（Syene）的一口深井中，埃拉托色尼根据那天亚历山大港（Alexandria）影子的角度，以及亚历山大港与塞尼城之间的距离，计算出了地球的圆周。然后，他使用公式：圆的直径·π = 圆周长，得出了地球的直径。他的笔友阿基米德（Achimeds，公元前 287~ 前 212 年）算出了 π 的近似值。

因为 π 是直径等于 1 时圆的周长，所以它比任何一个圆的内接正多边形的周长都要长（图 8 上图）。正多边形的边数越多，其周长就越接近圆的周长。幸运的是，如果得出一个正多边形的周长，那么就很容易算出边数加倍的正多边形的周长（图 8 中图）。阿基米德就是从正六边形开始，成功地推算出了正十二边形、正二十四变形、正四十八边形以及正九十六边形的周长，得出 π 的值在 $3\frac{10}{71}$ 和 $3\frac{10}{70}$ 之间，最后得出值等于 $\frac{22}{7}$。即使现在，有些教材上还在使用以分数的形式来表示 π 的值。如果从正方形开始，而不是正六边形，就会得到 π 的另一个近似值（图 8 下图）。

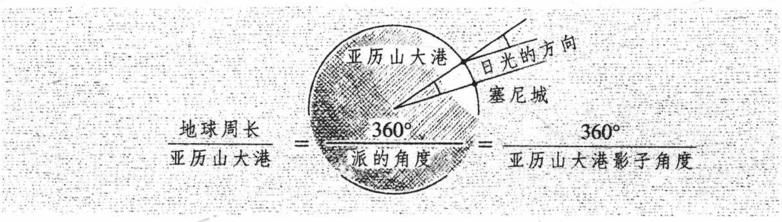


图 7