高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

丛书主编 马德高

星火·燎原

复变函数论
辅导及习题精解

（钟玉泉·第三版）

本册主编 张天德 张宏飞

典型例题分析 + 教材习题答案 + 同步自测练习

延边大学出版社

丛书主编 马德高

复变函数论辅导及习题精解

（钟玉泉·第三版）

本册主编 张天德 张宏飞
副主编 孙 娜 乔 凤

延边大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数论辅导及习题精解 ：钟玉泉第3版 / 马德高主编. -- 延吉 ：延边大学出版社，2011.7

ISBN 978-7-5634-1843-5

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①复变函数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第136255号

复变函数论辅导及习题精解

主编:马德高
责任编辑:何　方
出版发行:延边大学出版社
社址:吉林省延吉市公园路977号　　**邮编**:133002
网址:http://www.ydcbs.com
E-mail:ydcbs@ydcbs.com
电话:0433-2732435　　**传真**:0433-2732434
印刷:莱芜市凤城印务有限公司
开本:880×1230　1/32
印张:7　**字数**:200千字
版次:2011年7月第1版第1次印刷
ISBN 978-7-5634-1843-5

定价:9.80元

前言

《复变函数论》是数学专业最重要的一门基础课之一。钟玉泉编写的《复变函数论》是一套深受读者欢迎并多次获奖的优秀教材，被全国许多院校采用。经过历次修订后的第三版，保持了其一贯的体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点，并根据近代数学发展的潮流，做了相应的调整，进一步强调提高学生的综合素质并激发学生的创新能力。为帮助、指导广大读者学好这门课程，我们编写了这本与钟玉泉主编的《复变函数论》(第三版)完全配套的《复变函数论辅导及习题精解》，以帮助加深对基本概念的理解，加强对基本解题方法与技巧的掌握，进而提高学习能力和应试水平。

本书共分九章。章节的划分与教材一致。每章包括四大部分内容：

一、知识结构及内容小结：先用网络结构图的形式揭示出本章知识点之间的有机联系，以便于学生从总体上系统地掌握本章知识体系和核心内容；然后用表格形式简要对每节涉及的基本概念和基本公式进行了系统的梳理，并指出理解与应用基本概念、公式时需注意的问题以及各类考试中经常考查的重要知识点。

二、经典例题解析：精选部分反映各章基本知识点和基本方法的典型例题，并按照题型分类，给出了详细解答，以提高读者的综合解题能力。

三、教材习题全解：对教材里该章节全部习题作详细解答，与市面上习题答案不全的某些参考书有很大的不同。在解题过程中，对部分有代表性的习题，设置了“思路探索”以引导读者尽快找到解决问题的思路和方法；安排有“方法点击”来帮助读者归纳解决问题的关键、技巧与规律。有的习题还给出了一题多解，以培养读者的分析能力和发散思维能力。

四、同步自测题及参考答案：精选有代表性、测试价值高的题目，以检测学习效果，提高应试水平。

全书内容编写系统、新颖、清晰、独到，充分体现了如下三大特色：

一、知识梳理清晰、简洁：直观、形象的图表总结，精炼、准确的考点提炼，权威、独到的方法归纳，将教材内容抽丝剥茧、层层展开，呈现给读者简明扼要、层次分明的知识结构，便于读者快速复习、高效掌握，形成稳固、扎实的知识网，为提高解题能力和数学思维水平夯实基础。

二、能力提升迅速、持续：所有重点、难点、考点，统统归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出丰富的精选例题、考研例题，举一反三、深入讲解，真正将知识掌握和解题能力提升高效结合、浑然一体，一举完成。

三、内容深入浅出、易学易用：为适应广大学子的不同需求，本书进行了科学的编排，方便考生不仅可以在有教师指导的情况下使用更是自学备考的必备用书。

本书注意博采众家之长，参考了多本同类书籍，吸取了不少养分。在此向这些书籍的编著者表示感谢。由于我们水平有限，书中疏漏与不妥之处，在所难免，敬请广大读者提出宝贵意见，以便再版时更正、改进。

编者

目 录

第 1 章 复数与复变函数 …… (1)

本章知识结构及内容小结 …… (1)

经典例题解析 …… (8)

本章教材习题全解 …… (11)

同步自测题及参考答案 …… (27)

第 2 章 解析函数 …… (30)

本章知识结构及内容小结 …… (30)

经典例题解析 …… (36)

本章教材习题全解 …… (38)

同步自测题及参考答案 …… (54)

第 3 章 复变函数的积分 …… (57)

本章知识结构及内容小结 …… (57)

经典例题解析 …… (64)

本章教材习题全解 …… (68)

同步自测题及参考答案 …… (81)

第 4 章 解析函数的幂级数表示法 …… (85)

本章知识结构及内容小结 …… (85)

经典例题解析 …… (93)

本章教材习题全解 …… (98)

同步自测题及参考答案 …… (109)

第 5 章 解析函数的洛朗展式与孤立奇点 …… (112)

本章知识结构及内容小结 …… (112)

经典例题解析 …… (118)

本章教材习题全解 …… (121)

同步自测题及参考答案 …… (135)

第 6 章　留数理论及应用 ······ (140)
本章知识结构及内容小结 ······ (140)
经典例题解析 ······ (145)
本章教材习题全解 ······ (150)
同步自测题及参考答案 ······ (165)
第 7 章　共形映射 ······ (170)
本章知识结构及内容小结 ······ (170)
本章教材习题全解 ······ (175)
同步自测题及参考答案 ······ (189)
第 8 章. 解析延拓 ······ (192)
本章知识结构及内容小结 ······ (192)
本章教材习题全解 ······ (196)
同步自测题及参考答案 ······ (205)
第 9 章　调和函数 ······ (208)
本章知识结构及内容小结 ······ (208)
本章教材习题全解 ······ (209)

第 1 章 复数与复变函数

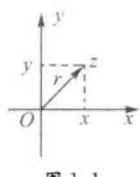
本章知识结构及内容小结

【本章知识结构】

- 复数与复变函数
  - 复数
    - 复数域
    - 复平面
    - 复数的模与辐角
    - 复数的乘幂与方根
    - 共轭复数
    - 复数在几何上的应用举例
  - 复平面上的点集
    - 平面点集的几个基本概念
    - 区域与若尔当曲线
  - 复变函数
    - 复变函数的概念
    - 复变函数的极限与连续
  - 复球面与无穷远点
    - 复球面
    - 扩充复平面上的几个概念

【本章内容小结】

1. 复数概述

名　称	内　容	说　明
复数定义（代数形式）	形如$z=x+\mathrm{i}y$或$z=x+y\mathrm{i}$的数，称为复数，其中x,y为任意实数，i满足$\mathrm{i}^2=-1$，称为虚数单位. 实数x,y分别称为复数z的实部和虚部，记为$x=\mathrm{Re}\,z,y=\mathrm{Im}\,z$.	
复数相等（代数形式）	复数$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$及$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$相等，是指它们的实部与实部相等，虚部与虚部相等，即 $x_1+\mathrm{i}y_1=x_2+\mathrm{i}y_2\Leftrightarrow x_1=x_2,y_1=y_2$	
共轭复数	复数$z=x+\mathrm{i}y$的共轭复数记为$\bar{z}=\overline{x+\mathrm{i}y}=x-\mathrm{i}y$	
复数的运算法则	对于复数$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，规定： (1) $z_1\pm z_2\xlongequal{\Delta}(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$ (2) $z_1z_2\xlongequal{\Delta}(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$ (3) $\dfrac{z_1}{z_2}\xlongequal{\Delta}\dfrac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}$ $=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2}+\mathrm{i}\dfrac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2}(z_2\neq0)$ (4) 全体复数按上述运算后构成复数域，常用$\mathbf{C}$表示. (5) 在复数域中一般不能比较大小	
复平面	1. 复数$z=x+\mathrm{i}y$本质上由一对有序实数(x,y)唯一确定，(x,y)称为复数z的实数对形式，可以借助于横坐标为x，纵坐标为y的点来表示复数$z=x+\mathrm{i}y$(图1-1)，这样表示复数z的平面称为复平面或z平面，复平面也常用$\mathbf{C}$表示. 2. 在复平面上，从原点到点$z=x+\mathrm{i}y$所引的向量与这个复数z构成一一对应关系，这种对应关系使复数的加(减)法与向量的加(减)法之间保持一致.	 图1-1

名　称	内　容	说　明
复数的模	1. 用向量$\overrightarrow{Oz}$来表示复数$z=x+\mathrm{i}y$,向量$\overrightarrow{Oz}$的长度称为复数z的模或绝对值,以符号$\|z\|$或r表示,因而有$r=\|z\|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0$且$\|z\|=0\Leftrightarrow z=0$ 2. 有关模的几个不等式(或结论) (1) $\|x\|\leqslant\|z\|,\|y\|\leqslant\|z\|,\|z\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ (2) $\|z_1+z_2\|\leqslant\|z_1\|+\|z_2\|$ $\left\|\|z_1\|-\|z_2\|\right\|\leqslant\|z_1-z_2\|$ (三角不等式) (3) $\|z_1-z_2\|$表示点z_1与点z_2的距离,记为$d(z_1,z_2)=\|z_1-z_2\|$	
复数的辐角	1. 实轴正向到非零复数$z=x+\mathrm{i}y$所对应的向量$\overrightarrow{Oz}$间的夹角θ合于 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ 称为复数z的辐角,记为$\theta=\mathrm{Arg}\,z$ 2. 任一非零复数z有无穷多个辐角,现以$\arg z$表示其中的一个特定值并称合条件$-\pi<\arg z\leqslant\pi$的一个为$\mathrm{Arg}\,z$的主值,或称之为z的主辐角,于是 $\theta=\mathrm{Arg}\,z=\arg z+2k\pi(k=0,\pm1,\cdots)$ 3. 复数z常用三种形式 $z=x+\mathrm{i}y$(代数形式) $=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$(三角形式) $=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$(指数形式)	利用指数形式,得到两个复数$z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$,$z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$相等的等价刻画:$z_1=z_2\Leftrightarrow r_1=r_2$,$\theta_1=\theta_2$(或$\theta_1=\theta_2+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$)
复数的乘幂与方根	1. 作为乘积的特例,考虑非零复数z的正整数次幂z^n,设$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则 $z^n=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$ 从而有$\|z^n\|=\|z\|^n$,$\mathrm{Arg}\,(z^n)=n\,\mathrm{Arg}\,z$ 当$r=1$时,则得棣莫弗公式 $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$ 2. 非零复数$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$的一切$n$次方根(即二项方程$w^n=z$的一切根)总体记为$\sqrt[n]{z}$, 则$w_k=(\sqrt[n]{z})_k=\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ $k=0,1,2,\cdots,n-1$	n次方根几何意义:均匀分布在中心在原点,半径为$\sqrt[n]{r}$的圆周上,即它们是内接于该圆周的正n边形的n个顶点.

名　称	内　容	说　明
共轭复数的性质	1. $\overline{(\bar{z})} = z, \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ 2. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}(z_2 \neq 0)$ 3. $\mid z \mid^2 = z\bar{z}, \mathrm{Re}\, z = \frac{z+\bar{z}}{2}, \mathrm{Im}\, z = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$ 4. 设$R(a,b,c)$表示对于复数$a,b,c,\cdots$的任一有理运算， 则$\overline{R(a,b,c,\cdots)} = R(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\cdots)$	性质3在复数运算、化简中经常用到.
复数在几何上的应用	1. 用复数刻画常用的平面曲线 (1) 过两点z_1、z_2的直线段： $z = z_1 + t(z_2 - z_1), t \in [0,1]$； (2) 以点$z_0$为心，$R$为半径的圆周： $\mid z - z_0 \mid = R$； (3) 从z_0出发与正实轴夹角为θ_0的一条射线：$\arg(z - z_0) = \theta_0$ 2. 应用复数证明几何问题	侧重于写出常用曲线的复方程

2. 复平面上的点集

名　称	内　容	说　明
复平面点集若干概念	1. 由不等式$\mid z - z_0 \mid < \rho$所确定的平面点集，称为点z_0的ρ-邻域，记为$N_\rho(z_0)$；并称$0 < \mid z - z_0 \mid < \rho$为点$z_0$的去心$\rho$-邻域，记为$N_\rho(z_0) \backslash \{z_0\}$ 2. 考虑点集E，若平面上一点z_0(不必属于E)的任意邻域内都有E的无穷多个点，则称z_0为E的聚点或极限点；若z_0属于E，但非E的聚点，则称z_0为E的孤立点；若z_0不属于E，又非E的聚点，则称z_0为E的外点. 3. 若点集E的每个聚点都属于E，则称E为闭集；若点集E的点z_0有一邻域全含于E内，则称z_0为E的内点；若点集E的点皆为内点，则称E为开集；若在z_0的任意邻域内，同时有属于点集E和不属于E的点，则称z_0为E的边界点，点集E的全部边界点所组成的点集称为E的边界.	Ⅰ. 点的分类要指明相对于哪个点集. Ⅱ. 以下五种说法等价： (1) z_0为E的聚点； (2) z_0的任一邻域含有异于z_0而不属于E的一点； (3) z_0的任一邻域含有E的无穷多个点； (4) z_0的任一邻域含有E的两个点； (5) 可从E取出点列$\{z_n\}$，使得$z_n \to z_0, n \to \infty$.

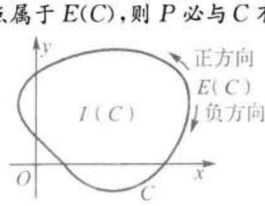
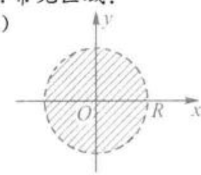
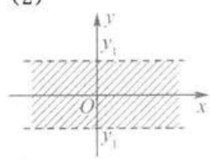
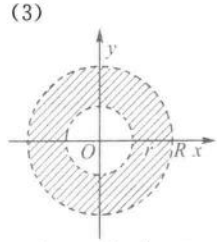
<table>
<tr><th>名　称</th><th>内　容</th><th>说　明</th></tr>
<tr>
<td>区域与若尔当曲线</td>
<td>
1. 具备下列性质的非空点集 D 称为区域：
(1) D 为开集
(2) D 中任意两点可用全在 D 中的折线连接
2. 区域 D 加上它的边界 C 称为闭域，记为 $\overline{D} = D+C$.
3. 设 $x(t), y(t)$ 是实变数 t 的两个实函数，在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，则由方程组
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$
或由复数方程 $z = x(t) + \mathrm{i}y(t)(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$
（简记为 $z = z(t)$）
所确定的点集 C，称为 z 平面上的一条连续曲线，$z = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ 称为 C 的参数方程，$z(\alpha), z(\beta)$ 分别称为 C 的起点和终点.
4. 无重点的连续曲线，称为简单曲线或若尔当(Jordan) 曲线；$z(\alpha) = z(\beta)$ 的简单曲线称为简单闭曲线.
5. D 为复平面上的区域，若在 D 内无论怎样画简单闭曲线，其内部仍含于 D，则称 D 为单连通区域；非单连通的区域称为多连通区域.
6.（若尔当定理）任一简单闭曲线 C 将 z 平面唯一地分成 $C, I(C), E(C)$ 三个点集（如图 1-2 所示），它们具有如下性质：
(1) 彼此不交；
(2) $I(C)$ 是一个有界区域（称为 C 的内部）
(3) $E(C)$ 是一个无界区域（称为 C 的外部）
(4) 若简单折线 P 的一个端点属于 $I(C)$，另一个端点属于 $E(C)$，则 P 必与 C 有交点.


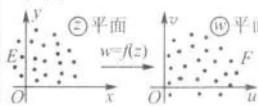
图 1-2
</td>
<td>
Ⅰ. 区域是开的，不包含它的边界点.
Ⅱ. 简单闭曲线 C 有两个相反方向，一般取“逆时针”方向为正方向；“顺时针”方向为负方向. 在复变函数中所提曲线都是有方向的，一般用 C 表示取简单闭曲线正向；C^- 表示取负向.
Ⅲ. 判断单连通还是多连通区域，直观上就是看是否有“洞”. 无“洞”的称为单连通区域；有“洞”的称为多连通区域.
Ⅳ. 常见区域：
(1)


圆域
(2)


带形区域：$y_1 < \mathrm{Im}\, z < y_2$
(3)


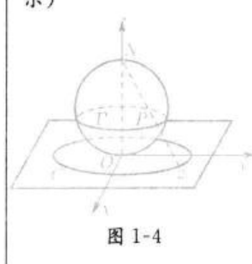
环域：$r < |z| < R$
</td>
</tr>
</table>

3. 复变函数

名　称	内　容	说　明
复变函数的概念	1. 设E为一复数集，若对E内每一复数z，有唯一确定的复数w与之对应，则称在E上确定了一个单值函数$w=f(z)$，$z\in E$. 若对E内每一复数z，有几个或无穷多个w与之对应，则称在E上确定了一个多值函数$w=f(z)$，$z\in E$. 2. 若对z平面上的点集E的任一点z，有w平面上点集F的点w，使$w=f(z)$，则称$w=f(z)$把E变(映)入F，或称$w=f(z)$是E到F的入变换. 3. 如果$f(E)\subseteq F$，且对F中任一点w，有E的点z，使得$w=f(z)$，则称$w=f(z)$把E变(映)成F，或称$w=f(z)$是E到F的满变换. 4. 若$w=f(z)$是点集E到F的满变换，且对F中每一点w，在E中有一个(或至少有两个)点与之相对应，则在F上确定了一个单值(或多值)函数，记为$z=f^{-1}(w)$，它就称为函数$w=f(z)$的反函数或称为变换$w=f(z)$的逆变换；若$z=f^{-1}(w)$也是F到E的单值变换，则称$w=f(z)$是E到F的双方单值变换或一一变换.	Ⅰ. 主要考虑单值函数单复变的复函数$w=f(z)(z=x+\mathrm{i}y)$等价于两个二元实函数 $u=u(x,y)$， $v=v(x,y)$. Ⅱ. 熟悉从变换角度理解复变函数，把它看作是两张复平面上两个点集之间的对应，如图1-3所示.  图1-3
复变函数的极限与连续(Ⅰ)	1. 设$w=f(z)$于点集E上有定义，z_0为E的聚点，若存在一复数w_0，使对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，只要$0<\|z-z_0\|<\delta$，$z\in E$，就有$\|f(z)-w_0\|<\varepsilon$，则称函数$w=f(z)$沿E于z_0有极限w_0，并记为$\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}}f(z)=w_0$ 2. 设函数$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在点集$E$上有定义，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$为$E$的聚点，则 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}}f(z)=\eta=a+\mathrm{i}b$ $\Leftrightarrow\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}u(x,y)=a$ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}v(x,y)=b$	

名　称	内　容	说　明
复变函数的极限与连续(Ⅱ)	3. 设 $w=f(z)$ 在点集 E 上有定义，z_0 为 E 的聚点，且 $z_0\in E$，若 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}}f(z)=f(z_0)$，即对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $\|z-z_0\|<\delta,z\in E$ 时，有 $\|f(z)-f(z_0)\|<\varepsilon$，则称 $f(z)$ 沿 E 于 z_0 连续. 4. 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在点集 E 上有定义，$z_0\in E$，则 $f(z)$ 沿 E 在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 连续 $\Leftrightarrow u(x,y),v(x,y)$ 沿 E 于点 (x_0,y_0) 连续. 5. 设函数 $f(z)$ 在有界闭集 E 上连续，则 (1) $f(z)$ 在 E 上有界，即 $\exists M>0$，使得对 $\forall z\in E$ 有 $\|f(z)\|\leqslant M$； (2) $\|f(z)\|$ 在 E 上有最大值与最小值，即在 E 上有两点 z_1,z_2，使得 $\|f(z)\|\leqslant\|f(z_1)\|,\|f(z)\|\geqslant\|f(z_2)\|\ (z\in E)$， (3) $f(z)$ 在 E 上一致连续，即对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得当 $\|z_1-z_2\|<\delta$ 时，有 $\|f(z_1)-f(z_2)\|<\varepsilon$.	Ⅰ. 极限 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in E}}f(z)$ 中变量 $z\to z_0$，方式是任意的，可以沿着从四面八方通向 z_0 的任何路径趋向于 z_0. Ⅱ. $w=f(z)$ 在 z_0 点连续 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}(1)\ f(z)\text{ 在 }z_0\text{ 有定义}\\(2)\ \lim\limits_{z\to z_0}f(z)\text{ 存在}\\(3)\ \lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)\end{cases}$

1. 复球面与无穷远点

名　称	内　容	说　明
复球面与无穷远点	1. z 平面上一个以原点为中心的圆周 C，在球面上对应的也是一个圆周 Γ. 当圆周 C 的半径越大时，圆周 Γ 就趋向于北极 N，因此，北极 N 可以看成是与 z 平面上的一个模为无穷大的假想点相对应，这个假想点称为无穷远点，并记为 ∞. 复平面加上点 ∞ 后被称为扩充复平面，常记作 $\mathbf{C}_\infty$. 与它对应的整个球面，称为复球面. 2. 在扩充复球面上，无穷远点的邻域为以原点为心的某圆周的外部，即 ∞ 的 ε-邻域 $N_\varepsilon(\infty)$ 是指合于条件 $\|z\|>1/\varepsilon$ 的点集，它正好对应着复球面上以北极点 N 为心的一个球盖.	扩充复平面 $\mathbf{C}_\infty$ 的几何模型就是复球面，比较直观，且把无穷远点表示出来（如图 1-4 所示）  图 1-4

5. 重点、难点与考点

重　点	复数的性质、运算，复变函数的概念.
难　点	复变函数的概念、性质.
考　点	复数的运算.

经典例题解析

基本题型 Ⅰ：复数的相关运算

例1　求下列复数的运算.

(1) 把复数 $z=-1+3\mathrm{i}$ 表示成指数形式；

(2) 计算复数 $\left(\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^3$；

(3) 解方程 $z^3+1=0$.

【思路探索】　此类型题目要求熟记各种公式，并能灵活运用.

解：(1) 由于 $z=-1+3\mathrm{i}$ 在第二象限，所以

$$\arg(-1+3\mathrm{i})=\arctan\left(\frac{3}{-1}\right)+\pi=\arctan(-3)+\pi,$$

$$|-1+3\mathrm{i}|=\sqrt{10},$$

$\therefore z=-1+3\mathrm{i}$ 的指数形式为 $\sqrt{10}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\arctan(-3)+\pi]}$.

(2) 先将复数转化为指数形式，再利用幂的运算进行计算，从而

$$\left(\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^3=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}})^3=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\pi}=-1.$$

(3) 由方程 $z^3+1=0$，得 $z^3=-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$，

由方根公式，得

$$z=\sqrt[3]{1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{3}},(k=0,1,2),$$

即 $z_0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,

$$z_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+2\pi}{3}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-1,$$

$$z_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+4\pi}{3}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

基本题型 Ⅱ：有关模的不等式及共轭复数性质

例2　设 $|z_k|=1(k=1,2,\cdots,n)$.

试证：$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|$.

【思路探索】 借助于 $|z|^2=z\cdot\bar{z}=|\bar{z}|^2$,将左端化简即证.

证明:因为 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{z_k}\right|=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{z_k\bar{z}_k}{z_k}\right|=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\bar{z}_k\right|=\left|\overline{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}z_k\right)}\right|=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}z_k\right|$

从而得证.

例 3 试证:(1) $\dfrac{z_1}{z_2}\geqslant 0(z_2\neq 0)\Leftrightarrow|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$;

(2) $\dfrac{z_k}{z_j}\geqslant 0(z_j\neq 0,k\neq j,k,j=1,2,\cdots,n)$

$\Leftrightarrow|z_1+z_2+\cdots+z_n|=|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$.

证明:(1) 若$\dfrac{z_1}{z_2}\geqslant 0(z_2\neq 0)$,$\dfrac{z_1}{z_2}$ 为非负实数,

则 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}+1\right|=\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|+1=\dfrac{z_1}{z_2}+1$,

两边同时乘以 $|z_2|$,得 $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$.

反之,由 $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$,两边平方,得 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=|z_1\bar{z}_2|$

这说明 $z_1\bar{z}_2\geqslant 0$,从而$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}\geqslant 0$.

(2) "⇒"(必要性) 同(1).

"⇐"(充分性)

利用三角不等式由

$$\begin{aligned}|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|&=|(z_1+z_2)+\cdots+z_n|\\&\leqslant|z_1+z_2|+|z_3|+\cdots+|z_n|,\end{aligned}$$

可推得 $|z_1|+|z_2|\leqslant|z_1+z_2|$,且 $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$,

从而 $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$,

从而由(1) 知$\dfrac{z_1}{z_2}\geqslant 0$,

对于其它下标的 k,j,类似可证 $|z_k+z_j|=|z_k|+|z_j|$.

从而由(1) 可知$\dfrac{z_k}{z_j}\geqslant 0(z_j\neq 0,k\neq j,k,j=1,2,\cdots,n)$.

基本题型 Ⅲ:判断满足条件的点集所表示的曲线,并判断是单连通区域还是多连通区域

例 4 满足下列条件的点集是什么?若是区域,是单连通区域还是多连通区域?

(1) $|z|<1,\mathrm{Re}z\leqslant\dfrac{1}{2}$;　　(2) $\arg(z-\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}$;　　(3) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 2$.

【思路探索】 主要是理解复数差的模的几何意义及常用曲线的复数表示方法.

解:(1) 满足条件的点 z 所组成的点集是以原点为圆心,1 为半径的圆盘和以直线 $\mathrm{Re}z=\dfrac{1}{2}$ 为右边界的部分(包 $\mathrm{Re}z=\dfrac{1}{2}$) 的公共部分;不是区域.(如图 1-5 阴影部分所示).

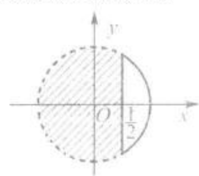


图 1-5

(2) 满足条件的点 z 为以 i 为端点,斜率为 1 的半射线(不

包括端点 i)(如图 1-6);不是区域.

(3) 上式可化为 $|z-1|\leqslant 2|z+1|$,

由此可得 $\left(x+\frac{5}{3}\right)^2+y^2\geqslant\left(\frac{4}{3}\right)^2$,

因此满足条件的点集为以 $\left(-\frac{5}{3},0\right)$ 为圆心,$\frac{4}{3}$ 为半径的圆盘外所有点的集合(如图 1-7);它是闭域.

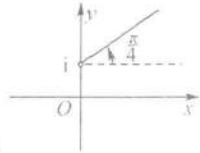


图 1-6

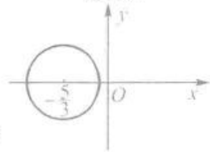


图 1-7

基本题型Ⅳ:求解曲线在变换下的像集

例 5 (1) 在变换 $w=\mathrm{i}z$ 下,圆周 $|z-1|=1$ 的像.

(2) 设 $w=x^2+\mathrm{i}y^2$,$z=x+\mathrm{i}y$,求 z 平面上的直线 $x=a$,$y=a$ 的像.

【思路探索】 着重将函数从变换角度理解,找到点与点之间的对应关系,从而找到曲线在变换下的像集.

解:(1) 设 $z=re^{\mathrm{i}\theta}$,$w=\rho e^{\mathrm{i}\varphi}$,

$$\text{由于 } w=\mathrm{i}z\Leftrightarrow\rho e^{\mathrm{i}\varphi}=\mathrm{i}re^{\mathrm{i}\theta}=re^{\mathrm{i}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\rho=r,\varphi=\theta+\frac{\pi}{2}.$$

即点 z 变换为 w 时,模不变,辐角沿正向旋转 $\frac{\pi}{2}$.

所以 $w=\mathrm{i}z$ 把 z 平面上圆周 $|z-1|=1$ 变成 w 平面上的圆周 $|w-\mathrm{i}|=1$. 如图 1-8 所示.

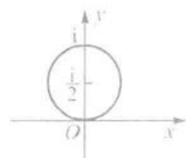


图 1-8

(2) 设 $w=u+\mathrm{i}v$,则 $u=x^2$,$v=y^2$.

当直线 $x=a$,$y=a$ 时,得 $u=a^2$,$v=a^2$,于是这些直线在 w 平面上的像是半直线 $u=a^2$,$v\geqslant 0$;$v=a^2$,$u\geqslant 0$.

基本题型Ⅴ:判断函数极限存在性及连续性

例 6 (1) 问下列函数在原点是否连续?

$$f(z)=\begin{cases}0, & z=0,\\ \dfrac{\mathrm{Re}z}{|z|}, & z=0;\end{cases}$$

(2) 求证:$\lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{|z|}$ 不存在.

【思路探索】 利用定义及有关性质证明,特别注意到复变函数中 $z\to z_0$ 方式是任意的.

解:(1) 令 $z=x+\mathrm{i}y$,则 $\frac{\mathrm{Re}z}{|z|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

当 z 沿射线 $y=kx(x>0)$ 趋向于 0 时,

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx(x>0)}}\frac{\mathrm{Re}z}{|z|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x^2+k^2x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x\sqrt{1+k^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$