电磁场与电磁兼容

解 仑 李一玫 主编
王先梅 副主编

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

电磁场与电磁兼容

解　仑　李一玫　主　编

王先梅　副主编

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书对电磁场与电磁兼容的基本理论做了系统介绍，全书共有 8 章，内容包括矢量分析及场论、静电场、恒定电场、恒定磁场、时变电磁场、电磁兼容基础、电磁兼容滤波器设计、PCB 的电磁兼容设计及应用。每章除本章小结外，还附有习题，供读者对相关内容做进一步探讨和复习巩固之用。习题解答和教学用 PPT 相关资料可在华信教育资源网（www.hxedu.com.cn）下载。

本书可以作为电子、通信、自动化控制等专业的“电磁场理论及应用”课程的本科生教材，也可以作为相近专业的教学参考书。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有，侵权必究。

图书在版编目（CIP）数据

电磁场与电磁兼容/解仑，李一玫主编. —北京：电子工业出版社，2012.6

ISBN 978-7-121-17518-3

Ⅰ. ①电… Ⅱ. ①解… ②李… Ⅲ. ①电磁场－高等学校－教材 ②电磁兼容性－高等学校－教材
Ⅳ. ①O441.4 ②TN03

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 147449 号

策划编辑：曲　昕
责任编辑：王春宁
印　　刷：北京天宇星印刷厂
装　　订：三河市鹏成印业有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：17　字数：432 千字
印　　次：2012 年 6 月第 1 次印刷
定　　价：42.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　言

随着科学技术的进步，电磁环境日趋复杂，电磁干扰及电磁防护问题日益突出。为了把国内外的技术和学术进展、精辟的见解和分析传播给学生，需要一本新的适用于电子、通信类专业的电磁理论基础课教程，以便使经典理论联系现代的实际。

本书的编写一方面特别注重理论的严密和完整，另一方面也注重讲清概念的物理本质，联系工程实际；通过打好理论基础，增强学生的广泛适应性。编写的思路和所做的工作主要如下：在讲解“场”的内容时首先加强场论的阐述，使之更加严密和条理化，特别是深入浅出、形象化地讲明学生往往感到抽象的概念和定理的物理含义；注重基本概念，强调矢量微分算子这一工具的使用。

静电场的讲法是以场论为纲从数学上概括物理的场，而电场与磁场则作为场论的物理实例；同时在场论的亥姆霍兹定理一节（1.6.3 节）便提出了宏电磁场基本方程，强调指出了电场与磁场的不可分割，因而每种静态场又是统一的时变电磁场的特例，同时也把静态场同准静态场的模型进行了比较。而为了便于学习，减少困难，仍然按静电场（第 2 章）、恒定电场（第 3 章）、恒定磁场（第 4 章）的顺序分别介绍，并把第 3、4 章与第 2 章对应地介绍。第 5 章在总结静态场基本方程的基础上进而导出了时变场的基本方程——麦克斯韦方程组，并对其限定形式做了阐述。第 6 章介绍了电磁兼容的基本概念和基础理论，对电磁干扰三要素和电磁骚扰源进行了分析。第 7 章介绍了电磁干扰滤波器的工作原理与分类，以及一些常用的滤波元器件，并结合实际应用阐述了滤波器的正确选用与安装。第 8 章总结了编者在长期的电路设计工作中的经验，论述了 PCB 的电磁兼容设计的原则、干扰消除、抗串扰和 PCB 接地技术，详细介绍了常见元件的分布参数模型。

本书是编者基于多年教学和科研工作实践，吸收了一些最新的研究成果和工程经验，以原有的本科教学讲义和培训教材为基础编写完成的。本书配有习题解答和教学用 PPT 相关资料，可在华信教育资源网（www.hxedu.com.cn）下载。本书主要由李一玫、解仑、王先梅编写，胡雪、刘欣、许家铭、弓飞、彭晓兰、吕振、闫纪铮、霍磊等参加了部分章节的文字整理工作。

由于电磁内容所涉及的技术领域和服务对象范围非常广，相关的理论和技术发展迅速，加上作者水平有限，因而书中难免存在不妥之处，诚恳欢迎批评、指正。

目录
CONTENTS

第 1 章　矢量分析及场论 ······ 1

1.1　矢量场和标量场 ······ 1

1.1.1　场的分类 ······ 1

1.1.2　场的表示方法 ······ 2

1.1.3　矢量运算 ······ 3

本节思考与练习 ······ 5

1.2　正交曲线坐标系 ······ 6

1.2.1　直角坐标系 ······ 6

1.2.2　圆柱坐标 ······ 8

1.2.3　球坐标 ······ 10

1.2.4　长度、面和体的微分元及积分 ······ 12

本节思考与练习 ······ 20

1.3　标量场的梯度 ······ 20

1.3.1　方向导数 ······ 20

1.3.2　梯度 ······ 22

本节思考与练习 ······ 24

1.4　矢量场的通量、散度和散度定理 ······ 24

1.4.1　通量和通量源 ······ 24

1.4.2　散度 ······ 25

1.4.3　散度定理 ······ 28

本节思考与练习 ······ 30

1.5　矢量场的环量、旋度和斯托克斯定理 ······ 30

1.5.1　环量和涡旋源 ······ 30

1.5.2　旋度 ······ 31

1.5.3　斯托克斯定理 ······ 36

本节思考与练习 ······ 38

1.6　若干定理 ······ 38

1.6.1　格林定理 ······ 38

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

1.6.2 唯一性定理 …… 39
1.6.3 亥姆霍兹定理 …… 40
1.7 标量场和矢量场的 MATLAB 基本运算和仿真 …… 41
本节思考与练习 …… 46
本章小结 …… 47
习题一 …… 49
第 2 章 静电场 …… 52
2.1 库仑定律 …… 52
2.1.1 电荷 …… 52
2.1.2 电场强度 …… 53
2.1.3 库仑定律与叠加原理 …… 53
本节思考与练习 …… 55
2.2 真空中静电场的基本方程 …… 56
2.2.1 立体角 …… 56
2.2.2 静电场的通量和散度 …… 57
2.2.3 静电场的环量和旋度 …… 58
本节思考与练习 …… 59
2.3 电位 …… 60
2.3.1 电位的引入及电位的物理意义 …… 60
2.3.2 电位的计算方法 …… 60
本节思考与练习 …… 62
2.4 介质中的高斯定律 …… 62
2.4.1 电偶极子 …… 63
2.4.2 介质的极化 …… 65
2.4.3 介质中的高斯定律 …… 67
2.4.4 本构关系 …… 67
本节思考与练习 …… 69
2.5 静电场的边界条件 …… 69
2.5.1 两种介质分界面上的边界条件 …… 70
2.5.2 介质与导体分界面上的边界条件 …… 71
本节思考与练习 …… 73
2.6 电位的二阶微分方程 …… 73
本节思考与练习 …… 76
2.7 分离变量法 …… 77
2.7.1 直角坐标系分离变量法 …… 77
2.7.2 圆柱坐标系分离变量法 …… 82

2.7.3 球坐标系的分离变量法 …… 86
本节思考与练习 …… 91
2.8 镜像法 …… 92
2.8.1 平面镜像法 …… 92
2.8.2 圆柱面镜像法 …… 95
2.8.3 球面镜像法 …… 97
2.8.4 电轴法 …… 98
本节思考与练习 …… 100
2.9 多导体系统及部分电容 …… 100
2.9.1 电容的概念 …… 100
2.9.2 多导体系统间的部分电容 …… 102
本节思考与练习 …… 104
2.10 静电场能量及静电力 …… 104
2.10.1 静电场能量 …… 104
2.10.2 静电力 …… 106
本节思考与练习 …… 108
2.11 静电场的 MATLAB 运算和仿真 …… 108
本节思考与练习 …… 114
本章小结 …… 115
习题二 …… 118
第 3 章 恒定电场 …… 126
3.1 电流密度 …… 126
3.1.1 电流强度和电流密度 …… 126
3.1.2 电流密度和电荷密度 …… 127
3.1.3 欧姆定律和焦耳定律 …… 127
本节思考与练习 …… 129
3.2 恒定电场的基本方程 …… 129
3.2.1 电流连续性方程及恒定电场基本方程 …… 129
3.2.2 电动势 …… 130
本节思考与练习 …… 132
3.3 恒定电场的边界条件 …… 132
本节思考与练习 …… 134
3.4 恒定电场与静电场的比拟 …… 135
本节思考与练习 …… 137
3.5 恒定电场的 MATLAB 运算和仿真 …… 138
本节思考与练习 …… 140

本章小结 …… 140
习题三 …… 142
第 4 章 恒定磁场 …… 144
4.1 安培力定律、磁感应强度 …… 144
4.1.1 安培力定律 …… 144
4.1.2 磁感应强度、毕奥—沙伐定律 …… 145
4.1.3 洛仑兹力 …… 146
本节思考与练习 …… 148
4.2 真空中磁场的基本方程 …… 149
4.2.1 磁通连续性方程 …… 149
4.2.2 安培环路定律 …… 150
本节思考与练习 …… 153
4.3 矢量磁位 …… 153
4.3.1 矢量磁位 …… 153
4.3.2 磁偶极子 …… 156
本节思考与练习 …… 157
4.4 磁介质中的安培环路定律 …… 157
4.4.1 介质的磁化 …… 157
4.4.2 介质中的安培环路定律 …… 159
本节思考与练习 …… 161
4.5 恒定磁场的边界条件 …… 161
4.5.1 法向边界条件和切向边界条件 …… 162
4.5.2 折射关系 …… 163
4.5.3 用矢量位表示的边界条件 …… 164
本节思考与练习 …… 165
4.6 标量磁位 …… 165
4.6.1 标量磁位及其方程 …… 165
4.6.2 标量磁位的多值性 …… 166
4.6.3 介质磁化的磁荷模型及其标量磁位 …… 167
本节思考与练习 …… 167
4.7 电感 …… 167
4.7.1 自感系数和互感系数 …… 167
4.7.2 自感和互感的计算 …… 169
本节思考与练习 …… 172
4.8 磁场能量和磁场力 …… 172
4.8.1 磁场能量 …… 172

4.8.2 磁场力 …… 175
本节思考与练习 …… 176
4.9 恒定磁场的MATLAB运算和仿真 …… 176
本节思考与练习 …… 181
本章小结 …… 181
习题四 …… 183
第5章 时变电磁场 …… 187
5.1 法拉第电磁感应定律 …… 187
本节思考与练习 …… 190
5.2 位移电流 …… 191
本节思考与练习 …… 193
5.3 麦克斯韦方程组 …… 194
5.3.1 麦克斯韦方程组 …… 194
5.3.2 本构关系 …… 195
5.3.3 无源区的麦克斯韦方程组 …… 195
5.3.4 无源区的波动方程 …… 196
本节思考与练习 …… 196
5.4 时变电磁场的边界条件 …… 196
5.4.1 两种媒质分界面上的边界条件 …… 197
5.4.2 理想导体表面的边界条件 …… 197
本节思考与练习 …… 199
5.5 动态位电磁波的一般概念 …… 199
5.5.1 动态位方程 …… 199
5.5.2 动态位方程的解 …… 200
5.5.3 平面波的一般概念 …… 202
本节思考和练习 …… 203
本章小结 …… 203
习题五 …… 204
第6章 电磁兼容基础 …… 207
6.1 电磁干扰的数学描述方法 …… 207
6.1.1 周期性函数的傅里叶变换 …… 207
6.1.2 非周期性干扰信号的频谱分析 …… 208
6.1.3 脉冲信号的傅里叶积分及快速时/频域转换 …… 209
6.2 分贝的概念与应用 …… 212
6.2.1 分贝的定义及换算关系 …… 212
6.2.2 分贝的应用 …… 215

6.3 电磁环境及电磁污染途径……215
6.3.1 自然电磁环境……215
6.3.2 人为电磁干扰……216
6.3.3 电磁干扰三要素……217
本章小结……218
习题六……219
第 7 章 电磁兼容滤波器设计……220
7.1 电磁干扰滤波器……220
7.1.1 电磁干扰滤波器的工作原理……220
7.1.2 电磁干扰滤波器的主要特性……220
7.1.3 低通滤波器的结构选择……221
7.2 电磁干扰常用滤波器元件……222
7.2.1 电容器……222
7.2.2 电感……229
7.2.3 滤波连接器……232
7.3 电磁干扰滤波器的选用与安装……236
7.3.1 电磁干扰滤波器的选用……236
7.3.2 电磁干扰滤波器的安装……240
习题七……241
第 8 章 PCB 的电磁兼容设计及应用……242
8.1 一般设计原则……242
8.1.1 印制电路板的布局和布线……242
8.1.2 单面板和双面板几种地线的分析……245
8.1.3 多层板……250
8.2 旁路和去耦……253
8.2.1 物理特性……253
8.2.2 电容……257
8.2.3 引线电感……257
8.3 变频器应用中的电磁兼容应用……258
8.3.1 干扰来源……258
8.3.2 传播方式……259
8.3.3 电磁兼容对策……260
习题八……262

第1章

矢量分析及场论

矢量分析是研究场论的重要数学工具，它以矢量代数为基础，以矢量微积分为主要研究内容，是专门应场论的研究而生的一种数学语言。利用这种语言，可以把千百年来人类观测电磁效应所得出的规律，用简洁明快的符号精确地表述出来。这样做不仅可以使电磁理论系统化，还便于我们对其深刻理解和应用，从而有利于进一步的深入研究和探索。场论是把各种物理的场在数学上抽象成矢量场和标量场来研究，它不仅可以使我们对电场、磁场的认识升华一步，也是进入连续媒质力学（流体、固体力学）、量子力学、热传导、质量传递等领域的数学基础。

1.1 矢量场和标量场

什么是场？在数学上，一个场就是一个函数；在物理上，场描述在空间某一区域内所有点上的一个物理量（称为场量）。因此，场的重要属性，一是占有一定的空间，二是可以表达成函数形式，并且，除去有限个点、线、面外，场量应处处连续、可微。

1.1.1 场的分类

按照场量在空间是否具有方向，场可分为标量场和矢量场。

标量场的场量是标量，即场域内每个点对应的物理量是一个数。如温度场、密度场、电位场等，都是常见的标量场。

矢量场的场量是矢量，即场域内每个点对应的物理量必须同时用大小和方向来描述。如速度场、加速度场、重力场、电场和磁场等，都是矢量场。

按照场量是否随时间变化，场又可分为静态场和时变场。

静态场的场量不随时间变化，也称时不变场，可分为静态标量场和静态矢量场。本书将在第 2、3、4 章分别讨论由静止电荷产生的静电场和恒定电流产生的恒定电场及恒定磁场。

时变场的场量随时间变化，也称动态场，可分为时变标量场和时变矢量场。本书将在第 5 章讨论有关时变电磁场的理论。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

1.1.2 场的表示方法

1．函数表示法

标量场用标量函数表示，如温度场可表示为 $T(x, y, z)$（静态场），密度场可表示为 $\rho(x, y, z, t)$（时变场）。

矢量场用矢量函数表示。本书中所有矢量均用黑体字表示，如电场强度 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{E}}E$，其中，$\boldsymbol{a}_{\mathrm{E}}$ 表示 $\boldsymbol{E}$ 方向上的单位矢量，$\boldsymbol{a}_{\mathrm{E}} = \dfrac{\boldsymbol{E}}{E}$，$E$ 表示 $\boldsymbol{E}$ 的模值，即 $E = |\boldsymbol{E}|$。矢量运算往往在某一坐标系中进行。在正交坐标系中，一个矢量（场）可以分解为沿着三个坐标轴的分量，如在直角坐标系中，有

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = \boldsymbol{a}_x E_x(x,y,z) + \boldsymbol{a}_y E_y(x,y,z) + \boldsymbol{a}_z E_z(x,y,z) \tag{1.1.1}$$

而模值

$$E = |\boldsymbol{E}| = \sqrt{E_x^{\,2} + E_y^{\,2} + E_z^{\,2}} \tag{1.1.2}$$

应该注意的是，单位矢量仅仅表示其模值为 1，若其方向固定不变，即为常矢量，其导数为零；若其方向随某变量而变化，则仍是矢量函数，求导时应按函数进行求导。如

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(\boldsymbol{a}_{\mathrm{E}} E) = E\frac{\partial \boldsymbol{a}_{\mathrm{E}}}{\partial r} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{E}}\frac{\partial E}{\partial r} \tag{1.1.3}$$

2．场图表示法

标量场可用等值线（二维）或等值面（三维）来表示场的分布情况。等值面就是函数值相等的点所构成的曲面，如标量场 $u(x,y,z) = x + y + z$ 的等值面方程为

$$u(x,y,z) = x + y + z = C(\text{常数}) \tag{1.1.4}$$

这是一族平行平面，如图 1-1（a）所示。又如二维标量场 $u(x,y) = x - y^2$ 的等值线方程为

$$u(x,y) = x - y^2 = C \tag{1.1.5}$$

这是一族抛物线，如图 1-1（b）所示。

矢量场在空间的分布可用矢线来表示。矢线上每一点的切线方向表示该点场量的方向，场量的大小则用矢线的疏密程度来表示，矢线密集处表示场量的模值大，矢线稀疏处表示场量的模值小，也就是说，可用垂直穿过单位面积的矢线根数来表示矢量场的大小，如图 1-1（c）所示。

对于时变场，场图只能表示每一时刻的场的分布。

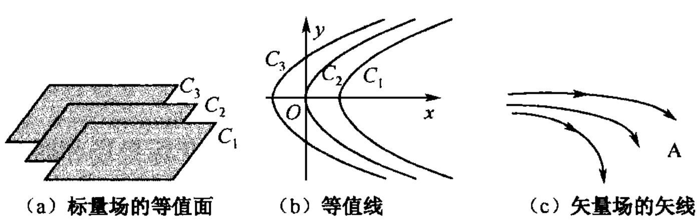

图 1-1　标量场和矢量场

1.1.3 矢量运算

本节将用到矢量的加减法、矢量的数乘、矢量的点乘和叉乘及矢量的微积分，其中矢量的微积分运算是重点和难点，将在后面几节重点介绍。

矢量加法 两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相加，可采用平行四边形法则或三角形法则，如图 1-2 所示，使两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的始端重合，以 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为邻边做平行四边形，其对角线即为和矢量 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$；或通过平移将 $\boldsymbol{A}$ 矢量的末端和 $\boldsymbol{B}$ 矢量的始端相接，则连接 $\boldsymbol{A}$ 首 $\boldsymbol{B}$ 尾的有向线段即为和矢量。

可以证明，矢量加法服从加法的交换率和结合率，即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \tag{1.1.6}$$

$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} \tag{1.1.7}$$

矢量减法 矢量差 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，可写成矢量和的形式，即 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$，其中 $-\boldsymbol{B}$ 是与 $\boldsymbol{B}$ 大小相等方向相反的矢量，于是可利用平行四边形法则或三角形法则做加法运算，如图 1-3 所示。

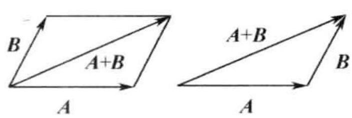

图 1-2 矢量加法

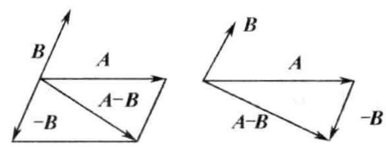

图 1-3 矢量减法

矢量的数乘 一个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和一个标量 k 相乘，结果是一个矢量，即

$$\boldsymbol{B}=k\boldsymbol{A} \tag{1.1.8}$$

当 $k>0$ 时，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 方向相同，当 $k<0$ 时，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 方向相反，两种情况都称矢量 $\boldsymbol{B}$ 和矢量 $\boldsymbol{A}$ 平行；而 $\boldsymbol{B}$ 的模值是 $\boldsymbol{A}$ 的 $|k|$ 倍。

两矢量的标量积 两矢量的标量积也称为点积或点乘，写做 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$，定义其运算结果为标量，即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta \tag{1.1.9}$$

其中，θ 为矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间的较小夹角，如图 1-4 所示。

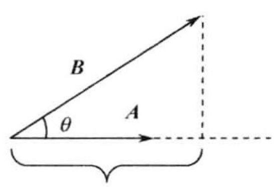

图 1-4 两矢量的标量积

特别地，若 $\boldsymbol{A}$ 是单位矢量 $\boldsymbol{a}_A$，则

$$\boldsymbol{a}_A\cdot\boldsymbol{B}=B\cos\theta=B_A \tag{1.1.10}$$

称为矢量 $\boldsymbol{B}$ 在矢量 $\boldsymbol{A}$ 方向的分量（标投影），而

$$(\boldsymbol{a}_A\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{a}_A=(B\cos\theta)\boldsymbol{a}_A=B_A\boldsymbol{a}_A \tag{1.1.11}$$

称为矢量 $\boldsymbol{B}$ 在矢量 $\boldsymbol{A}$ 方向的分矢量（矢投影）。利用式（1.1.10）和式（1.1.11）可写出一个矢量在正交坐标系中沿三个相互垂直的坐标方向的标投影和矢投影。例如，在直角坐标系中，若矢量 $\boldsymbol{r}$ 与 x、y、z 坐标轴的夹角分别为α、β、γ，则 $\boldsymbol{r}$ 在 x、y、z 坐标轴上的分量分别为

$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}_x = r\cos\alpha$、$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}_y = r\cos\beta$ 和 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}_z = r\cos\gamma$，于是 $\boldsymbol{r}$ 在直角坐标系中即可表示为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_x r\cos\alpha + \boldsymbol{a}_y r\cos\beta + \boldsymbol{a}_z r\cos\gamma$$

$\boldsymbol{r}$ 的单位方向为

$$\boldsymbol{a}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{a}_x\cos\alpha + \boldsymbol{a}_y\cos\beta + \boldsymbol{a}_z\cos\gamma \tag{1.1.12}$$

其中，$\cos\alpha$、$\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$ 称为方向余弦。

式（1.1.9）也可用来求出两个非零矢量之间的夹角

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{AB} \tag{1.1.13}$$

当 $\theta = 90^\circ$ 时，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0$，因此，两矢量的标量积是否为零可作为两矢量是否垂直的判据。即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B} \tag{1.1.14}$$

当 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$ 时，$\theta = 0^\circ$，可求出矢量的模

$$A = |\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}} \tag{1.1.15}$$

标量积的运算服从

交换律：
$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{1.1.16}$$

分配律：
$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \tag{1.1.17}$$

两矢量的矢量积 两矢量的矢量积也称为叉积或叉乘，写做 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$，定义其运算结果为矢量，其方向垂直于矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 所构成的平面，且指向由矢量 $\boldsymbol{A}$ 经 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 间较小夹角按右手螺旋转向 $\boldsymbol{B}$ 时右手拇指所指的方向，如图 1-5 所示；其大小为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的模值与它们之间较小夹角的正弦之积。即

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = AB\sin\theta \tag{1.1.18}$$

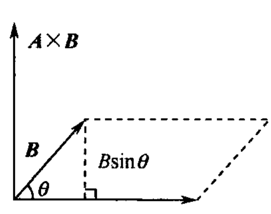

图 1-5　两矢量的矢量积

若以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为邻边做平行四边形，可看出矢量积的模值即是该平行四边形的面积。式（1.1.18）也可用来求两矢量间的夹角，但不如式（1.1.13）计算方便。不过，当 $\theta = 90^\circ$ 时，若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的单位矢量分别为 $\boldsymbol{a}_A$、$\boldsymbol{a}_B$，则其所构成平面的法线方向可直接用叉乘来表示：

$$\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}_A\times\boldsymbol{a}_B \tag{1.1.19}$$

当 $\theta = 0°$ 或 $180°$ 时，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$。因此，两矢量的矢量积是否为零矢量可作为两矢量是否平行的判据。即

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A}/\!/\boldsymbol{B} \tag{1.1.20}$$

当 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$ 时，$\theta=0°$，于是

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0} \tag{1.1.21}$$

矢量积的运算服从分配律，但不服从交换律：

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} \tag{1.1.22}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} \tag{1.1.23}$$

三矢量的混合积 三个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 的混合积定义为

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=ABC\sin\theta\cos\varphi \tag{1.1.24}$$

其中，θ 是矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 间的夹角，φ 是矢量 $\boldsymbol{C}$ 与（$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$）间的夹角。从标量积和矢量积的定义来看，三矢量的混合积表示以这三个矢量为邻边的平行六面体的体积，如图 1-6 所示。

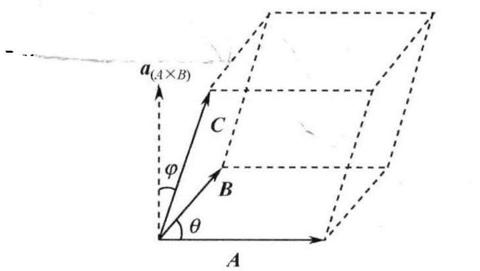

图 1-6 混合积

可以证明，当运算符号不变，三矢量循环变换次序（向左或向右）时，混合积的结果不变，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})&=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\\&=-\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})=-\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})=-\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B})\end{aligned} \tag{1.1.25}$$

三矢量的二重矢量积 三个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 的二重矢量积定义为按照顺序或优先级别做两次叉乘运算，如 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ 或 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$，可以证明二重矢量积不满足结合律，但满足下面的恒等式。

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1.1.26}$$

本节思考与练习

1.1 下列物理量哪些是矢量，哪些是标量？

（1）重量；（2）频率；（3）功；（4）速率；（5）电压；（6）动量；（7）能量；（8）距离；（9）磁场强度；（10）电场力

1.2 画出下列矢量场的图形及其模值的等值线：

（1）$\boldsymbol{v}(x,y)=\boldsymbol{a}_x x+\boldsymbol{a}_y y$；（2）$\boldsymbol{v}(x,y)=-\boldsymbol{a}_x x-\boldsymbol{a}_y y$

1.3 已知 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，证明：若 $\boldsymbol{ab}$ 不共面，则 $x=y=0$。

1.4 若 O 为三角形 ABC 内任一点，且 P、Q、R 分别为 AB、BC、CA 的中点。

（1）证明 $OA+OB+OC=OP+OQ+OR$；

（2）若 O 在三角形外部，上述结果是否成立？证明之。

1.5 化简 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\times(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{A})$。

1.2 正交曲线坐标系

矢量运算定义了矢量之间的加减法和乘法运算规则，通过一般意义上的作图运算，我们可以直观地了解各种矢量运算的结果和意义。但当各种运算交织在一起，运算过程较复杂时，就需要在选定的坐标系中用数学的方法将矢量分解成三个相互垂直的分量来处理，坐标系的选择应以矢量在该坐标系中分解的分量数最少为宜，这样可以减小运算量。本节介绍最常见的三种正交坐标系：直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。

正交坐标系中的基本概念：三张正交的曲面称为坐标面，它们相交出三条正交的曲线称为坐标轴。坐标轴上不同位置的识别用坐标变量来表示，坐标变量可以是长度，也可以是角度。坐标轴的方向指向该坐标变量增加的方向，该方向也是坐标变量取任意常数时所得到的相应坐标面的法线方向。坐标轴的交点即为坐标原点。

1.2.1 直角坐标系

直角坐标系由三张正交的平面——x 坐标面（yOz 面）、y 坐标面（xOz 面）和 z 坐标面（xOy 面）相交成三条正交的直线——x 轴、y 轴和 z 轴，它们的正方向分别用单位矢量 $\boldsymbol{a}_x$、$\boldsymbol{a}_y$ 和 $\boldsymbol{a}_z$ 来表示，它们都是常矢量。

空间任意一点的位置 P（x, y, z）可用由原点指向 P 点的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 来表示，如图 1-7 所示，位置矢量在三个坐标轴上的标投影分别是 x，y 和 z，矢投影分别是 $\boldsymbol{a}_x x$，$\boldsymbol{a}_y y$ 和 $\boldsymbol{a}_z z$，于是位置矢量可表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_x x+\boldsymbol{a}_y y+\boldsymbol{a}_z z \tag{1.2.1}$$

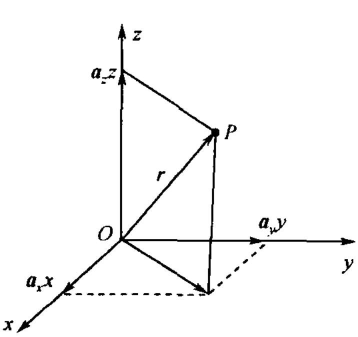

图 1-7 直角坐标系

类似地，若矢量函数$\boldsymbol{A}(x, y, z)$在任意点的标投影分别为$A_x(x, y, z)$，$A_y(x, y, z)$和$A_z(x, y, z)$，则可表示为

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\boldsymbol{a}_x A_x(x,y,z)+\boldsymbol{a}_y A_y(x,y,z)+\boldsymbol{a}_z A_z(x,y,z) \tag{1.2.2}$$

矢量加减法 若矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$表示为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x A_x+\boldsymbol{a}_y A_y+\boldsymbol{a}_z A_z \tag{1.2.3a}$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_x A_x+\boldsymbol{a}_y B_y+\boldsymbol{a}_z B_z \tag{1.2.3b}$$

则

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_x(A_x\pm B_x)+\boldsymbol{a}_y(A_y\pm B_y)+\boldsymbol{a}_z(A_z\pm B_z) \tag{1.2.3c}$$

矢量乘法 由于三个单位矢量相互正交，任意两个点积为

$$\boldsymbol{a}_x\cdot\boldsymbol{a}_x=\boldsymbol{a}_y\cdot\boldsymbol{a}_y=\boldsymbol{a}_z\cdot\boldsymbol{a}_z=1 \tag{1.2.4}$$

或

$$\boldsymbol{a}_x\cdot\boldsymbol{a}_y=\boldsymbol{a}_y\cdot\boldsymbol{a}_z=\boldsymbol{a}_z\cdot\boldsymbol{a}_x=0 \tag{1.2.5}$$

利用以上两式结果和乘法分配律，矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的点积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}&=(\boldsymbol{a}_x A_x+\boldsymbol{a}_y A_y+\boldsymbol{a}_z A_z)\cdot(\boldsymbol{a}_x B_x+\boldsymbol{a}_y B_y+\boldsymbol{a}_z B_z)\\&=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

矢量$\boldsymbol{A}$的模值

$$A=\sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}=\sqrt{A_x^{\ 2}+A_y^{\ 2}+A_z^{\ 2}} \tag{1.2.7}$$

三个单位矢量$\boldsymbol{a}_x$、$\boldsymbol{a}_y$和$\boldsymbol{a}_z$之间呈右手螺旋关系，其叉积为

$$\boldsymbol{a}_x\times\boldsymbol{a}_x=\boldsymbol{a}_y\times\boldsymbol{a}_y=\boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{a}_z=\boldsymbol{0} \tag{1.2.8}$$

$$\boldsymbol{a}_x\times\boldsymbol{a}_y=\boldsymbol{a}_z,\quad \boldsymbol{a}_y\times\boldsymbol{a}_z=\boldsymbol{a}_x,\quad \boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{a}_x=\boldsymbol{a}_y \tag{1.2.9}$$

利用以上两式结果和乘法分配律，矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的叉积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=(\boldsymbol{a}_x A_x+\boldsymbol{a}_y A_y+\boldsymbol{a}_z A_z)\times(\boldsymbol{a}_x B_x+\boldsymbol{a}_y B_y+\boldsymbol{a}_z B_z)\\&=\boldsymbol{a}_x(A_yB_z-A_zB_y)+\boldsymbol{a}_y(A_zB_x-A_xB_z)+\boldsymbol{a}_z(A_xB_y-A_yB_x)\end{aligned} \tag{1.2.10}$$

上式结果还可以很方便地写成行列式的形式

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{1.2.11}$$

注意，上式只是为了方便记忆借用了行列式的形式，并不具有行列式的性质，因此只能按照第一行展开。

三矢量的混合积也可写成行列式的形式

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}C_x & C_y & C_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{1.2.12}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com