应用统计学系列教材 Texts in Applied Statistics

实变函数论讲义

Theory of Functions of a Real Variable

张 波 张伦传 编

Zhangbo Zhanglunchuan

清华大学出版社

应用统计学系列教材 Texts in Applied Statistics

实变函数论讲义

Theory of Functions of a Real Variable

张　波　张伦传　编

Zhangbo　Zhanglunchuan

清华大学出版社

北京

内容简介

本书以集合论基本知识为出发点，重点讲授勒贝格测度和勒贝格积分理论，核心是勒贝格积分，而特征函数是联系可测集、可测函数和勒贝格积分的纽带．对于 p 次可积函数类，从空间的角度刻画了其整体性质，核心是完备性和可分性．最后通过引入绝对连续函数概念，获得了牛顿-莱布尼茨公式成立的充要条件．

本书可作为统计学、数学等学科的教材或相关专业人员的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

实变函数论讲义/张波，张伦传编．--北京：清华大学出版社，2012.8

（应用统计学系列教材）

ISBN 978-7-302-29092-6

Ⅰ．①实…　Ⅱ．①张…　②张…　Ⅲ．①实变函数论－高等学校－教材　Ⅳ．①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 130767 号

责任编辑：刘　颖
封面设计：常雪影
责任校对：王淑云
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　**邮　　编**：100084
　社 总 机：010-62770175　**邮　　购**：010-62786544
　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市金元印装有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm×230mm　**印　　张**：10　**字　　数**：170 千字
版　　次：2012 年 8 月第 1 版　**印　　次**：2012 年 8 月第1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：19.80 元

产品编号：043295-01

应用统计学系列教材

Texts in Applied Statistics

序

随着社会经济的飞速发展，统计学课程设置的不断调整，统计学教材已经有了很大的变化.为了适应这些变化，我们从2000年开始编写面向21世纪统计学系列教材，经过近4年的实践，该系列教材取得了较好的效果，基本实现了预定的目标.然而目前学科的发展和社会的进步速度相当快，其中的一些教材已经需要进一步修订，也有部分内容成熟、适合教学需要的教材没有列入编写计划.

为满足应用统计科学和我国高等教育迅速发展的需求，清华大学出版社和施普林格出版社（Springer-Verlag）合作，倡议出版这一套“应用统计学系列教材”，作为对现有统计学教材的全面补充和修订.这套教材具有以下特点：

1. 此套丛书属于开放式的，一旦有好的选题，即可列入出版计划.

2. 在教材选择上，拓宽了范围.有些教材主要面向经济类统计学专业，包括金融统计、风险管理与精算方面的教材.部分教材面向人文社科专业，而另外一些教材则面向自然科学领域，包括生物统计、医学统计、公共卫生统计等.

3. 本套教材的编写者都是活跃在教学、科研第一线的教师，他们能够积极地、广泛地吸收国内外最新的优秀成果.能够在教学中反复对教材进行补充修订和完善.

4. 强调与计算机应用的结合，在教材编写中，注重计算机软件的应用，特别是可编程软件的应用.对于那些仅限于应用方法的教材，充分考虑读者的需求，尽量介绍简单易学的

"傻瓜"软件.

5. 本套教材包括部分优秀国外教材译著，对于目前急需，而国内尚属空白的教材，选择部分国外具有广泛影响的教材，进行翻译出版.

我们希望这套系列教材的出版能够对我国应用统计科学的教育和我国统计事业的健康发展起到积极作用.感谢参与教材编写的中国人民大学统计学院和兄弟院校的教师以及进行审阅的同行专家.让我们大家共同努力，创造我国应用统计学科新的辉煌.

易丹辉

2004 年 1 月

前 言

实变函数论是中国人民大学统计学院为本科生开设的一门选修课，总课时约 54 学时.从实变函数的内在逻辑体系来看，集合及其运算（包括集合列的极限运算）是基础，开、闭集是构成可测集的基石；而可测集上的特征函数不但是构造一般可测函数的基础，而且是联系测度和积分的纽带，因此，我们对其进行重点讲述. 在内容的选取上，本书充分考虑了统计学专业的特点，去掉了一些复杂的数学证明. 在学习勒贝格积分之后，马上学习 L^p 空间，为进一步学习概率论与数理统计的后续课程做好准备.

本书的编写力求做到下面两点：

第一，本着由浅入深、循序渐进的原则.比如，第 2 章测度理论的编写，先详细讨论直线上勒贝格测度及直线上勒贝格可测集的构造，然后以此为基础，相关的结论可平行推广到 n 维欧氏空间上.由此进一步考虑一般抽象空间上的测度论.

第二，注重学以致用.在保持实变函数理论核心知识体系的同时，尽量简明扼要，使读者既见树木又见森林；每章均配备有代表性的例题和习题，这样不但有助于加深对抽象概念及命题的认识和理解，而且有助于对实变函数理论特有的推理方法的理解和掌握.

总之，设置本课程的目的，在于培养学生掌握有关勒贝格测度与勒贝格积分方面的基本知识和技能，培养严谨的数学思维能力，提高应用现代数学方法分析和解决问题的能力.

教学应达到的总体目标是:

1. 使学生系统地掌握各种勒贝格测度、勒贝格积分的定义思想与过程;

2. 使学生掌握勒贝格测度与勒贝格积分的特点、应用条件以及与黎曼积分之间的关系;

3. 提高学生掌握和运用现代数学基本知识的能力.

本书根据作者在中国人民大学统计学院讲授实变函数论所积累的讲稿整理而成. 课程的助教和几位研究生为此付出了很多努力，在此表示感谢. 特别要感谢周生彬博士，在内容修改和习题配置方面他花费了许多宝贵时间，没有他的贡献，本书很难按时完成. 同时，要感谢中国人民大学统计学院将这本选修课讲义列为学院的“十二五”规划教材，使得本书有机会完成写作和出版.

由于编者水平所限，谬误之处在所难免，敬请批评指正.

编　者

2012 年 2 月

目录

第1章 集合与点集

实变函数论作为现代分析数学的基础，其知识结构是建立在集合论之上的. 集合论产生于19世纪70年代，由德国数学家康托尔(Cantor)创立，它是整个现代数学的开端及逻辑基础. 作为本科教材，本章只介绍必需的集合论知识，而不涉及有关集合论公理的讨论.

1.1 集合及相关概念

大家在中学就认识了集合这个概念. 所谓集合，是指具有某种特定性质的对象的全体. 集合中的对象称为该集合的元素. 集合通常用大写英文字母 A，B，C，…表示；元素通常用小写英文字母 a，b，c，…表示. 今后用一些特殊的记号表示特殊的集合：$\mathbb{R}$ 表示全体实数形成的集合；$\mathbb{C}$ 表示全体复数形成的集合；$\mathbb{N}$，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$ 分别表示自然数集、整数集和有理数集. 另外，不含任何元素的集合称为空集，用记号 $\varnothing$ 表示.

集合的具体表示方法一般有两种：一种是枚举法，如集合 $\{1,2,3,4,5\}$；一种是描述法，例如，大于20的自然数组成的集合，可写为 $\{x \mid x>20$，且 x 为自然数$\}$. 一般地，若 A 是具有某种性质 P 的元素组成的集合，通常记为 $A=\{x \mid x$ 具有性质 $P\}$. 对于给定的某集合 A 及某对象 a，若 a 是 A 中的元素，就说 a 属于集合 A，记为 $a \in A$；否则，就说 a 不属于集合 A，记为 $a \notin A$. 给定两个集合 A 和 B，若 A 中的元素都属于 B，则称 A 是 B 的子集，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$；进而，若同时有 $A \subset B$ 和 $B \subset A$，则 $A=B$. 对于任意的非空集合 A，空集 $\varnothing$ 和 A 当然是 A 的子集，这两个子集称为平凡子集. 除此之外的子集称为真子集.

例 1.1.1 写出 $\{1,2,3\}$ 的所有子集，由此计算 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集的个数，其中 $n \in \mathbb{N}$.

$\{1,2,3\}$ 的所有子集是：$\varnothing$，$\{1,2,3\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，

共 $2^3=8$ 个. 一般地, $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集的个数是：

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n,$$

其中 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $(k\in\{0,1,\cdots,n\})$ 为组合数公式.

任给集合 A, 它的所有子集构成的集合称为它的幂集, 记为 2^A.

1.1.1　集合的运算

我们知道, 数可以进行运算, 并由此生成新的数. 类似地, 集合之间也可以进行运算, 并由此生成新的集合. 其中, 最常用的运算有“并”、“交”、“差”三种.

定义 1.1.1　任意给定集合 A 和 B, 集合 $\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的并集, 并集也称为和集, 记为 $A\cup B$, 或 $A+B$; 集合 $\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为它们的交集, 交集也称为积集, 记为 $A\cap B$, 或 AB; 推而广之, 给定集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$, 其中 Γ 是指标集, 则此集合族的并集与交集分别为

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=\{x \mid \exists\,\alpha\in\Gamma, x\in A_\alpha\};\tag{1.1}$$

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=\{x \mid \forall\,\alpha\in\Gamma, x\in A_\alpha\}.\tag{1.2}$$

集合 $\{x \mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 称为 A 与 B 的差集, 又称补集, 记为 $A\backslash B$, 或 $A-B$. 注意: 一般来说 $(A-B)\cup B$ 未必等于 A. 如果已知 $A\supset B$, 则 $A-B$ 称为 B 相对于 A 的余集, 记为 $\complement_A B$, 特别地, 如果我们在某一问题中所考虑的一切集合都是某一给定集合 S 的子集时, 集合 B 相对于 S 的余集就简称为 B 的余集, $\complement_S B$ 简记为 B^c. 而集合

$$(A-B)\cup(B-A)$$

称为 A 与 B 的对称差, 记为 $A\triangle B$.

例 1.1.2　设 $A_j=\left\{x\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant 1+\dfrac{1}{j}\right\}, j=1,2,\cdots, B_i=\left\{x\,\middle|\,-1+\dfrac{1}{i}\leqslant x\leqslant 1-\dfrac{1}{i}\right\}, i=1,2,\cdots, C_k=\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{1}{k}<x<\dfrac{1}{k}\right\}, k=1,2,\cdots$, 则

$$\bigcap_{j=1}^{n}A_j=\left\{x\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant 1+\frac{1}{n}\right\},\quad \bigcup_{i=1}^{m}B_i=\left\{x\,\middle|\,-1+\frac{1}{m}\leqslant x\leqslant 1-\frac{1}{m}\right\},$$

$$\bigcap_{k=1}^{p}C_k=\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{p}<x<\frac{1}{p}\right\}.$$

其中 $n,m,p\in\mathbb{N}$. 由此知

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 1\},\quad \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i=\{x\,|\,-1<x<1\},\quad \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k=\{0\}.$$

集合的并、交、差(补)运算满足下面的运算律：

定理 1.1.1 (1) 交换律

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A;$$

特别地

$$A\cap A=A,\quad A\cup A=A,\quad A\cup\varnothing=A,\quad A\cap\varnothing=\varnothing.$$

(2) 结合律

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,\quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

(3) 分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C);$$

一般地

$$A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A\cap B_\alpha).$$

(4) 大小关系

$$(A\cap B)\subset A\subset(A\cup B).$$

(5) 若 $A_\alpha\subset B_\alpha$，$\forall\alpha\in\Gamma$，则

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\subset\bigcup_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha,\quad \bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\subset\bigcap_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha;$$

特别地，若 $A_\alpha\subset C$ 或 $C\subset B_\alpha$，$\forall\alpha\in\Gamma$，则

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\subset C,\quad C\subset\bigcap_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha.$$

证明 下面仅证

$$A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A\cap B_\alpha).$$

任取 $x\in A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha\right)$，则 $x\in A$ 且 $\exists\alpha_0\in\Gamma$，使得 $x\in B_{\alpha_0}$，于是 $x\in\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A\cap B_\alpha)$，由 x 的任意性得 $A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha\right)\subset\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A\cap B_\alpha)$.

反过来，任取 $x\in\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A\cap B_\alpha)$，则 $\exists\alpha_0\in\Gamma$，使得 $x\in A\cap B_{\alpha_0}$，即 $x\in A$ 且 $x\in B_{\alpha_0}$，从而 $x\in A$ 且 $x\in\bigcup_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha$，故 $x\in A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha\right)$，由 x 的任意性得

$\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}(A\cap B_\alpha)\subset A\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha\right)$. 综合起来，等式成立. □

以下给出关于余集计算的部分性质.

定理 1.1.2　(1) $A-B=A\cap\ell_S B$；

(2) 若 $A\subset B$，则 $\ell_S A\supset\ell_S B$，$B\backslash A=B\cap A^c$；

(3) 对偶律(德摩根(De Morgan)律)　若 $A,B\subset X$，则

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,\quad (A\cap B)^c=A^c\cup B^c.$$

一般地

$$\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c,\quad \left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^c.$$

证明　下面仅证对偶律：若 $A,B\subset X$，则 $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，其余结合相关定义类似可得. 事实上，由补集定义，

$$\begin{aligned}(A\cup B)^c&=\{x\mid x\in X \text{ 且 } x\notin A\cup B\}=\{x\mid x\in X, x\notin A \text{ 且 } x\notin B\}\\&=\{x\mid x\in X, x\in A^c \text{ 且 } x\in B^c\}=A^c\cap B^c.\end{aligned}$$ □

德摩根律使我们通过余集的运算把并集变为交集，把交集变为并集. 这种转化在集合的运算及论证中是很有用的.

1.1.2　集合列的上极限和下极限

众所周知，数列可以讨论极限. 类似地，集合列也可以讨论极限. 以下我们给出集合列及其极限的定义.

定义 1.1.2　一列集合 $\{A_n\}(n=1,2,\cdots)$ 称为集合列，也可记为 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. 属于上述集合列中无限多个集的元素的全体所形成的集称为该集合列的上极限，或称为上限集，记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup A_n$；对于上述集合列，那些除了有限个下标外，属于该集合列中每个集合的元素的全体形成的集称为这个集合列的下极限，或称为下限集，记为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf A_n$.

等价地，

$\lim\limits_{n\to\infty}\sup A_n=\{x\mid$ 对于任意的自然数 n，存在 $k\geqslant n$，使得 $x\in A_k\}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\inf A_n=\{x\mid$ 存在 $n_0\in\mathbb{N}$，当 $n\geqslant n_0$ 时，$x\in A_n\}$.

由此知，

$$\lim_{n\to\infty}\inf A_n\subset\lim_{n\to\infty}\sup A_n.$$

进而，对于给定集合列$\{A_n\}$，若其上、下极限相等，则称集合列$\{A_n\}$收敛，其极限即为它的上(或下)极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$. 集合列的上(下)极限可以用“并”与“交”运算来表达.

定理 1.1.3 给定集合列$\{A_n\}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sup A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,\quad \lim_{n\to\infty}\inf A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.$$

证明 利用

$$\lim_{n\to\infty}\sup A_n=\{x\mid \forall n\in\mathbb{N},\exists k\geqslant n,\text{使得 } x\in A_k\} \tag{1.3}$$

来证明关于上极限的等式，关于下极限的情况可类似证得. 记 $A=\lim\limits_{n\to\infty}\sup A_n$，$B=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_m$. 事实上，设 $x\in A$，则对任意取定的 n，存在 $m>n$，使得 $x\in A_m$，即对任意 n，总有 $x\in\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_m$，故 $x\in B$，继而 $A\subset B$.

反之，设 $x\in B$，则对任意的 $n>0$，总有 $x\in\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_m$，即总存在 $m(m\geqslant n)$，使得 $x\in A_m$，故 $x\in A$，继而 $B\subset A$，从而 $A=B$，另一等式可同样证明. □

若集合列$\{A_n\}$满足：$A_n\subset A_{n+1}$，$n\in\mathbb{N}$，则称$\{A_n\}$是单调增加集合列；若 $A_n\supset A_{n+1}$，$n\in\mathbb{N}$，则称之为单调减少集合列. 统称为单调集合列. 由定理 1.1.3 易知，单调集合列是收敛的. 具体地，若$\{A_n\}$为单调增加集合列，则

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n;$$

若$\{A_n\}$为单调减少集合列，则

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n.$$

例 1.1.3 设$\{A_n\}$是如下一列点集：

$$A_{2m+1}=\left[0,2-\frac{1}{2m+1}\right],\quad m=0,1,2,\cdots,$$

$$A_{2m}=\left[0,1+\frac{1}{2m}\right],\quad m=1,2,\cdots.$$

我们来确定$\{A_n\}$的上、下极限.

因为闭区间$[0,1]$中的点属于每个 A_n，$n=1,2,\cdots$，而对于开区间$(1,2)$中

的每个点 x，必存在自然数 $N(x)$，使得当 $n>N(x)$ 时，有

$$1+\frac{1}{2n}<x\leqslant 2-\frac{1}{2n+1},$$

即当 $n>N(x)$ 时，$x\notin A_{2n}$，但 $x\in A_{2n+1}$.

换言之，对于开区间 $(1,2)$ 中的 x，具有充分大的奇数指标的集合都含有 x，即 $\{A_n\}$ 中有无限多个集合含有 x，而充分大的偶数指标的集合都不含有 x，即 $\{A_n\}$ 中不含有 x 的集合不会是有限个. 又区间 $[0,2)$ 以外的点都不属于任何 A_n，因此

$$\limsup_{n\to\infty} A_n=[0,2),\quad \liminf_{n\to\infty} A_n=[0,1].$$

例 1.1.4　设 $\{A_n\}$ 为：当 $n=2k$ 时，

$$A_{2k}=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant 2k,0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2k}\right\},\quad k\in\mathbb{N};$$

当 $n=2k+1$ 时，

$$A_{2k+1}=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2k+1},0\leqslant y\leqslant 2k+1\right\},\quad k\in\mathbb{N}.$$

则

$$\limsup_{n\to\infty} A_n=\{(x,0)\mid x\geqslant 0\}\cup\{(0,y)\mid y\geqslant 0\};\quad \liminf_{n\to\infty} A_n=\{(0,0)\}.$$

定义 1.1.3　设 A,B 是两个集合，称一切有序“元素对”(x,y)（其中 $x\in A,y\in B$）形成的集合为 A 与 B 的直积集或笛卡儿(Descartes)积，记为 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\},$$

其中 $(x,y)=(x',y')$ 是指 $x=x',y=y'$，$X\times X$ 也记为 X^2.

例 1.1.5　设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5\}$，则

$$A\times B=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}.$$

例 1.1.6　$[0,1]\times[0,1]$ 为平面上单位闭正方形.

例 1.1.7　$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}=\mathbb{Q}^2$ 为平面上有理点集.

习　　题

1. 试证：

(1) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

(2) $(A\setminus B)\cup B=(A\cap B)\setminus B$ 的充要条件是 $B=\varnothing$；

(3) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$.