直觀几何

下册

D. 希尔伯特
S. 康福森 著

王联芳 譯

高等教育出版社

直　观　几　何

下　册

D. 希尔伯特
S. 康福森　著
王联芳　譯

高等教育出版社

希尔伯特和康福森合著的“直观几何”(D. Hilbert u. S. Cohn-Vossen, “Anschauliche Geometrie”, 德国 Verlag von Julius Springer 1932 年出版)是一本著名的著作,书中用直观方法深入浅出地介绍了几何中丰富的知识。可供具有大学一二年级数学程度的读者阅读。

全书共六章:最简单的曲线和曲面,正则点系,构形,微分几何,运动学,拓扑学。中译本分上下两册出版,每册包括三章。

译文大体上是根据英译本“Geometry and the Imagination”(P. Nemenyi 译,美国 Chelsea Publishing Company 1952 年出版),也参考了德文原本和俄译本“Наглядная геометрия”,第二版(С. А. Каменецкий 译,苏联 Государственное издательство технико-теоретической литературы 1951 年出版)。

直观几何

下册

D. 希尔伯特 S. 康福森著

王联芳译

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
河北省〇五印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 5.375 字数 126,000
1964年 9月第1版 1984年7月第2次印刷
印数 6,501—24,100

书号 13010·0962 定价 0.83元

第四章　微分几何

直到现在为止，我們都在研究几何图形的整体构造。微分几何学則提供了根本不同的一种研究方法。說得明确些，我們开始将只研究曲綫或曲面在它任一点紧密邻近的情况。为了这个目的，我們把一点的邻域，同一个最簡单的图形，例如直綫、平面、圓或球，来进行比較，而这个图形在所考虑的邻域內是最接近所給于曲綫的。例如用这种方法我們就得到众所周知的曲綫在一点的切綫的概念。

这种所謂局部的微分几何学，或小范圍的微分几何学的研究方法，为另一种重要观点——大范圍的微分几何学所补充。这就是說，对于一連續几何图形，如果已知它在每一点的邻域內都具有某一确定的微分几何学的性质，那么經常可以推断关于图形整体結构的一些重要事实。例如对于一平面曲綫，若已知曲綫上沒有一点的邻域完全在这点的切綫的同側，那么可以证明，这曲綫必然是直綫。

微分几何学除了討論由点組成的連續流形以外，还討論由其他元素，例如由直綫組成的流形；在研究連續光綫系統的几何光学中，就提出这一类的問題。

最后，微分几何学引导到高斯和黎曼首先提出的一个問題，就是由只与各点的邻域有关的概念和公理建立起整套的几何学来。于是产生了直到今天还沒有发掘淨尽的多种多样更一般的几何学，而所謂“非欧几何学”，只是其中一个重要的特殊例子而已。广义相对論告訴我們，要眞实地描写物理世界絕不能依照通常的欧氏几何学，而必須依照更一般的黎曼几何学。

按照动点沿指定方向通过原点后，来到第二、第三、第四象限或回到第一象限，而分为四种情况(图183的I—IV)。只有在第一种情况下我們所討論的点才叫做正則点，在其余三种情况下都叫做奇点。实际上曲綫上几乎所有的点都是正則的，只有在个別的地方才出現奇点①。在第二种情况下我們說曲綫有拐点，在第三、第四种情况下分别說曲綫有戟尖点和鳥嘴尖点②。可以证明，这种分类法与所取点的移动方向无关。

現在我們要作一图形，表示曲綫当通过这四种类型的点时切綫方向改变的情况。为此我們采用高斯首創的一种方法，这方法对于曲面的研究特别重要。同以前一样，在曲綫上选好一个行进方向。在曲綫的平面上另作一单位圓。我們把曲綫上的每一条切綫用和它平行的半徑表示，半徑从圓心出发的方向与曲綫在所討論的点的方向一致（图184）。用这种作图法，对应于曲綫上每一点P就决定了圓周上一点Q，此即半徑与圓周的交点。在这种表示法之下，圓上的点称为曲綫的“切綫象”或“切綫标形”或“高斯象”。因为圓的半徑总是垂直于对应的圓的切綫，所以曲綫的切綫总平行于切綫象上对应的法綫，而切綫象上的切綫总平行于曲綫上对应的法綫。

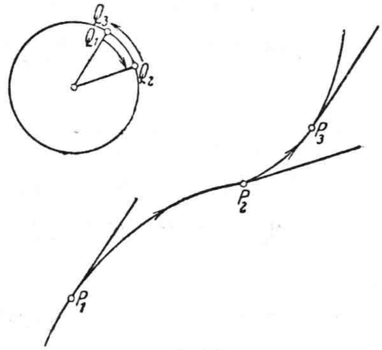


图 184

① 这句話仅对于直綫不成立。在直綫的情况，上述方法完全不适用。又若从更高的观点来看，則在第一种情况下也可出現奇点，即当在該点的曲率圓退化成直綫或点的时候(参看第181頁)。

② 这里讲的戟尖点和鳥嘴尖点通常称为第一类尖点和第二类尖点。——中譯者注。

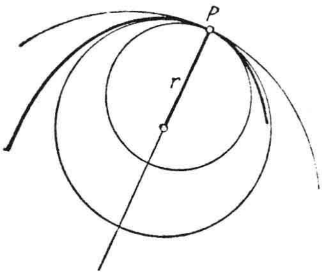


图 186

的那些圓里面，有一些圓在P的近旁完全位于曲綫的一側，其余的一些圓则完全位于另一側。曲率半徑为r的曲率圓一般地有下列性质：它把两組圓分开，使得在P的邻近所有半徑大于r的諸圓居于曲綫的一側，所有半徑小于r的諸圓居于曲綫的另一側。曲率圓本身通常分开落在法綫的两側，又在曲綫的两側；换句話說，曲率圓在切点处穿过曲綫。如同曲綫的奇点一样，曲率圓不穿过曲綫的点只能在曲綫的个别地方出現，除非曲綫本身就是圓。橢圓的四个頂点可以作为这种点的例子(图 187)。从对称性上来看显然曲率圓不能在这些点处穿过曲綫。一般来讲，在曲綫与对称軸的各交点处，也有同样情形。

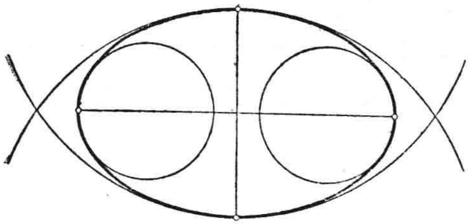


图 187

曲率圓通常穿过曲綫这件事实，从曲率圓的第一种作法中也是容易理解的。一个經过曲綫上一点的圓一般地要在这点处穿过曲綫。因此当一圓通过曲綫上的邻近的三个点时，在第一点从A側穿到B側，在第二点从B側穿回到A側，第三点又从A側穿到B側；若三点趋近以至重合，則圓的这种情况一般地在过程中不会改变，因而可以看到曲率圓在切点处确实从曲綫的一側穿到另一側①。

前面曾經提过，曲綫的曲率和切綫象之間有某种关系存在。

① 根据类似的理由，切綫通常不在它的切点处穿过曲綫。

曲綫。

再有，可用好多种方法从一曲綫誘导出另一曲綫。例如，一給定曲綫的所有曲率中心，构成一新的曲綫，叫做給定曲綫的漸屈綫。反过来，第一条曲綫叫做第二条曲綫的漸伸綫。一曲綫的漸伸綫永远可用绳綫作出，其法如下：把一段绳綫紧紧貼附在曲綫上，并固定其一端点，然后把绳綫逐漸拉开，拉开时要始終保持绳綫是拉得紧紧的，如此則自由端点就描出一段漸伸綫。圓的漸伸綫我們已經用这种办法作出来了（参考第 6 頁）。至于漸屈綫和漸伸綫之間的这种特殊关系的原理，将在下一章闡明（§ 41，第 275—276 頁）。

§ 27. 空間曲綫

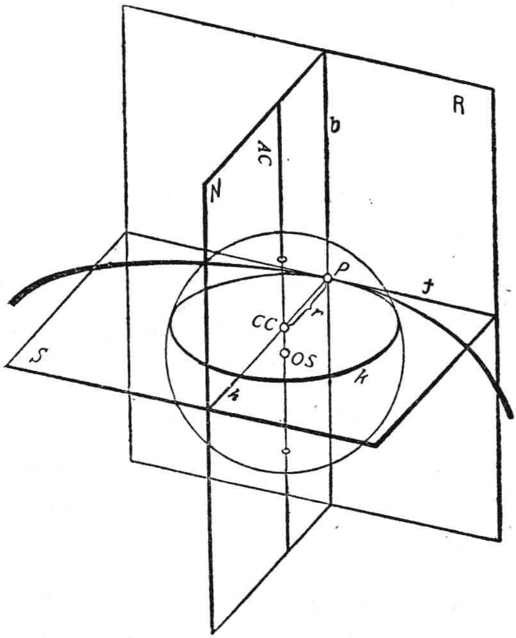
上一节的大部分討論均可适用于空間曲綫（有时也叫撓曲綫）。

首先，空間曲綫的切綫仍然是当一交点趋近以至重合于另一交点时割綫的极限位置。但是空間曲綫跟平面曲綫在这方面有所不同：空間曲綫的切綫在切点处有无数垂綫，这些垂綫填滿一平面，它叫做曲綫在該点的法面。

現在我們要找出在所考慮的点的邻近与曲綫最逼近的平面。为了这个目的，我們通过在已知点的切綫和曲綫上一邻点作一平面，并让第二点沿曲綫趋近于那个固定的切点。在这个过程中平面趋近于一极限位置。这极限平面就是我們所要求的平面；它叫做曲綫在已知点的密切面。按照前面的說法，我們說密切面与曲綫有三个重合的交点。由于这个原故，曲綫在切点处一般地要穿过密切面，虽然它位于包含切綫的任何其他平面的同一側。

因为密切面包含切綫，所以密切面垂直于法面。最后，我們考慮通过曲綫上已知点的既垂直于法面又垂直于密切面的平面。这

个平面叫做从切(直化)面。



P	所考虑的点	s	密切面	N	法面
R	从切面	t	切綫	h	主法綫
b	副法綫	k	曲率圓	r	曲率半徑
AC	曲率軸	CC	曲率中心	OS	密切球面的中心

图 189

剛才所說的三个平面可以作为空間笛卡儿坐标系的三个坐标面。这样的坐标系用来描写曲綫在所考虑的点处的性态甚为方便。在这样的坐标系中，一根坐标軸是切綫；其他两根軸，因为一定都在法面上，分别叫做主法綫和副法綫。主法綫在密切面上，副法綫在从切面上（图 189）。这种坐标系，由于它依賴于曲綫上的点，叫做曲綫的动标三面(棱)形。动标三面形与平面曲綫中由切綫和法綫做成的坐标系相类似。在空間中，一个坐标系定出八个

称为卦限的区域，这是跟平面上只有四个象限不同的地方。这样动标三面形可用来区别空間曲綫上八种不同类型的点，正与在第178 頁上讲过的将平面曲綫上的点分成四种类型的作法相彷彿。同平面曲綫一样，空間曲綫上的点也只有一种类型是正則的，其余的情况只能在个别的地方才会出現（假定我們的曲綫眞正是空間曲綫而不是完全在一平面上）。在正則点处，曲綫穿过密切面和法面并且位于从切面的同旁。其他的情况我們不再討論。此外，附带一提，对于空間曲綫，也和平面曲綫一样，即使解析結构很簡单，仍可能出現另外三种类型的奇点，即二重点、端点和孤立点。

現在我們把平面曲綫的高斯表示法推广到空間曲綫上去。为了这个目的，我們作一个单位半徑的球面。对应于曲綫（假定曲綫已定向，即有一定的行进方向）上的每一切綫作球面的一个半徑，使半徑平行于切綫，并和切綫取同一指向。球面上半徑的端点叫做曲綫上各对应点的切綫象。用这种方法能把整个曲綫表現为球面上的曲綫。若以主法綫和副法綫来代替切綫，則在单位球面上可得另外两条曲綫。分别相对于它們各自的动标三面形来看，这三种“球面象”之間，以及三种球面象与原曲綫之間，存在着某些簡单的关系。例如，切綫象和副法綫象一起能够刻划曲綫的上述八种类型的点。这是說，原曲綫上的点、切綫象上的点、副法綫象上的点可各在自己的路綫上继續前进或者变成后退，而所有可能情况的組合，就恰恰給出八种类型的点。

下面我們把曲率的概念推广到空間曲綫上去。設 t_1，t_2 分别为曲綫在二邻点 P_1 和 P_2 的切綫。考虑当 P_2 趋近于 P_1 时商 $\dfrac{\angle(t_1t_2)}{P_1P_2}$。这个商一般趋于一极限值，它叫做曲綫在 P_1 点的曲率（或第一曲率）。我們已經知道，平面曲綫的曲率与二法綫交点的极限位置之間存在着怎样的关系。对于空間曲綫，类似的論证导出的不是一

个点，而是一条直綫——相邻二法面交綫的极限位置。这条直綫叫做曲綫在所考虑点上的**极軸**(也叫**曲率軸**)。极軸在法面上，而且从极限过程可以知道，极軸平行于副法綫(参看图 189)。极軸和主法綫的交点叫做(第一)曲率中心。曲率中心与曲綫上对应点的距离 r 叫做(第一)曲率半徑。同平面上的情形一样，r 是曲率的倒数。通过曲綫上相邻三点的圓，当三点趋近以至重合时趋近一极限位置。这个极限圓在密切面上，其圓心和半徑即是曲率中心和曲率半徑。

空間高斯切綫象与曲率的关系同平面上的一样：曲率半徑是曲綫的一小段弧长与其切綫象上对应弧长之比的极限。证明与平面上的相仿。

我們把二切綫間的夹角换成二密切面間的夹角，也就是换成二副法綫間的夹角。这样又导出了空間曲綫理論的另一个特别重要的概念：我們把二副法綫間的夹角除以曲綫上对应两点的距离，然后让两点趋近以至重合。这个商的极限值 t 叫做曲綫在已知点的**撓率**，有时也叫做**第二曲率**。撓率的倒数显然是曲綫上的一小段弧长与其副法綫象上对应弧长之比的极限。

我們应用包含曲綫上的三个邻近点的极限过程，已經能够得出第一曲率。要得到第二曲率的类似解釋，必須从四个点着手。四个点通常决定一个球面。現在我們可以考虑通过曲綫上四个邻近点的球面，当四点趋近以至重合时的极限。取得极限位置的球面叫做**密切球面**。由极限过程知道，曲綫的切綫在切点处也与密切球面相切，而且密切球面的球心位于极軸上(参看图 189)。至于从密切球面的球心到曲率中心的距离，經过計算得知为$\frac{1}{t}\cdot\frac{dr}{ds}$，这里的 ds 和 dr 分别是弧长和曲率半徑的微分。其次，由作法上可以推出，密切球面和密切面的交綫就是曲率圓。应用毕达哥拉

斯定理我們便得到密切球的半徑为

$$\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\cdot\frac{1}{t^2}}.$$

正象平面上二量 s 和 r 的情形一样，空間的 s, r, t 叫做空間曲綫的自然参数或禀性参数。与平面上情形相仿，这里有一个重要的定理：我們永远能够找出一种，而且只是一种形状的空間曲綫，使得在这条曲綫上 r 和 t 是 s 的已知函数。如果$\frac{1}{r}$恒等于零，得到直綫。平面曲綫的特征乃是 t 恒等于零。如果 r 和 t 是常数但不是零，则得到圓柱螺旋綫。

在球面上的曲綫要用比較稍微复杂的条件来刻划。显然曲綫所在的球面必与曲綫上所有点的密切球面相重合。因此上面計算出来的密切球面的半徑必然等于常数：

$$r^2+\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\cdot\frac{1}{t^2}=\text{常数}.$$

用解析方法可以证明这个条件也是充分的。

至于其他有关空間曲綫的問題，留待后面讲曲面論时再行討論。

§28. 曲面的曲率。橢圓点、双曲点、抛物点。曲率綫和漸近綫；臍点，极小曲面，猴鞍面

在研究曲面以前，我們預先声明我們所研究的曲面限于非自交的小片光滑曲面，并且不計边緣上的点。現在考虑曲面上一点 P 和曲面上所有通过 P 的曲綫。值得注意的是，一般来讲，所有这些曲綫在 P 点的切綫都在一个平面上。由于这个原故，这个平面叫做曲面在点 P 的切面。曲面上凡有切面的点都叫做正則点；所有别样的点，都叫做奇点。一片曲面上的奇点不能填滿整个曲面，最多只能填滿曲面上一些个别的曲綫。

通过曲面上一个正則点P作切面的垂綫，这垂綫叫做曲面在P的法綫。通过法綫的諸平面同曲面的交綫称为曲面的正截口。在一个正則点P处的正截口或者在P处是正則的，或者在P处有拐点。

我們下面的課題是把曲率的概念修改，使它适用于曲面。在曲綫的情形，曲率是在切点紧密邻近曲綫对其切綫的偏差程度的一种指标。相仿地，我們留意曲面相对于其切面的性态。如果我們从实例观察曲面的形状，就可看出有两种根本不同类型的点：杯面式的点和鞍面式的点(杯点和鞍点)。

杯点的特征是在所考慮点的紧密邻近切面不穿过曲面，而完全位于曲面的一側。正因为如此，我們能在这样的一点处把曲面竖立在平坦的桌子上。以前曾經見过不少这类曲面的例子。比如球面和椭球面，这两种曲面上的每一点都是杯面式的。这种类型的点还有一个名字，叫做椭圓点。

在鞍点处曲面的情况很像一个山口(图190)。在山口的最高点P，切面水平；在P的左右，路面隆起；在P的前后，路面下陷。因此在P点的切面与曲面交于一曲綫，这曲綫有两支，它們交于P(換句話說，有两条水平的道路，它們汇合于山口的最高点)。这个性质是鞍点的特征。显然在这样的点处曲面不能竖立在平坦桌面上。曲面上所有点都是鞍点的例子有如单叶双曲面和双曲抛物面。鞍点的另一个名字叫做双曲点。

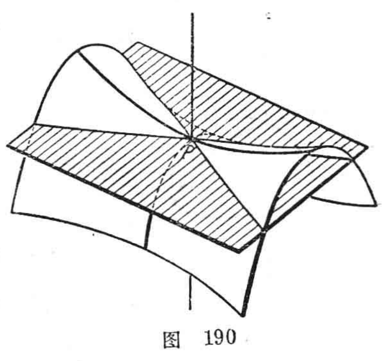


图 190

介于椭圓点和双曲点之間的还有一种过渡情形，这是抛物点。下面是求抛物点的一种方法：設F和G是相切于一点P(意指它們

在P点有同一切面）的两个曲面，并且在P点F是椭圆式的，G是双曲式的。如果把F經过連續变形而变成G，在这个过程中让P和过P的切面不动，那末将有一个时刻，这时在P点曲面变为抛物式的。举个例子，我們可以从图190开始，把山口P的两方的山头压低，低到山脊处处与水平切面相接触，这时P就是抛物点。因为如果再把左右两旁的路面继續往下压，那末从前的山口将变为峰頂，亦即变成曲面的椭圆点。不过，这个例子不能告訴我們所有可能类型的抛物点。除此之外，尙有好多其他类型的抛物点，这要等待以后再詳細研究（第201,203頁）。那些类型的抛物点是不能当作椭圆点和双曲点的过渡情形而簡单地作出来的。

为了用数值的关系来描写曲率，我們可以从曲面在一点P的正截口的曲率出发。在P点的正截口的曲率中心一定落在通过P点的曲面的法綫上，因为这条法綫是通过P点的所有正截口的法綫。把通过曲面法綫的一平面繞这法綫旋轉，得到所有的正截口。在旋轉过程中曲率中心沿法綫依一定方式运动，从而提供了描写曲面在給定点处的弯曲性质的一种方法。

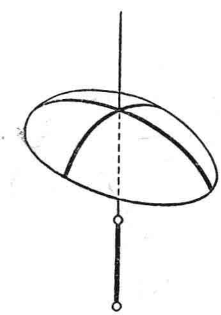


图 191

在椭圆点处（图191），曲率中心永远落在法綫被曲面分成的两側之一上。一般来讲，曲率半徑的值随法面旋轉而改变，它在某一定的正截口s_1上取得最大值r_1，在某另一正截口s_2上取得最小值r_2。r_1和r_2叫做曲面在点P的主（法）曲率半徑。主曲率半徑的倒数$k_1=\frac{1}{r_1}$和$k_2=\frac{1}{r_2}$叫做主（法）曲率。正截口s_1和s_2在点P的切綫方向，叫做曲面在点P的主方向。可以证明，在正則点处二主方向永远垂直。还可以证明，每个正截口的曲率由二主曲率和这

个正截口与二主方向所作成的角完全决定。

在双曲点处（图 192），曲率中心的軌迹不限定在曲面一側的法綫上。如果正截口通过曲面的两块高地（这里我們仍把曲面解釋成在P有一豁口的山脉），曲率中心都在点P的上方；如果正截口通过曲面的两块低地，曲率中心都在点P的下方。在那些曲率中心在点P的上方的正截口里面有一个，它的曲率k_1大于其他任何同一类型的正截口的曲率。当法面轉出这个位置以后，曲率漸减，曲率半徑則漸增。当法面接着轉到（如图 190 上所画的那样）通过P的两条水平道路之一的方向时曲率值就变为零，曲率中心朝上方退走到无穷远处。若旋轉仍继續进行，曲率中心便突然跳到法綫下方的射綫上来，从无穷远逐漸上升而趋于P；这时曲率半徑漸减，曲率則漸增。最后曲率达到一值k_2，它超过任何其他曲率中心在P点下方的正截口的曲率。和椭圆点的情形一样，k_1和k_2也叫做主曲率，与它們相当的正截口的方向也叫做主方向。同样，二主方向也是相互垂直的。此外，它們平分曲面与其切面的两支交綫所成的角及其补角。这两支交綫的方向称为曲面在P点的漸近方向。

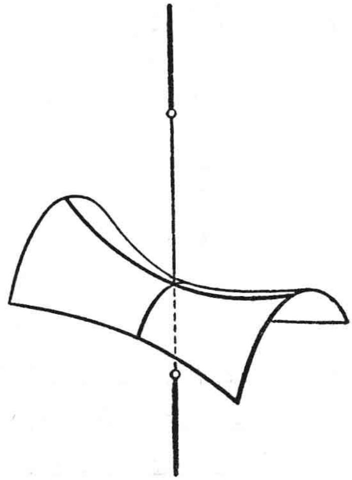


图 192

在抛物点上，一般也有两个相互垂直的主方向，与主方向对应的正截口的曲率值k_1和k_2分别大于和小于其他任何正截口的曲率值。抛物点的特征是两个主曲率之一为零，另一个一般不为零。不为零的曲率中心从与不为零的主曲率对应的位置开始，沿法綫的一条射綫退走到无穷远（图 193）。这样在抛物点上一般恰有一

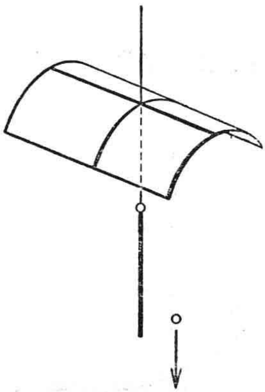


图 193

个曲率为零的正截口。这正截口的方向是主方向之一，但同时須視为一个漸近方向。

給定了任意一片曲面，用解析方法可以在曲面上找到所有这样的曲綫，它們在曲面上每点的方向与二主方向之一重合。用这种方法我們可以找出曲面的曲綫"网"，即二曲綫族之組，每族曲綫都簡单而无空隙地盖滿曲面。这些曲綫叫做曲面的**曲率綫**。从以前的討論可知，过曲面上任一已知点P的二曲率綫在該点P相互垂直，因此曲率綫在曲面上形成正交曲綫网。

不过要知道，也有以前全部的討論不适用的情況。这是因为我們的論点是建立在正截口的曲率随着正截口的平面旋轉而改变的前提之上的。当然也可能在某一点所有的正截口的曲率都相同。这时二主方向不定，这类点叫做**臍点**。球面是曲面上全部点都是臍点的一个淺显的例子。事实上，球面和平面是曲面上的点全部是臍点的仅有的两种曲面。一般地讲，曲面的臍点是孤立点。曲率綫网仅在臍点处才可能有奇性。

关于曲率綫，这里有一个著名的定理，是杜潘(Dupin)得到的。在第5頁上曾經介紹过平面上正交曲綫网的概念。与此相仿，空間正交曲面网是指几族曲面，它們里面通过空間任一点的各曲面在該点的切面相互垂直。通过平面上的任一点，只能作两条相互垂直的直綫，但是通过空間的任一点，能作三个相互垂直的平面。由此我們自然会联想到三个相互正交的曲面族，在空間每一点处，每族各有一条代表。在第一章里讲过共焦二阶曲面网，就是这种正交系的一个例子。

在平面上（或者在曲面上）假定已給定任一曲綫族，我們能够

找到跟它正交的曲綫族。相仿地似乎这样的想法也合理：永远可以找到一个曲面族，它与空間任意两个曲面族正交。但是由杜潘定理知道，这种想法是不合理的。杜潘定理断言任意三重正交曲面网相交于曲率綫。据此，一族曲面跟两个正交曲面族正交的必要条件是这两个正交曲面族相交于曲率綫。不但如此，这个条件恰巧还是充分的。按照杜潘定理，在橢球面上的曲率綫是橢球面与共焦单叶双曲面与双叶双曲面的交綫（参看图 194）。如此构成的曲綫网（图 195），以橢球面与焦双曲綫的四个交点为奇点。事实上，这四点是橢球面的臍点。

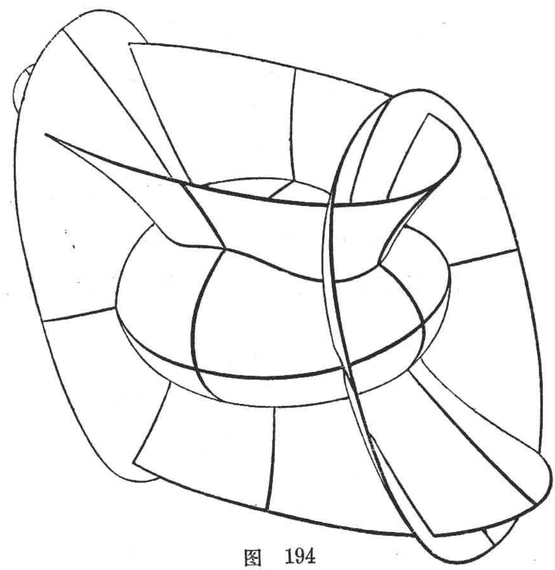


图 194

圍繞橢球面四个臍点的曲率綫的图象，类似平面上圍繞二公共焦点的共焦橢圓族和双曲綫族（参看第 5 頁图 6）。这个类似現象不是偶然的，这表示两族曲綫的內在联系。事实上，在橢球面上作曲率綫的方法可以仿照平面上橢圆的绳綫作图法，不过这里是以臍点代替了焦点。橢球面上的四个臍点分成两对对徑点，因而

两个非对徑点可以处于两种不同的相对位置（参看图 196）。現在假定我們已經选好了这样的一对点如 F_1 和 F_2，把一条适当长的绳綫两端系在这两点上，在 P 点綳紧，使整个绳綫自然地貼合在橢球面上。于是 P 点在橢球面上描繪一条曲率綫。多次改变绳綫之

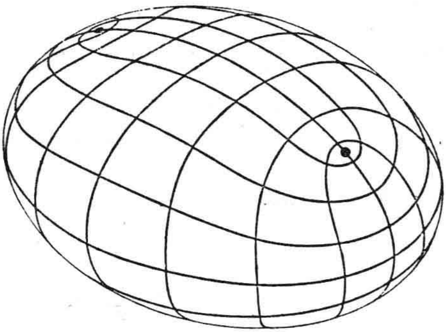


图 195

长，可得出一族曲率綫的全部。利用另一对臍点，同样可得出另一族曲率綫的全部。在平面上共焦二次曲綫系里有一橢圓族和一双曲綫族，而橢球面上的两族曲綫都可以看作广义的橢圓。

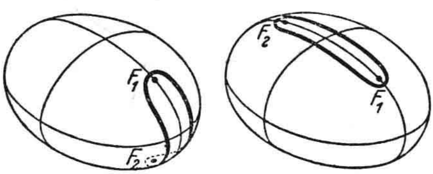


图 196

在橢球面的绳綫作图中，绳綫本身形成橢圓面的某些曲綫，相当于橢圓的二条焦半徑。这种曲綫类似平面上的直綫，它有这样的特征：它是連接曲面上任意两点最短的路徑。这种曲綫叫做曲面的測地綫（或短程綫）。关于它們的理論以后再行研究（第221—225 頁）。

在双曲点处，除了主方向外，还有另外两个特別方向，即漸近