● 高 等 学 校 教 材

线性代数

主　编　赵志新　徐明华

副主编　刘玉清　吴春青

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

线性代数

Xianxing Daishu

主　编　赵志新　徐明华

副主编　刘玉清　吴春青

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书参照最新制订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成，每章均通过具体实例提出要解决的问题、引入相关概念，同时提出解决问题的思路和方法，并尝试通过数学实验进行用计算机解决线性代数问题的训练。

全书共分六章，内容包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性、矩阵的对角化、二次型以及 MATLAB 在线性代数中的应用。每章后附知识点提要，并配备大量习题和模拟自测题，书后附习题解答。

本书可作为高等学校理工科（非数学类专业）与经济管理类学科的教材使用，也可供相关专业的成人教育学生和工程技术人员使用。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/赵志新，徐明华主编．—北京：高等教育出版社，2011.12
ISBN 978-7-04-033798-3
Ⅰ.①线… Ⅱ.①赵… ②徐… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第228916号

策划编辑 张彦云　责任编辑 张彦云　封面设计 于文燕　版式设计 余 杨
插图绘制 黄建英　责任校对 刘春萍　责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　址	北京市西城区德外大街4号	网　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　刷	涿州市星河印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　张	13.5	版　次	2011年12月第1版
字　数	250千字	印　次	2011年12月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　价	20.20元

物 料 号　33798-00

前　言

线性代数是大学数学课程中的一门重要基础课。它是大学理工类、经济管理类等学科各专业学生的必修课,也是全国硕士研究生入学统一考试的必考内容,更是现代化建设中的重要工具。

本书是编者根据在江苏工业学院及常州大学进行多年教学实践和改革探索的经验编写而成的,其基本内容符合最新制订的"工科类本科数学基础课程教学基本要求",并适当尝试了一些改革,如介绍了数学软件 MATLAB 在线性代数运算中的基本功能,进行了数学实验的初步训练。编者认为,让学生应用数学知识并利用计算机来解决实际问题是当前数学教学中值得重视的环节。

本书在编写过程中力求叙述清晰、说理详尽、通俗易懂、深入浅出,对重点内容列举了大量有代表性的例题,结合实例总结出部分定理的条件与结论,目的是使读者易于理解和掌握这些难点。全书在致力于强调内容的科学性与系统性的同时,注重每章都通过一些具体实例提出要解决的问题,并引入相关概念便于学生理解接受,同时提出解决问题的思路及方法。

全书共分六章,第一章到第五章是线性代数的基本内容。第一章主要介绍了行列式的基本概念及其计算,并包含了行列式的一个应用——克拉默法则。第二章介绍了矩阵的代数运算、可逆矩阵、矩阵的初等变换、矩阵的秩、分块矩阵的概念以及有关性质。作为应用,在第二章的最后讨论了用消元法解线性方程组与线性方程组有解的条件。第三章讨论了 n 维向量的线性关系和向量组的秩的概念,并在此基础上讨论了线性方程组解的结构。第四章在介绍了矩阵的特征值和特征向量以及矩阵相似的概念后讨论了方阵的对角化问题。第五章介绍了实二次型的概念和化二次型为标准形的方法,并讨论了正定二次型的相关性质。此外,本书在第六章还介绍了数学软件 MATLAB 的基本使用方法及其用于解决最基本的线性代数问题的有关指令,并给出了若干应用实例,可用于计算机辅助教学。书后附有习题解答。

参加本书编写的人员有:赵志新、徐明华、刘玉清、石澄贤、吴春青、张洪波、周桦、李博、康慧燕、童凯郁、王峰等。本书可作为高等学校理工科(非数学类专业)与经济管理类学科的线性代数教材(32 ~ 40 学时),也可供相关专业的成人

教育学生和工程技术人员使用。在教学中,各专业可根据具体要求对本书内容予以取舍。本书在编写过程中,得到了常州大学各级领导及同事们的大力支持,特别得到了学校教材委员会的大力支持,特在此深表谢意。

由于编者水平有限,不妥甚至谬误之处在所难免,恳请读者批评指正。

编　者

2011年4月于江苏常州

目　录

第一章　行列式 ………………………………………………………… 1

第一节　二阶与三阶行列式 ………………………………………… 1

第二节　n 阶行列式的定义 ………………………………………… 4

第三节　行列式的性质 ……………………………………………… 8

第四节　行列式按行(列)展开 …………………………………… 11

第五节　克拉默(Cramer)法则 …………………………………… 18

第一章知识点提要 ………………………………………………… 22

习题一 ……………………………………………………………… 24

第一章模拟自测题 ………………………………………………… 26

第二章　矩阵 …………………………………………………………… 29

第一节　矩阵的概念 ……………………………………………… 29

第二节　矩阵的运算 ……………………………………………… 33

第三节　矩阵的逆 ………………………………………………… 45

第四节　矩阵的分块 ……………………………………………… 51

第五节　矩阵的初等变换与矩阵的秩 …………………………… 58

第六节　线性方程组的解 ………………………………………… 69

第二章知识点提要 ………………………………………………… 77

习题二 ……………………………………………………………… 81

第二章模拟自测题 ………………………………………………… 87

第三章　向量组的线性相关性 ………………………………………… 89

第一节　n 维向量及其线性运算 ………………………………… 89

第二节　向量组的线性相关性 …………………………………… 92

第三节　向量组的秩 ……………………………………………… 97

第四节　向量空间 ………………………………………………… 104

第五节　齐次线性方程组 ………………………………………… 107

第六节　非齐次线性方程组 ……………………………………… 114

第三章知识点提要 ………………………………………………… 116

习题三 ……………………………………………………………… 120

第三章模拟自测题 ………………………………………………… 124

第四章　矩阵的对角化 ………………………………………………… 126

第一节　矩阵的特征值与特征向量 ……………………………… 126

第二节　相似矩阵和矩阵的对角化 …… 131
第三节　向量的内积和施密特正交化方法 …… 136
第四节　实对称矩阵的相似对角矩阵 …… 141
第四章知识点提要 …… 146
习题四 …… 149
第四章模拟自测题 …… 152
第五章　二次型 …… 154
第一节　二次型及其矩阵表示 …… 154
第二节　化实二次型为标准形 …… 157
第三节　惯性定理与正定二次型 …… 167
第五章知识点提要 …… 172
习题五 …… 174
第五章模拟自测题 …… 176
第六章　MATLAB 在线性代数中的应用 …… 177
第一节　MATLAB 基础 …… 177
第二节　MATLAB 在线性代数中的应用 …… 181
第六章知识点提要 …… 189
习题六 …… 189
第六章模拟自测题 …… 191
习题解答 …… 192
参考文献 …… 208

第一章 行列式

在初等数学中,我们用代入消元法或加减消元法求解二元和三元线性方程组,可以看出,线性方程组的解完全由未知量的系数与常数项确定.为了更清楚地表达线性方程组的解和未知量的系数与常数项的关系,本章先引入二阶和三阶行列式的概念,并在二阶和三阶行列式的基础上,给出 n 阶行列式的定义并讨论其性质,进而把 n 阶行列式应用于求解 n 元线性方程组.事实上行列式是一种常用的数学工具,在数学及其他学科中都有着广泛的应用.

第一节 二阶与三阶行列式

一、二元线性方程组与二阶行列式

二阶和三阶行列式是从研究二元与三元线性方程组的解引出的,故先讨论解线性方程组的问题.

设含有两个未知量 x_1,x_2 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

用消元法求解.

为消去未知数 x_2,以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘上列两方程的两端,然后两个方程相减,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

同样消去 x_1,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - a_{21}b_1,$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,则

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

引进记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{1.3}$$

称其为二阶行列式. 它的值定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式(1.3)的元素,元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标,表明该元素位于第 i 行,第二个下标 j 称为列标,表明该元素位于第 j 列.

二阶行列式的值的计算,可用对角线法则来记忆. 把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**,a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**副对角线**(见图 1-1),于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上的两元素之积所得的差.

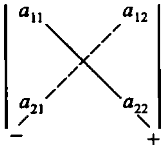

图 1-1

则(1.2)式为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

$$x_2=\frac{b_2a_{11}-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

二、三阶行列式

定义 1.1 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1.4}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.5}$$

(1.5)式称为数表(1.4)所确定的三阶行列式.

上述定义表明三阶行列式含有 6 项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,其规律遵循如图 1-2 表示的对角线法则:

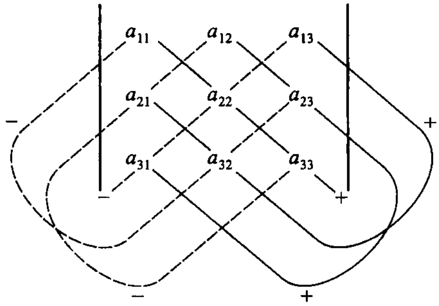

图 1-2

即实线上元素之积在其前加正号,虚线上元素之积在其前加负号.

例 1.1　计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

解　按对角线法则,有

$$\begin{aligned} D &= (-2) \times 0 \times 1 + 2 \times 5 \times 3 + 1 \times 1 \times 2 - 1 \times 0 \times 3 \\ &\quad - 2 \times 1 \times 1 - (-2) \times 5 \times 2 \\ &= 0 + 30 + 2 - 0 - 2 + 20 = 50. \end{aligned}$$

例 1.2　求解方程

$$\begin{vmatrix} 1-x & -2 & 4 \\ 2 & 3-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

解　方程左端的三阶行列式

$$D = (1-x)^2(3-x) - 2 + 8 - 4(3-x) + 4(1-x) - (1-x) = 0,$$

即 $$-x^3+5x^2-6x=0,$$

解得 $$x=0 \text{ 或 } x=2 \text{ 或 } x=3.$$

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式,为研究四阶及更高阶行列式,下面引入 n 阶行列式的概念.

第二节 n 阶行列式的定义

一、排列及其逆序数

定义 1.2 把 n 个不同的元素排成一列,称为这 n 个元素的全排列(也简称排列).

例如,312 是 3 个元素 1,2,3 的一个排列,652413 是 6 个元素 1,2,3,4,5,6 的一个排列.

n 个不同元素的所有排列的种数,通常用 P_n 表示.不难知道

$$P_n=n!$$

对于 n 个不同的元素,先规定各元素之间有一标准次序(例如 n 个不同的自然数,规定由小到大为标准次序).

定义 1.3 在一个排列中,当某两个元素的先后次序与标准次序不同时,那么它们就称为一个**逆序**;一个排列中所有逆序的总数称为这个**排列的逆序数**,用字母 t 表示.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**,逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例 1.3 求排列 623541 的逆序数.

解 在排列 623541 中,6 排在首位,逆序数为 0,2 的前面比 2 大的数有一个 6,故逆序数为 1,3 的前面比 3 大的数有一个 6,故逆序数为 1,5 的前面比 5 大的数有一个 6,故逆序数为 1,4 的前面比 4 大的数有两个:6 和 5,故逆序数为 2, 1 的前面比 1 大的数有五个:6、2、3、5、4,故逆序数为 5,于是这个排列的逆序数为

$$t=1+1+1+2+5=10.$$

定义 1.4 将一个排列中某两个元素的位置互相对调,而其余的元素不动,就得到另一个排列,这种对排列的变换方法称为**对换**.将相邻两个元素对换.称为**相邻对换**.

例如,排列 2413 经过 2 与 3 的对换就得到排列 3412.

定理 1.1 一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

证明 略.

推论　奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

二、n 阶行列式

为了给出 n 阶行列式的定义，先来研究三阶行列式的结构. 三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.6}$$

分析(1.6)式可以得到如下结论.

1. 上述定义表明三阶行列式含有 6 项，每项均为不同行不同列的三个元素的乘积. 因此(1.6)式右端的任一项除正负号外可以写成

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

显然 $p_1p_2p_3$ 是数 1、2、3 的全排列.

2. 各项的正负号由列标的排列的奇偶性决定. 列标的排列 $p_1p_2p_3$ 是偶排列时，该项取正；列标的排列是奇排列时，该项取负.

那么，三阶行列式总可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 1、2、3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和.

类似地，我们可以定义 n 阶行列式.

定义 1.5　设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^t$，得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.7}$$

的项,共 $n!$ 项,其中 t 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数. 所有形如(1.7)的 $n!$ 项的和

$$\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为 **n 阶行列式**,记作

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记 $\det(a_{ij})$,数 a_{ij} 称为**行列式** $\det(a_{ij})$ **的元素**. 即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

当 $n=1$ 时 $|a_{11}|=a_{11}$,不要和绝对值记号相混淆. $n=2,3$ 时就是二阶、三阶行列式.

例 1.4 证明对角行列式(即对角线上的元素为 a_{ij},其余元素均为 0 的行列式)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 由定义知

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^t a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

$$\left(n(n-1)\cdots 21\text{ 的逆序数 }t=1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.\right)$$

第二个式子显然.

例 1.5　证明上三角形行列式(即主对角线以下的元素都为 0 的行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证　根据定义 1.5,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$= \sum_{p_n\neq n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} + \sum_{p_n=n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{n-1,p_{n-1}}a_{np_n}$$

(注意 $p_n\neq n$ 时 $a_{np_n}=0$)

$$=\left[\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{n-1,p_{n-1}}\right]a_{nn},$$

又因为排列 $p_1p_2\cdots p_{n-1}$ 的逆序数与排列 $p_1p_2\cdots p_{n-1}n$ 的逆序数相同,故

$$\text{上式}=\Big[\sum_{p_{n-1}\neq n-1}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{n-1,p_{n-1}} +$$

$$\sum_{p_{n-1}=n-1}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{n-2,p_{n-2}}a_{n-1,p_{n-1}}\Big]a_{nn}$$

$$=\left[\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{n-2,p_{n-2}}\right]a_{n-1,n-1}a_{nn}=\cdots$$

$$=(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

注　对于 n 阶行列式的任一项

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

由于乘法的可交换性,可以把该项列指标组成的排列 $p_1p_2\cdots p_n$,经过 s 次对换变成标准排列 $12\cdots n$,与此同时,行指标组成的标准排列 $12\cdots n$ 经过 s 次对换变成

排列 $q_1q_2\cdots q_n$，即有

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

根据定理 1.1，知 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 具有相同的奇偶性，所以

$$(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} = (-1)^{t(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

因此，n 阶行列式也可定义为

$$D = \sum(-1)^{t(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

第三节 行列式的性质

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T}. 即如果

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1 行列式 D 与它的转置行列式相等，即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

证 记 D 的一般项为

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

它的元素在 D 中位于不同的行不同的列，因而在 D^{T} 中位于不同的列不同的行. 所以这 n 个元素的乘积在 D^{T} 中应为

$$a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

由定理 1.1 可知其符号也是 $(-1)^t$. 因此，D 与 D^{T} 是具有相同项的行列式，所以 $D = D^{\mathrm{T}}$.

有了这个性质，行列式对行成立的性质都适用于列的情况，反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行（列），行列式变号.

证　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (i\text{行}) \\ \\ (s\text{行}), \\ \\ \\ \end{matrix}$$

交换 D 的第 i 行与第 s 行，得到行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (i\text{行}) \\ \\ (s\text{行}), \\ \\ \\ \end{matrix}$$

记 D 的一般项中 n 个元素的乘积为

$$a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

它的元素在 D 中位于不同的行不同的列，因而在 D_1 中也位于不同的行不同的列，所以也是 D_1 的一般项的 n 个元素乘积. 由于 D_1 是交换 D 的第 i 行与第 s 行，而各元素所在的列并没有改变，所以它在 D 中的符号为

$$(-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_s\cdots p_n)},$$

在 D_1 中的符号则为

$$(-1)^{t(p_1\cdots p_s\cdots p_i\cdots p_n)},$$

由于排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_s\cdots p_n$ 与排列 $p_1\cdots p_s\cdots p_i\cdots p_n$ 的奇偶性相反，所以

$$(-1)^{t(p_1\cdots p_s\cdots p_i\cdots p_n)}=-(-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_s\cdots p_n)},$$

因而 D_1 中的每一项都是 D 的相应项的相反数，所以 $D_1=-D$.

推论　如果行列式中有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

证　将这两行(列)互换，有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 3　如果行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，则其值

等于用数 k 乘此行列式.

第 i 行(列)乘以 k,记作 $r_i \times k(c_i \times k)$.

推论　行列式的某一行(列)的所有元素的公因子可提到行列式符号之外.

第 i 行(列)提出公因子 k,记作 $r_i \div k(c_i \div k)$.

性质 4　行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零.

性质 5　若行列式的某一行(列)的元素都是两个数的和,例如

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D = D_1 + D_2$,其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论　若行列式的某一行(列)的元素都是 m 个数(m 为大于 2 的整数)的和,则此行列式可以写成 m 个行列式的和.

性质 6　将行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数后加到另一行(列)对应的元素上,行列式的值不变.

第 j 行(列)乘以 k 加到第 i 行(列)上,记作 $r_i + kr_j$(或 $c_i + kc_j$),性质 6 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i + kr_j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (i \neq j).$$

性质 2,3,6 介绍了行列式关于行和列的三种运算,即交换两行(列)、某行