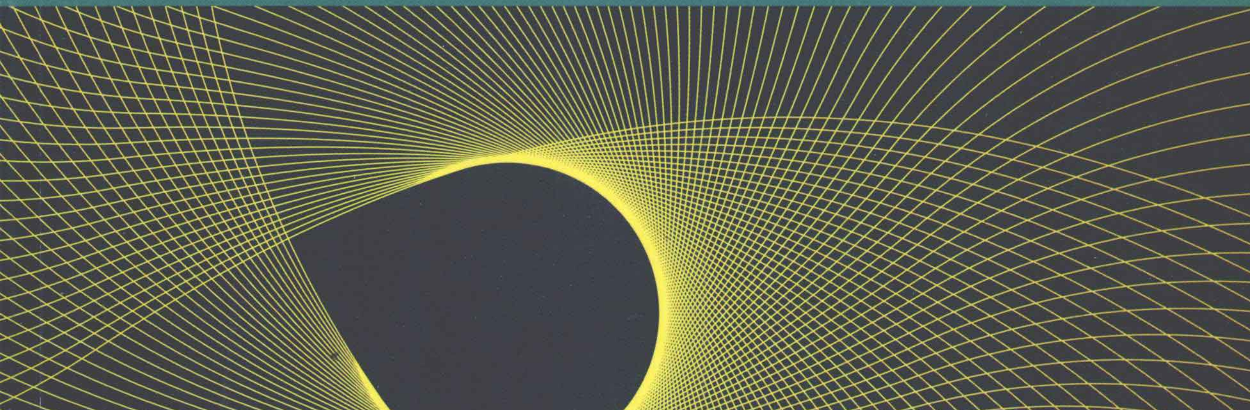
普通高等院校卓越工程师教育系列

高等数学（下册）

曾金平 张忠志 主编



科学出版社

普通高等院校卓越工程师教育系列

高等数学(下册)

曾金平　张忠志　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本系列书是大学(理)工科类本科生的教材.本书为高等数学下册，主要介绍常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、级数等内容.本书立足于“卓越工程师教育培养计划”，着眼于培养学生的综合素质、创新精神和实践能力，对传统的高等数学的教学内容进行了筛选和优化，淡化了技巧性.每章各小节精选了与章节内容相匹配的基本练习题，可帮助学生理解和掌握相应的教学内容；每章配有较难的综合练习题，可进一步加深学生对教材内容的消化.为开阔眼界，培养学生的创新能力，每章提供了适当的阅读材料.通过阅读这些内容，可增强学生用数学的意识.

本书可供普通高等学校理工科各专业使用，也可作为经管类相应专业的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册 / 曾金平，张忠志主编.—北京：科学出版社，2012.2

(普通高等院校卓越工程师教育系列)

ISBN 978-7-03-033407-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①曾… ②张… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 013235 号

责任编辑：王雨舸 / 责任校对：董艳辉

责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

南京展望文化发展有限公司照排

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：B5(720×1 000)

2012 年 1 月第 一 版 印张：20 1/4

2012 年 1 月第一次印刷 字数：397 000

定价：36.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

为贯彻落实党的"十七大"提出的走中国特色新型工业化道路、建设创新型国家、建设人力资源强国等战略部署和《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》,教育部联合有关部门和行业协会共同在有关高校中组织实施"卓越工程师教育培养计划".2010年6月,我校作为第一批实施高校参与了该计划.依据本校卓越计划培养标准,遵循工程的集成与创新特征,以强化工程实践能力、工程设计能力与工程创新能力为核心,重构课程体系和教学内容,加强跨专业、跨学科的复合型人才培养,着力推动基于问题的学习、基于项目的学习、基于案例的学习等多种研究性学习方法,加强学生创新能力训练,"真刀真枪"做毕业设计.为此,需要大力改革课程体系和教学形式.

"高等数学"是理工科学生的一门重要的基础课程.本系列教材的编写,正是立足于"卓越工程师教育培养计划",着眼于培养学生的综合素质、创新精神和实践能力,对传统的高等数学的教学内容进行了筛选和优化,淡化了技巧性.每章各小节精选了与章节内容相匹配的基本练习题,可帮助学生理解和掌握相应的教学内容;每章配有较难的综合练习题,可进一步加深学生对教材内容的消化.为开阔眼界,培养学生的创新能力,每章提供了适当的阅读材料.通过阅读这些内容,可增强学生用数学的意识.

本书为《高等数学下册》,由曾金平、张忠志担任主编,贾继红(第6、11章)、余晋昌(第8、9章)、高雁群(第10章)等老师参加了编写.

限于编者水平,书中疏漏之处在所难免,还望广大读者和老师批评指正.

编　者

2011年10月

目　　录

第 6 章

常微分方程

伯努利效应

1726 年，伯努利通过无数次实验，发现了“边界层表面效应”：流体速度加快时，物体与流体接触的界面上的压力会减小，反之压力会增加. 为纪念这位科学家的贡献，这一发现被称为“伯努利效应”. 伯努利效应适用于包括气体在内的一切流体. 反映出流体的压强与流速的关系，流速与压强的关系：流体的流速越大，压强越小；流体的流速越小，压强越大.

在足球比赛中，经常有罚前场直接任意球. 此时，防守方五六个球员在球门前组成一道“人墙”，挡住进球路线. 进攻方的主罚队员，起脚一记劲射，球绕过了“人墙”，眼看要偏离球门飞出，却又沿弧线拐过弯来直入球门，让守门员措手不及. 这就是颇为神奇的“香蕉球”.

为什么足球会在空中沿弧线飞行呢？其实这就是伯努利效应. 原来，踢“香蕉球”的时候，运动员并不是拔脚踢中足球的中心，而是稍稍偏向一侧，同时用脚背摩擦足球，使球在空气中前进的同时还不断地旋转. 这时，一方面空气迎着球向后流动，另一方面，由于空气与球之间的摩擦，球周围的空气又会被带着一起旋转. 这样，球一侧空气的流动速度加快，而另一侧空气的流动速度减慢. 由于足球两侧空气的流动速度不一样，它们对足球所产生的压强也不一样，于是，足球在空气压力的作用下，便向空气流速大的一侧转弯了.

许多物理问题与技术问题，都可以描述为微分方程组. 诸如电子计算机及无线电装置的计算、弹道的计算、飞机在飞行中的稳定性的研究以及化学反应过程的稳定性的研究等，都可以化为微分方程的求解问题.

微分方程理论的基本问题是求微分方程的解，即求满足这个微分方程的函数. 微分方程的理论使得人们有可能充分、全面地表达出方程解的性质. 这在自然科学的应用中有其重要意义，微分方程的理论也提供了求解数值解的方法. 本章主要介绍常微分方程的基本概念和几类常用的常微分方程的求解方法.

6.1 常微分方程的概念

6.1.1 常微分方程的概念

首先通过几个具体例题来说明微分方程的基本概念.

例 6.1 已知一条平面曲线通过点(1, 2)，且在该曲线上任意一点 $M(x, y)$ 处的切线斜率为 $2x$，求此曲线方程.

解 设所求曲线的方程为 $y=y(x)$，根据导数的几何意义,可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x. \tag{6.1}$$

又因为曲线通过点 (1, 2)，所以 $y=y(x)$ 还满足条件：

当 $x=1$ 时 $y=2$，即

$$y\Big|_{x=1}=2. \tag{6.2}$$

将式(6.1)两端积分,得

$$y=\int 2x\,\mathrm{d}x=x^2+C, \tag{6.3}$$

其中 C 为任意常数. 在式(6.3)中令 $x=1$，并根据条件(6.2),得

$$2=1^2+C,$$

即 $C=1$. 把 $C=1$ 代入式(6.3),即得所求曲线方程为(如图 6.1 所示)

$$y=x^2+1. \tag{6.4}$$

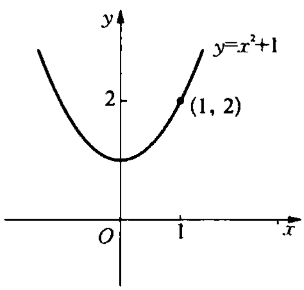


图 6.1 曲线 $y=x^2+1$ 的图形

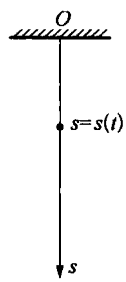


图 6.2 自由落体运动

例 6.2 设有一质量为 m 的物体受重力的作用由静止开始自由垂直下落(忽略空气阻力和其他外力的作用),试求该落体的运动规律.

解 取物体降落的垂直线为 s 轴,其正向朝下,物体下落的起点为原点(如图 6.2 所示),设开始下落的时间为 $t=0$，并设 t 时刻物体下落的距离 s 与时间 t 的函数关系为 $s=s(t)$，则由牛顿第二定律,得

$$mg=m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = g, \tag{6.5}$$

其中 g 为重力加速度.

此外,未知函数 $s = s(t)$ 还应满足下列条件:

$$s\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{6.6}$$

在式(6.5)两端对 t 积分一次,得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = gt + C_1. \tag{6.7}$$

在式(6.7)两边,再对 t 积分一次,得

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2, \tag{6.8}$$

其中 C_1, C_2 都是待定常数.

将条件 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = 0$ 代入式(6.7)得 $C_1 = 0$, 再将条件 $s\Big|_{t=0} = 0$ 代入式(6.8)得 $C_2 = 0$. 故得到自由落体的运动规律

$$s = \frac{1}{2}gt^2. \tag{6.9}$$

在以上两个例子中,方程(6.1)和(6.5)都含有未知函数的导数,这种方程称为微分方程.

定义 6.1　含有未知函数及其导数或微分的方程称为**微分方程**.

未知函数是一元函数,称为**常微分方程**;未知函数是多元函数,称为**偏微分方程**.本书中,只讨论常微分方程,为方便起见,我们把常微分方程简称为微分方程.

在微分方程中,未知函数与自变量可以不直接出现,但是必须出现未知函数的导数.

根据定义 6.1,方程(6.1)和(6.5)都是常微分方程. 方程(6.1)中出现的未知函数的最高阶导数为一阶,方程(6.5)中出现的未知函数的最高阶导数为二阶,为了区分,我们给出微分方程阶的概念.

定义 6.2　微分方程中出现的未知函数导数的最高阶数,称为微分方程的**阶**.

根据定义 6.2,方程(6.1)是一阶微分方程,方程(6.5)是二阶微分方程,而方程

$$(y''')^2 + xy'' - xy = 2x \quad 及 \quad y^{(4)} + 5y'' + 3y' - y = \sin x$$

分别是三阶和四阶微分方程.

定义 6.3 如果将一个函数及其导数代入微分方程后，能使微分方程成为恒等式，那么称此函数为微分方程的**解**.

例如，式(6.3)和(6.4)表示的函数 $y=x^2+C$ 和 $y=x^2+1$ 是微分方程(6.1)的解；而式(6.8)和(6.9)表示的函数 $s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 和 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 是微分方程(6.5)的解.

定义 6.4 若微分方程的解中含有相互独立的任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，则称此解为微分方程的**通解**；而若微分方程的解不含任意常数，则称为微分方程的**特解**.

所谓通解的意义是：当其中的任意常数取遍所有实数时，可得到微分方程的所有解(至多有个别例外). 值得注意的是，这里所说的相互独立的任意常数，是指它们不能通过合并而使得通解中的任意常数的个数减少.

微分方程(6.1)是一阶微分方程，它的解 $y=x^2+C$ 中含一个任意常数，所以 $y=x^2+C$ 是方程(6.1)的通解，而 $y=x^2+1$ 是方程(6.1)的特解. 微分方程(6.5)是二阶微分方程，它的解 $s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 中含两个任意常数，所以 $s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 是方程(6.5)的通解，$s=\frac{1}{2}gt^2$ 是方程(6.5)的特解.

从例 6.1 可知，方程(6.1)的特解 $y=x^2+1$ 是通过使通解 $y=x^2+C$ 满足附加条件(6.2)而确定的；同样，在例 6.2 中，方程(6.5)的特解 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 是通过使通解 $s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 满足附加条件(6.6)而确定的. 我们把用来确定通解中任意常数的附加条件称为**定解条件**. 当自变量取某个值时，给出未知函数及其导数的相应值的条件称为**初始条件**. 例如，条件(6.2)是微分方程(6.1)的初始条件，条件(6.6)是微分方程(6.5)的初始条件.

一般地，一阶微分方程 $y'=f(x, y)$ 的初始条件为

$$y\Big|_{x=x_0}=y_0,$$

其中 x_0, y_0 已知. 二阶微分方程 $y''=f(x, y, y')$ 的初始条件为

$$y\Big|_{x=x_0}=y_0,\quad y'\Big|_{x=x_0}=y'_0,$$

其中 x_0, y_0, y'_0 已知.

含有初始条件的微分方程，称为**初值问题**.

显然，在例 6.1 和例 6.2 中所提出的问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2x, \\ y\Big|_{x=1} = 2 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \dfrac{d^2 s}{dt^2} = g, \\ s\Big|_{t=0} = 0,\ \dfrac{ds}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

都是初值问题.

一阶微分方程的初值问题通常记为

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y\Big|_{x=x_0} = y_0. \end{cases} \tag{6.10}$$

微分方程的解的图形是一条曲线,称为微分方程的**积分曲线**.

初值问题(6.10)的几何意义是:求微分方程的通过点(x_0, y_0)的那条积分曲线(如图 6.3 所示).

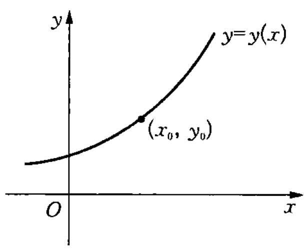


图 6.3　初值问题(6.10)的几何意义

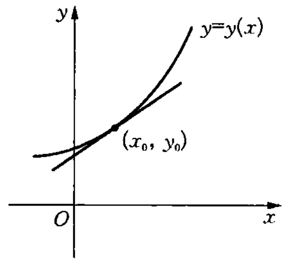


图 6.4　初值问题(6.11)的几何意义

二阶微分方程的初值问题通常记为

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y\Big|_{x=x_0} = y_0,\ y'\Big|_{x=x_0} = y_0'. \end{cases} \tag{6.11}$$

其几何意义是:求微分方程的通过点(x_0, y_0)且在该点处的切线斜率为y_0'的那条积分曲线(如图 6.4 所示).

例 6.3　验证函数$y = C_1\cos kx + C_2\sin kx$ (C_1, C_2 为任意常数, $k \neq 0$) 为微分方程

$$y'' + k^2 y = 0 \tag{6.12}$$

的通解,并求初值问题

$$\begin{cases} y'' + k^2 y = 0, \\ y\Big|_{x=0} = A,\ y'\Big|_{x=0} = 0 \end{cases} \tag{6.13}$$

的解.

解 要验证一个函数是否是微分方程的解,只需将函数及其导数代入微分方程,验证是否满足恒等式即可.

对于函数 $y = C_1\cos kx + C_2\sin kx$,易知

$$y' = -kC_1\sin kx + kC_2\cos kx,$$

$$y'' = -k^2C_1\cos kx - k^2C_2\sin kx.$$

因此,

$$y'' + k^2y = -k^2(C_1\cos kx + C_2\sin kx) + k^2(C_1\cos kx + C_2\sin kx) \equiv 0.$$

因此函数 $y = C_1\cos kx + C_2\sin kx$ 是微分方程(6.12)的解,由于 $k \neq 0$,此时 y 中含有两个独立的任意常数 C_1,C_2,而方程(6.12)是二阶微分方程,故 $y = C_1\cos kx + C_2\sin kx$ 是方程(6.12)的通解.

再由条件 $y\Big|_{x=0} = A$,$y'\Big|_{x=0} = 0$,得

$$C_1 = A, \quad C_2 = 0.$$

所以初值问题(6.13)的解为

$$y = A\cos kx.$$

6.1.2 微分方程模型举例

例 6.4(物体冷却的数学模型) 在某地发生了一起谋杀,两个小时后,尸体的温度从原来的 37℃变为 35℃(假定周围空气的温度保持 20℃不变). 试求出尸体温度 T 与时间 t 的变化规律 $T = T(t)$.

解 根据冷却定律:物体温度的变化率与物体和当时空气温度之差成正比,则可建立起函数 $T = T(t)$ 满足的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T-20),$$

其中 $k > 0$ 是常数. 这就是**物体冷却的数学模型**.

根据题意,$T = T(t)$ 还满足条件

$$T\Big|_{t=0} = 37.$$

因此,尸体温度 T 与时间 t 的变化规律 $T = T(t)$ 是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T-20), \\ T\Big|_{t=0} = 37 \end{cases}$$

的解，求解该问题即得 $T(t)$.

例 6.5(价格调整模型) 设某种商品在时刻 t 的售价为 P，P 是时刻 t 的函数 $P=P(t)$. 社会对该商品的供给量和需求量分别是 P 的函数 $S(P)$，$Q(P)$. 假定在时刻 t，价格的变化率与此时的过剩需求量 $Q(P)-S(P)$ 成正比，试求 $P(t)$的变化规律.

解 由条件可知，在时刻 t 成立

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=k[Q(P)-S(P)], \tag{6.14}$$

其中 $k>0$ 是常数. 在 $S(P)$和 $Q(P)$确定的情况下，求解方程(6.14)可得 $P(t)$. 这就是商品的**价格调整模型**.

习题 6.1

1. 指出下列微分方程的阶：

   (1) $x(y')^2-4yy+xy=0$；　(2) $yy'''-y''+xy'=\cos x$；

   (3) $(5x-3y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0$；　(4) $\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^4+\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2+1=0$.

2. 验证下列函数(C 是任意常数)是否为相应方程的解？是通解，还是特解？

   (1) $y'-2y=0$，$y=\sin x$，$y=\mathrm{e}^{2x}$，$y=C\mathrm{e}^{2x}$；

   (2) $y''-2y'+y=2\mathrm{e}^x$，$y=x^2\mathrm{e}^x$；

   (3) $xy\,\mathrm{d}x+(1+x^2)\mathrm{d}y=0$，$y^2(1+x^2)=C$.

3. $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}$ (C_1，C_2 为任意常数)是方程 $y''+2y'+y=0$ 的通解，求满足初始条件 $y\Big|_{x=0}=4$，$y'\Big|_{x=0}=2$ 的特解.

4. 设曲线上点 $P(x, y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 Q，且线段 PQ 被 y 轴平分，试写出该曲线所满足的微分方程.

6.2 一阶微分方程的解法

本节及下一节讨论微分方程的求解问题. 微分方程的类型是多种多样的，它们的解法也各不相同. 虽然一阶微分方程是微分方程中阶数最低、形式最简单的方程，但是，目前还没有一个普遍适用的公式可以表示所有一阶微分方程的解析解. 因此，本阶主要讨论几类最常见形式的一阶微分方程的求解方法.

6.2.1 分离变量法

在例 6.1 中，对式(6.1)中的一阶微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$，我们是对这个方程两边

直接积分,即得出它的解 $y=\int 2x\,\mathrm{d}x=x^2+C$. 也就是说,对最简单的微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)$,可以通过方程两边直接积分求出它的解 $y=\int f(x)\mathrm{d}x$. 但是这种方法不能求解所有的一阶微分方程,例如,对于一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy, \tag{6.15}$$

就不能用直接对方程两边积分的方法求其通解. 这是因为 $y=y(x)$ 是未知函数,积分 $\int 2xy\,\mathrm{d}x$ 无法积出. 为了求解方程(6.15),先将方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\,\mathrm{d}x,$$

然后两端积分

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 2x\,\mathrm{d}x,$$

得

$$\ln|y|=x^2+C_1,$$

从而

$$y=\pm\,\mathrm{e}^{x^2+C_1}=\pm\,\mathrm{e}^{C_1}\cdot\mathrm{e}^{x^2}.$$

记 $C=\pm\,\mathrm{e}^{C_1}$,则得 $y=C\mathrm{e}^{x^2}$,而 $y=0$ 也是方程的解,所以 C 为任意常数. 可以验证,$y=C\mathrm{e}^{x^2}$ 确实是方程(6.15)的通解. 上述求解方程(6.15)的方法就是分离变量法.

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y) \tag{6.16}$$

的一阶微分方程称为**可分离变量的微分方程**,其中 $f(x)$, $g(y)$ 都是连续函数. 对于这类函数,可以通过积分来求解.

设 $g(y)\neq 0$,则方程(6.16)就可写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x,$$

此时,变量 x 与变量 y 已被分离在等号两边. 再在上述等式两端积分,即得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x.$$