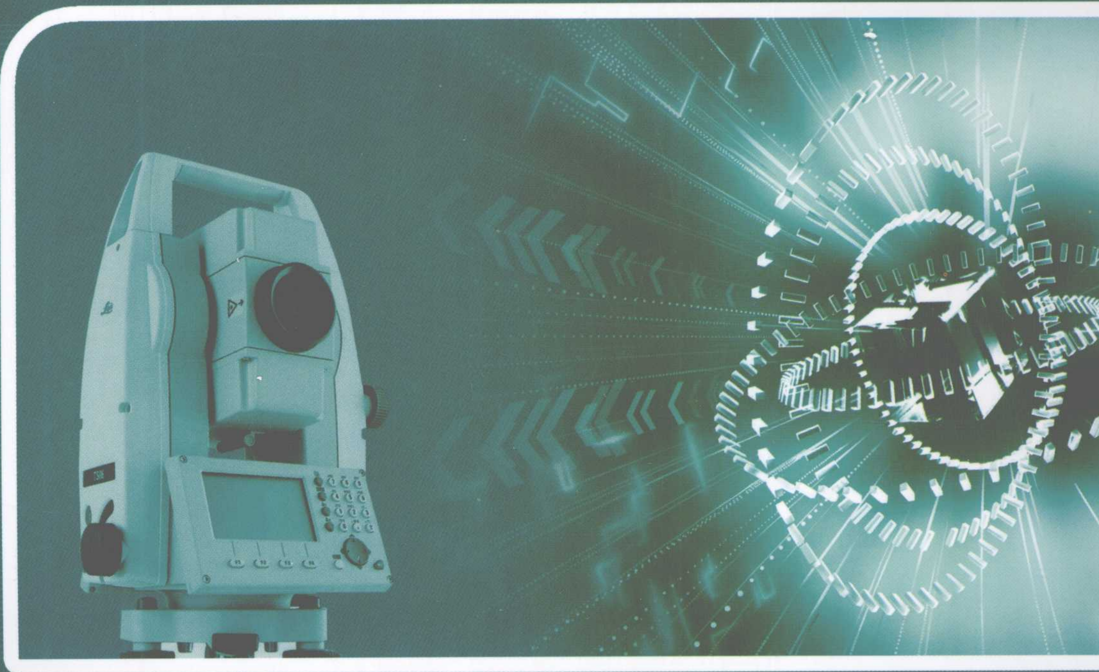
全国高职高专工程测量技术专业规划教材



测量平差

第2版

CELIANG PINGCHA

牛志宏　张福荣　主编
张　潇　主审

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

全国高职高专工程测量技术专业规划教材

测量平差

第2版

CELIANG PINGCHA

主　编　牛志宏　张福荣
副主编　王金玲　陈　帅
　　　　袁江红　杨晓平
主　审　张　潇

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书是为适应高职高专工程测量技术专业测量平差课程的教学需要而编写的。全书共分 6 章，深入浅出地讲述了测量误差的基本理论和工程测量数据处理的基本方法，主要包括测量误差基本知识、测量误差理论及其应用、条件平差、间接平差、误差椭圆、测量平差软件应用。书后的附录对测量平差中常用的数学基本知识作了简要的介绍。

本书适合作为高职高专工程测量技术专业的教材使用，也可供测绘工程技术人员、水利水电工程技术人员以及土木工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

测量平差/牛志宏，张福荣主编. —2 版. —北京：中国电力出版社，2011.12
全国高职高专工程测量技术专业规划教材
ISBN 978-7-5123-2568-5

Ⅰ.①测… Ⅱ.①牛…②张… Ⅲ.①测量平差-高等职业教育-教材 Ⅳ.①P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 281821 号

中国电力出版社出版发行
北京市东城区北京站西街 19 号 100005 http://www.cepp.sgcc.com.cn
责任编辑：王晓蕾 责任印制：蔺义舟 责任校对：闫秀英
北京丰源印刷厂印刷・各地新华书店经售
2012 年 1 月第 2 版・第 5 次印刷
787mm×1092mm 1/16・8.75 印张・205 千字
定价：25.00 元

前　　言

本书自2007年第1版出版发行以来，受到了广大读者特别是相关高职院校工程测量技术专业学生和老师的好评。为适应高职高专教育教学改革发展的需要，对本书内容进行了修订再版。

本书是在高等职业教育发展的新形势下，根据教育部《关于推进高等职业教育改革创新引领职业教育科学发展的若干意见》（教职成［2011］12号）文件精神和《全国高职高专工程测量技术专业规划教材》的要求进行修订的。在编写的过程中，联合相关高职院校测绘专业教师认真研讨了本书第1版的使用情况，根据高职高专工程测量技术专业建设的实际要求，分析测量平差课程对职业能力培养的作用，参照国家职业资格标准选择相关内容。为适应高等职业教育的特点，本书应用工程实例详细介绍了工程测量实践工作中测量数据处理的基本方法，力求通俗易懂、简明实用，提高学生的职业能力。

本书由牛志宏、张福荣任主编，王金玲、陈帅、袁江红、杨晓平任副主编。参加本书编写的人员有：长江工程职业技术学院牛志宏（前言、第1章），湖北水利水电职业技术学院王金玲（第2章2.1、2.2节），陕西铁路工程职业技术学院张福荣（第2章2.3～2.5节），湖南工程职业技术学院袁江红（第3章），山西水利职业技术学院陈帅（第4章），山东水利职业学院李玉芝（第5章），湖北城市建设职业技术学院杨晓平（第6章），湖北城市建设职业技术学院文学（附录）。全书由牛志宏统稿。

长江空间信息技术工程有限公司教授级高级工程师张潇审阅了本教材，并提出了宝贵的修改意见，在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限，热忱希望广大读者对本书中的缺点和错误给予批评指正。

编　者

第 1 版前言

本书是根据教育部《关于加强高职高专教育人才培养工作意见》的文件精神和《全国高职高专工程测量技术专业规划教材》的要求，组织相关院校测绘专业教师多次认真研讨，总结多年教学经验的基础上编写而成的。在本书的编写过程中，根据高职高专工程测量技术专业学生的实际情况和测量平差课程的特点，尽量避开测量平差理论的繁琐推导和深入分析，循序渐进地介绍了工程测量实际中常用的测量平差原理，并运用大量实例详细、具体地说明了工程测量实际工作中测量数据处理的基本方法，通俗易懂、简明实用，力求达到易学易用的目的。本书非常适合于希望避开深入的理论学习而直接解决具体工程测量问题的技术人员参考。

本书由牛志宏任主编，王金玲、王勇智、陈帅、袁江红、杨晓平任副主编。参加本书编写的人员有：牛志宏（前言、第 1 章、第 3 章、第 5 章第 4、5 节）、王金玲（第 2 章）、王勇智（第 9 章）、陈帅（第 5 章第 1～3 节）、袁江红（第 4 章）、文学（第 6 章、第 7 章）、李丽（第 8 章）、杨晓平（第 10 章）。

由于编者水平有限，热忱希望广大读者对本书中的缺点和错误给予批评指正。

编　者

目　　录

第 1 章 测量误差基本知识

1.1 测量误差

1.1.1 观测误差的概念

在测量工作中，我们经常需要测量两点之间的距离、高差等观测量，这些观测量客观上总是存在一个能反映其真正大小的数值，这个数值称为观测量的真值或理论值。但在测量这些观测量的过程中，同一个量的各观测值之间，或各观测值与理论值之间总会存在着差异，这就是观测误差。若用 L 表示观测值，$\tilde{L}$ 表示真值，则观测误差 Δ 为：$\Delta=L-\tilde{L}$。

1.1.2 观测误差的来源

观测误差产生的原因是多种多样的，但任何观测值的获取都包含观测者、所用仪器和外界环境三种要素的影响，所以观测误差产生的原因可归结为以下三个方面。

1. 仪器误差

仪器误差可分为两个方面：一是仪器本身固有的误差，例如，用只有厘米分划的水准尺进行水准测量时，就很难保证在厘米以下的读数准确无误；二是仪器检校时的残余误差，例如水准仪的视准轴不平行于水准管轴而产生的 i 角误差等。

2. 观测者误差

由于观测者感官的鉴别能力有一定的局限性，所以在仪器的安置、照准、读数等方面都会产生误差。同时，观测者的工作态度和技术水平也对观测成果质量有直接影响。随着自动化测量仪器的快速发展，此项误差的影响正在减弱或部分消逝。

3. 外界环境影响误差

观测时所处的外界环境条件，如温度、湿度、风力、大气折光等因素都会对观测结果直接产生影响；同时，随着温度的高低、湿度的大小、风力的强弱以及大气折光的不同，它们对观测结果的影响也随之不同，因而在这样的客观环境下进行观测，就必然使观测的结果产生误差。

测量仪器、观测者和外界环境三方面的因素是引起误差的主要来源，我们把这三方面的因素综合起来称为观测条件。因此，观测条件的好坏与观测成果的质量有着密切的联系。当观测条件好时，观测中产生的误差平均就可能相对小些，因而观测质量就会高些。反之，观测条件差时，观测成果的质量就会低些。如果观测条件相同，观测成果的质量也可以说是相同的。所以说，观测条件的好坏决定了观测成果质量的高低。但是，不管观测条件如何，在整个观测过程中，观测结果总会受到上述因素的影响，从这个意义上来说，测量工作中的观测误差是不可避免的。

1.1.3 观测误差的分类

根据观测误差对观测结果的影响性质，可将观测误差分为系统误差和偶然误差两种。

1. 系统误差

在相同的观测条件下进行一系列观测，如果误差在大小、符号上表现出系统性，或者在观测过程中按一定的规律变化，或者为一常数，那么，这种误差就称为系统误差。例如，水准尺的刻划不准确、水准仪的视准轴误差、温度对钢尺量距的误差、尺长误差等均属于系统误差。

系统误差具有累计性，对成果的影响较大，应当设法消除或减弱它的影响。采用的方法一般有两种：一是在观测的过程中采取一定的观测方法削弱；二是在观测结果中加入改正数。其目的就是消除或减弱系统误差的影响，使其达到忽略不计的程度。

2. 偶然误差

在相同的观测条件下进行的一系列观测，如果误差在大小和符号上都表现出随机性，即从单个值来看，其大小和符号没有规律性，但就大量误差的总体而言，具有一定的统计规律，这种误差称为偶然误差。例如，观测时的照准误差，读数时的估读误差等，都属于偶然误差。

如果各个误差项对其总和的影响都是均匀小，即其中没有一项比其他项的影响占绝对优势时，那么它们的总和将是服从或近似地服从正态分布的随机变量。因此，偶然误差就其总体而言，都具有一定的统计规律，所以，有时又把偶然误差称为随机误差。

1.2 测量误差的处理

1.2.1 系统误差的处理

系统误差对于观测结果的影响一般具有累积的作用，它对成果质量的影响也特别显著。因此，在实际工作中，应采取相应方法来消除和减少系统误差对观测成果的影响。

消除和减少系统误差的方法一般有以下三种：

（1）通过检校测量仪器，把由于仪器误差引起的系统误差降低到最小程度。例如，每次水准测量前都要进行 i 角检验，对 i 角误差超限的仪器，应校正后才能用于观测。

（2）在观测方法和观测程序上采用必要的措施，限制或削弱系统误差的影响。这是消除系统误差的主要方法。例如，观测水平角时，采用盘左、盘右观测并应在每个测回起始方向上改变度盘的配置等；采用方向观测法测角时，为了检查水平度盘在观测过程中是否发生变动，应计算归零误差。水准测量中，应保证前后视距尽量相等，以减弱 i 角影响。对于整条水准线路来说，应进行往返观测，并取往测高差与返测高差的中数作为一条线路最后的观测高差，可以使得在观测过程中由仪器与标尺下沉所引起的观测高差大部分得到消除等。

（3）根据系统误差的表现规律，对观测值进行系统误差的改正。

如在钢尺量距中，某钢尺的注记长度为 30m，经鉴定后，它的实际长度为 30.016m，即每量一整尺，就比实际长度少 0.016m，也就是每量一整尺段就有 +0.016m 的系统误差。这种误差的数值和符号是固定的，误差的大小与距离成正比，若丈量了 5 个整尺段，则长度误差为

$$5 \times (+0.016)\text{m} = +0.080\text{m}$$

若用此钢尺丈量的结果为 167.213m，则实际长度为

$$167.213\text{m} + \frac{167.213}{30} \times (+0.016)\text{m} = 167.213\text{m} + 0.089\text{m} = 167.302\text{m}$$

因此，钢尺量距时，要计算尺长改正数，并对丈量结果进行改正，从而消除系统误差。

需要注意的是，由于系统误差总是使测量结果偏向一边，或者偏大，或者偏小，因此，多次测量求平均值并不能消除系统误差。

1.2.2 偶然误差的处理

由于偶然误差是一种随机变量，在测量工作过程中总是存在的，我们无法完全消除它，但测量工作中的偶然误差在总体上是服从或近似服从正态分布的随机变量，所以我们可以应用数理统计规律处理偶然误差，获得观测量的最或是值。偶然误差的处理正是测量平差的主要任务和工作内容。

1.2.3 粗差的处理

粗差是一种大量级的观测误差，在测量成果中是不允许粗差存在的。在观测数据中应设法避免出现粗差，处理粗差的办法主要有以下两种：

(1) 采用 3σ 准则。统计理论表明，测量值的偏差超过 3σ 的概率已小于 99.7%。因此，可以认为偏差超过 3σ 的测量值是由其他因素或过失造成的，为异常数据，应当剔除。

(2) 进行必要的重复观测和多余观测，通过必要而又严格的检核、验算等方式均可发现相差。国家测绘机构制定的各类测量规范和细则，也能起到防止粗差出现和发现粗差的作用。

含有粗差的观测值都不能采用。因此，一旦发现粗差，该观测值必须舍弃或重测。尽管观测过程十分小心，粗差有时也在所难免。因此，如何在大量的观测数据中发现和剔除粗差，或在数据处理中削弱含粗差的观测值对平差成果的影响，是测绘界十分关注的课题之一。

1.3 测量平差的主要任务

由于观测结果不可避免地存在着偶然误差的影响，因此，在实际工作中，为了提高测量成果的质量，同时也为了检查和及时发现观测值中有无粗差存在，通常要进行多余观测。例如，对一条导线边，丈量一次就可得出其长度，但实际上总要丈量两次或两次以上；一个平面三角形，只需要观测其中的两个内角，即可决定它的形状，但通常是观测三个内角。由于观测结果中不可避免地存在着偶然误差，多余观测必然会在观测结果之间产生不一致或不符合各个量之间应有的数学关系。因此，必须对这些带有偶然误差的观测值进行处理，消除各个量之间的不符值，获得观测量的最可靠的结果。对这些带有偶然误差的观测值进行处理的过程就是测量平差的一个主要任务。

测量平差的另一个任务就是评定观测值以及最可靠结果的精度，也就是考核测量成果的质量。

概括说来，测量平差的任务就是：

(1) 对一系列带有观测误差的观测值，运用概率统计的方法来消除它们之间的不符值，求出未知量的最可靠值。

(2) 评定测量成果的精度。

第 2 章　测量误差理论及其应用

2.1　偶然误差的统计特性

2.1.1　偶然误差是随机变量

观测误差包括系统误差和偶然误差两种。系统误差一般具有累积特性，所以，在实际工作中都采用各种方法来消除或使其处于次要地位。这样，观测误差仅余偶然误差，测量平差的基本任务就是处理一系列带有偶然误差的观测值，求出未知量的最可靠值，并评定测量成果的精度。

由于偶然误差是一种随机变量，就单个来讲其符号没有规律，即呈现出一种偶然性（或随机性），但就总体而言，却呈现出一定的统计规律性，而且它是服从正态分布的随机变量。人们从无数的测量实践中发现，在相同的观测条件下，大量偶然误差的分布也确实呈现了一定的统计规律性。

2.1.2　偶然误差的特性

由前所述，单个偶然误差在数值、大小、符号上均为偶然的、随机的、无规律的，是一种随机变量，但对于大量的偶然误差来讲，却有一定的统计规律性。

下面我们以三角形内角和的真误差为例来讨论偶然误差的统计规律性。

1. 真误差

任何一个观测量，客观上总存在着一个能代表其真正大小的数值，这个数值称为真值，以 $\widetilde{L}$ 表示。观测值 L 与真值 $\widetilde{L}$ 之间的差值 $\Delta=L-\widetilde{L}=L-E(L)$，称为真误差。

2. 三角形内角和真误差分布统计分析

(1) 误差分布表。三角形内角和真误差为：

$$\Delta_i = (L_1 + L_2 + L_3)_i - 180^\circ \quad (i = 1,2,3,\cdots,358) \tag{2-1}$$

假设观测值中仅含有偶然误差。

以区间 $d\Delta=0.2''$将真误差 $\Delta_i(i=1，2，3，\cdots，358)$ 按其绝对值大小排列。统计出误差落入各个误差区间的个数 v_i，计算出其频率 $f_i=\dfrac{v_i}{n}$，n 为总数，v_i 为落入 i 区间的误差个数。

统计结果见表 2-1。

从表中不难看出：

1) 绝对值最大的误差的绝对值不超过 $1.60''$。

2) 绝对值小的误差比绝对值大的误差多。

3) 绝对值相等的正负闭合差出现的个数大致相等。

表 2-1

误差的区间/(″)	Δ为负值			Δ为正值			备注
	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	
0.00～0.20	45	0.126	0.630	46	0.128	0.640	$d\Delta=0.20''$ 等于区间左端值的误差算入该区间内
0.20～0.40	40	0.112	0.560	41	0.115	0.575	
0.40～0.60	33	0.092	0.460	33	0.092	0.460	
0.60～0.80	23	0.064	0.320	21	0.059	0.295	
0.80～1.00	17	0.047	0.235	16	0.045	0.225	
1.00～1.20	13	0.036	0.180	13	0.036	0.180	
1.20～1.40	6	0.017	0.085	5	0.014	0.070	
1.40～1.60	4	0.011	0.055	2	0.006	0.030	
1.60 以上	0	0	0	0	0	0	
和	181	0.505		177	0.495		

（2）误差直方图。从表 2-1 中可以表达出其误差分布的情况。还可以采用直方图来表示，如图 2-1 所示。

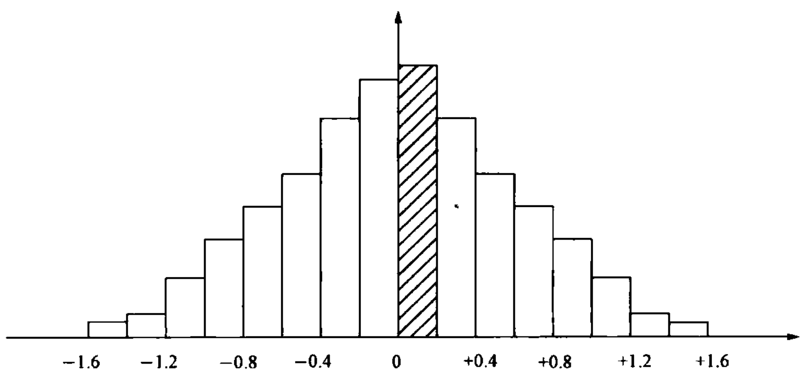


图 2-1

绘制直方图时，横坐标取误差 Δ，纵坐标 y 取$\frac{v_i/n}{d\Delta}$，即 v_i/n 除以区间间隔值 dΔ，在统计学中常将其称为频率直方图，它形象地反映了该组闭合差的误差分布情况。

对于每一个长方形的面积来讲，就是：$\frac{v_i/n}{d\Delta}\cdot d\Delta=v_i/n=f_i$，即误差出现在该区间的频率。

从直方图上我们同样可以发现：

1）正负误差出现的个数大致相等。

2）小误差出现的频率高。

3）闭合差最大不超过 1.6″。

（3）误差分布曲线。在同一观测条件下，随着观测个数的无限增多，即 $n\rightarrow\infty$时，误差

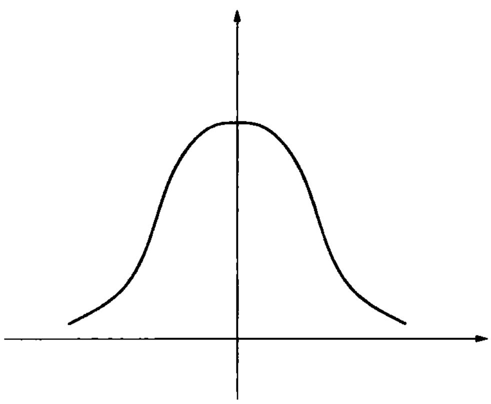


图 2-2

出现在各区间的频率就趋于一个确定的数值，这就是误差出现在各区间的概率。也就是说，一定的观测条件对应一种确定的误差分布，若 $n \to \infty$，$d\Delta \to 0$ 时，图 2-1 中各长方条顶边所形成的折线将变成一条光滑曲线。该曲线就是误差概率分布曲线，或称为误差分布曲线（图 2-2）。

由此可见，偶然误差的频率分布随着 n 的逐渐增大，都是以正态分布为其极限的。偶然误差的频率分布为其经验分布，而将正态分布称为它们的理论分布。

可以证明，若 Δ 仅含有偶然误差，其分布为正态分布，其分布函数为：

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \tag{2-2}$$

式中 σ——标准差，在测量上称为中误差。

3. 偶然误差统计特性

通过以上分析可以看出，偶然误差的几个特征：

（1）在一定的观测条件下，误差的绝对值有一定的限值。

（2）绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率大。

（3）绝对值相等的正负误差出现的概率相同。

（4）偶然误差的数学期望为零，即 $E(\Delta)=0$。

2.1.3 偶然误差的统计意义

当观测值中仅含有偶然误差时，由统计学知：$E(L)=\tilde{L}$。

因为
$$\Delta = L - \tilde{L}$$

从而
$$E(\Delta) = E(L - \tilde{L}) = 0$$
$$D(\Delta) = D(L - \tilde{L}) = D(L) \tag{2-3}$$

注：若观测误差中系统误差，即 $\Delta_{总} = \Delta_{系} + \Delta_{偶}$ （2-4）

则
$$E(\Delta_{总}) = \Delta_{系} \neq 0$$
$$\tilde{L} = E(L) + \Delta_{系} \tag{2-5}$$

可见，当观测值 L 中含有系统误差 $\Delta_{系}$ 时，系统误差就是观测值 L 的数学期望对于真值的偏差值。

2.1.4 由偶然误差特性引出的两个测量依据

1. 制定测量限差的依据

由偶然误差的有界性可知：在一定的观测条件下，若仅有偶然误差的影响，误差的绝对值必定会小于一定的限值。在实际工作中，就可依据观测条件确定一个误差限值，若观测值的误差绝对值小于该限值，认为观测值合乎要求，否则，应剔除或重测。

2. 判断系统误差（粗差）的依据

由偶然误差的对称性和偶然性可知：误差的理论平均值为零，即观测值的期望值为其真

值，观测值中不含有系统误差和粗差；若误差的理论平均值不为零，且数值较大，说明观测成果中含有系统误差和粗差。

2.2　精度指标及应用

2.2.1　精度、准确度、精确度

精度：是指误差值分布的密集或离散程度，也就是离散度的大小，它反映了观测结果与中数（估计值）的接近程度。

从图 2-1 中可以看出，若误差分布较为密集，其图形在纵轴附近的顶峰则较高，且由长方形所构成的阶梯比较陡峭；若误差分布较为分散，其图形在纵轴附近的顶峰则较低，且其阶梯较为平缓。这个性质同样反映在图 2-2 的误差分布曲线的形态上，即存在误差概率分布曲线较高而陡峭和误差概率分布曲线较低而平缓两种情形。

不难理解，误差分布密集，即离散度较小，则表示该组观测值的大小非常接近，也就是说，该组观测精度高，质量较好；反之，如果分布较为离散，即离散度较大，则表示该组观测质量较差，观测精度较低。综上所述，精度是指在一定观测条件下，误差分布的密集或离散的程度。

在相同的观测条件下所进行的一组观测，称为同精度或等精度观测，由于它是对应着同一种误差分布，因此对于这一组中的每一个观测值精度相同。例如，表 2-1 中所列有的甚至相差很大（例如有的出现于 0.0″～0.5″区间，有的出现于 3.0″～3.5″区间）。由于它们所对应的误差分布相同，真误差彼此间的差异仅是偶然误差性质的结果。因此，这些结果彼此是同精度观测值。

准确度：是指随机变量 X 的真值 X 与其数学期望 $E(X)$ 之差，即 $E(X)$ 的真误差，这是存在系统误差的情况。因此准确度表征了观测结果系统误差大小的程度，是衡量系统误差大小程度的指标。准确度高，则随机变量 X 的数学期望偏离真值较小，测量的系统误差小，但数据较分散，偶然误差的大小不确定。

精确度：是精度和准确度的合成，是指观测结果与其真值的接近程度，包括观测结果与其数学期望接近程度和数学期望与真值的偏差。精确度反映了偶然误差和系统误差联合影响大小的程度，是一个全面衡量观测质量的指标。精确度高，则测量数据比较集中在真值附近，测量的偶然误差及系统误差都比较小，当观测值仅含偶然误差时，精确度就是精度。

2.2.2　衡量精度的指标

在测量工作中，我们需要衡量观测值的精确度，即精度和准确度。准确度是与系统误差有关的概念，精度是与偶然误差有关的概念。观测值中的系统误差可以通过改正减少或消除。当观测值中的系统误差相对于偶然误差很小或忽略不计时，即认为仅含偶然误差时，观测值的精确度就是精度，即表示偶然误差的大小，因此，可以将精度作为衡量观测质量的指标。

前已提及，精度是一组误差分布密集或离散的程度。分布越密集，则表示在该组误差中，绝对值较小的误差所占的相对个数越大。在这种情况下，该组误差绝对值的平均值就一定小。由此可见，精度虽然不是代表个别误差的大小，但是，它与这一组误差绝对值的平均大小显然有着直接关系。因此，用一组误差的平均大小作为衡量精度高低的指标，是完全合理的。为此，我们用具体的数字来反映误差分布的离散或离散的程度，即反映其离散度的大小，将其称为衡量精度的指标。

1. 方差和中误差

偶然误差 Δ 服从正态分布，其密度函数为

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \tag{2-6}$$

式中 σ^2——误差分布的方差。

由方差定义可知

$$\sigma^2=D(\Delta)=E(\Delta^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta^2 f(\Delta)\mathrm{d}\Delta$$

即

$$\sigma^2=D(\Delta)=E(\Delta^2)=\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta\Delta]}{n} \tag{2-7}$$

方差的算术平方根称为中误差，用 σ 表示，测量中常用 m 表示中误差，即

$$\sigma=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{2-8}$$

上述方差及中误差都是在理想的情况下定义的，但在实际工作中，观测次数总是有限的，只能得到方差和中误差的估计值，即

方差
$$\hat{\sigma}^2=\frac{[\Delta\Delta]}{n} \tag{2-9}$$

中误差
$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{2-10}$$

【例 2 - 1】 某测区同精度观测 10 个三角形内角和的真误差如下，试求三角形内角和的中误差。

$-5.2''$，　$+3.1''$，　$0.0''$，　$-0.2''$，　$+1.1''$

$-1.7''$，　$+0.1''$，$+1.2''$，　$-0.6''$，　$+2.2''$

解 将三角形内角和真误差代入式(2 - 10）中，得到三角形内角和中误差

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$$

$$=\sqrt{\frac{(-5.2)^2+(+3.1)^2+(0.0)^2+(-0.2)^2+(+1.1)^2+(-1.7)^2+(+0.1)^2+(+1.2)^2+(-0.6)^2+(+2.2)^2}{10}}=2.18''$$

由于未知量的真值往往不知道，所以真误差也不知道，只能求出观测量的最或然值，且观测个数总也是有限的。

对于等精度的一组观测值，可以用残差计算该组观测值的中误差：

$$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \tag{2-11}$$

上式就是白塞尔公式，它满足统计上的无偏性。

【例 2 - 2】 某距离等精度丈量 6 次，结果如下，试求该距离的最或是值及观测值中误差。

$L_1=546.535\text{m}$　　$L_2=546.548\text{m}$　　$L_3=546.520\text{m}$

$L_4=546.546\text{m}$　　$L_5=546.550\text{m}$　　$L_6=546.537\text{m}$

解 该距离的最或是值

$$\tilde{L}=\frac{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5+L_6}{6}$$

$$=\frac{546.535+546.548+546.520+546.546+546.550+546.537}{6}\text{m}=546.539\text{m}$$

$$v_1=L_1-\widetilde{L}=546.535-546.539=-0.004$$
$$v_2=L_2-\widetilde{L}=546.548-546.539=+0.009$$
$$v_3=L_3-\widetilde{L}=546.520-546.539=-0.019$$
$$v_4=L_4-\widetilde{L}=546.546-546.539=+0.007$$
$$v_5=L_5-\widetilde{L}=546.550-546.539=+0.011$$
$$v_6=L_6-\widetilde{L}=546.537-546.539=-0.002$$

观测值的中误差为

$$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{v_1^2+v_2^2+v_3^2+v_4^2+v_5^2+v_6^2}{n-1}}=\pm 0.011\text{m}$$

2. 极限误差

前已述及，观测成果中不能含有粗差。那么，如何来判定观测误差中的粗差呢？必须要有一个判定标准，超过这个标准的误差就列入粗差，相应的观测值应予剔除或返工重测，这个标准就是极限误差，所谓极限误差就是最大误差。由偶然误差的特性可知，在一定条件下，偶然误差不会超过一个界值，这个界值就是所说的极限误差，但这个界值很难确定，一般规定极限误差的根据是误差出现在某一范围内的概率的大小，即误差 Δ 出现在（$-k\sigma$，$+k\sigma$）内的概率。

根据观测误差 $\Delta\sim N(0,\sigma^2)$，将其标准化后 $\Delta\sim N(0,1)$，查表可知误差 Δ 落在（$-\sigma$，$+\sigma$），（-2σ，2σ），（-3σ，3σ）内的概率分别为：

$$p(-\sigma<\Delta<+\sigma)\approx 0.683=68.3\%$$
$$p(-2\sigma<\Delta<+2\sigma)\approx 0.955=95.5\%$$
$$p(-3\sigma<\Delta<+3\sigma)\approx 0.997=99.7\%$$

可见，误差 Δ 大于三倍标准差的概率仅为 0.3%，可以认为它是一个不可能事件，所以，常以三倍中误差作为偶然误差的极限值

$$\Delta_{\text{限}}=3\sigma \tag{2-12}$$

若对观测要求较严，也可规定两倍中误差为极限误差，即

$$\Delta_{\text{限}}=2\sigma \tag{2-13}$$

3. 相对误差

对于某些观测结果，有时单靠中误差还不能完全表达观测结果的好坏，所以有时常用到相对中误差，定义为：中误差与观测值之比。常表示为 $1/N$ 的形式，即

$$k=m_s/s=1/N \tag{2-14}$$

在实际中，常用于表示边长或距离误差、闭合环误差等。

【例 2-3】 观测了两段距离，分别为 1000m±2cm 和 500m±2cm。问：这两段距离的真误差是否相等？中误差是否相等？它们的相对精度是否相同？

解 这两段距离的真误差不相等。这两段距离的中误差相等，均为±2cm。它们的相对精度不相同，前一段距离的相对中误差为 1/50 000，后一段距离的相对中误差为 1/25 000。

2.2.3 观测向量的精度

1. 观测向量

若观测量有 L_1，L_2，…，L_n 个，可将它们表示成一个向量 $\boldsymbol{L}=(L_1,L_2,\cdots,L_n)^{\mathrm{T}}$，