君子曰：学不可以已。青，取之于蓝而青于蓝；冰，水为之而寒于水。木直中绳，輮以为轮，其曲中规；虽有槁
暴，不复挺者，輮使之然也。故木受绳则直，金就砺则利，君子博学而日参省乎己，则知明而行无过矣。
吾尝终日而思矣，不如须臾之所学也；吾尝跂而望矣，不如登高之博见也。登高而招，臂非加长也，而见者远；顺
风而呼，声非加疾也，而闻者彰。假舆马者，非利足也，而致千里；假舟楫者，非能水也，而绝江河。君子生非异也，
善假于物也。
积土成山，风雨兴焉；
小流，无以成江海。
牙之利，筋骨之

总主编◎李朝东

精讲精练

经纶学典

本册主编：王加轩

学生用书

选修2–2

高中数学

人教A版

黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社

总主编◎李朝东

君子曰：学不可以已。青，取之于蓝而青于蓝；冰，水为之而寒于水。木直中绳，輮以为轮，其曲中规，虽有槁
暴，不复挺者，輮使之然也。故木受绳则直，金就砺则利，君子博学而日参省乎己，则知明而行无过矣。
吾尝终日而思矣，不如须臾之所学也；吾尝跂而望矣，不如登高之博见也。登高而招，臂非加长也，而见者远；顺
风而呼，声非加疾也，而闻者彰。假舆马者，非利足也，而致千里；假舟楫者，非能水也，而绝江河。君子生非异也，
善假于物也。
积土成山，风雨兴焉；
小流，无以成江海
牙之利，筋骨

精讲精练

经典绝学

本册主编：王加轩

学生用书

选修2-2

高中数学

人教A版

黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

精讲精练:人教A版. 高中数学. 2-2:选修/ 李朝东主编;
—银川: 宁夏人民教育出版社, 2009.11(2011.5重印)

ISBN 978-7-80764-215-2

Ⅰ.精… Ⅱ.①李… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ. G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第197765号

精讲精练——数学 选修2-2(人教A版) **李朝东 主编**

责任编辑 柳毅伟
装帧设计 杭永鸿
责任印制 刘 丽

黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社 出版发行

地　　址 银川市北京东路139号出版大厦(750001)
网　　址 www.yrpubm.com
网上书店 www.hh-book.com
电子信箱 jiaoyushe@yrpubm.com
邮购电话 0951-5014294
经　　销 全国新华书店
印刷装订 南京人文印刷厂

开 本 880mm×1230mm 1/16 **印 张** 9.75 **字 数** 195千 **印 数** 5000册
版 次 2011年5月第1版第2次印刷
书 号 ISBN 978-7-80764-215-2/G·1152
定 价 27.00元

前言

高中阶段的师生对教学过程的需求呈现出与其他学段不同的特点，我们理解为以下两个方面：

1. 科目增多，单科学习时间减少，教师上课，一个知识点可能只能讲一遍，高中学习更多地体现在老师进行方法点拨，学生自主学习，举一反三，不会像初中那样面面俱到。

2. 现在新课标的教材内容都是不确定的，短短的课堂时间，老师不能够把重难点知识和这些不确定知识讲明白，或者是讲明白了，学生没有听懂。学生没听懂，还没有办法从教材上获取解决的方法。

我们依此设计本套丛书，主要的功能就是解决复习的问题，课后对课堂知识进行及时复习、消化，弥补课堂教学不足，弥补教材讲解的不足，同时还兼顾预习功能和提高功能。课前引导学生进行有效预习，课后对部分重难点知识进行拓展、解题方法进行归纳总结，起到提高、升华的作用。

与同类书相比，本套丛书有三大特色：

一、练习更加注重针对性和有效性。同类图书一般只注重知识点讲解部分，忽视练习部分。我们认为这类图书的关键部分应该是练习，其次是知识点的讲解。我们的练习，紧扣教材，知识点全面，重难点突出，层次清晰，考查方式多样，材料新颖。形式上更加好用，单元测试卷和参考答案活页装订，便于阶段测试。

二、讲解的深度符合同步教学。本套丛书的定位在于新课的内容讲解，适度拓展，不像同类书，一讲就达到高考的程度。其目的是帮助学生巩固课堂所学。

三、每个学科都有其鲜明的学科特点。每个学科的栏目设置不同，以充分体现本学科的学科特点为原则，例如：地理增加了对图表的解读，政治增加了对热点问题的链接，语文、英语也各具特点。

一本好书的形成不光是编者的事情，更多的是使用者积极参与，您在使用过程中有好的建议，请不吝赐教。

我们的联系方式：www.jing-lun.cn，jinglun@yahoo.cn

编　者

读者反馈表

尊敬的读者：

您好！感谢您使用《经纶学典·精讲精练》！

为了不断提高图书质量，恳请您写下使用本书的体会与感受，我们将真诚地吸纳。**在修订时将刊登您的意见，并予以一定的奖励，以表达我们诚挚的谢意。**

读者简介	姓　名		性　别		出生年月	
	所在学校		通讯地址			
	联系方式	(H)： 手机：		(O)： E－mail：		
本书情况		学科		版本	年级	

您对本书栏目的评价：

1. 课标导学：
   需要□　不需要□
2. 知识梳理：
   不够详细□　正好□
   过于详细□
3. 疑难剖析：
   易□　正好□　难□
4. 典型题解：
   全面□　不全面□
5. 提升训练：
   难□　合理□　易□

您对本书体例形式的评价：

1. 栏目设置：
   过多□　适中□　过　少□
2. 题空：
   过大□　正好□　过　小□
3. 版式：
   美观□　一般□　不美观□
4. 封面：
   美观□　一般□　不美观□

您的购买行为：

1. 您购买本书的途径：
   广　告□　教师推荐□
   家长购买□　学校统一购买□
   自己购买□　同学推荐□
2. 您购买本书的主要原因（可多选）：
   广告宣传□　包装形式□
   内　容□　图书价格□
   封面设计□　书　名□

您对本书的其他意见：

欢迎登录：www.jing-lun.cn

通信地址：南京红狐教育传播研究所（南京市租用16－02#信箱）　　邮编：210016

目录

CONTENTS

第一章 导数及其应用

1.1 变化率与导数

1.1.1 变化率问题

自·主·探·究

课标导学
kebiaodaoxue

1. 通过生活中的实例(如气球膨胀率、高台跳水中的平均速度)认识函数的平均变化率.
2. 理解函数平均变化率的概念.

基础梳理
jichushuli

平均变化率

一般地,对于函数 $y=f(x)$ 来说,$P(x_0,y_0)$ 是函数图象上的一点,$M(x_1,y_1)$ 也是函数图象上的一点,自变量从 x_0 变化到 x_1 时,相应的函数值则由 y_0 变化到 y_1,则有 $\Delta x=$ ______,Δy = ______ = ______.

当 $\Delta x\neq0$ 时,我们把 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=$ ______ = ______ 称为函数 $y=f(x)$ 从 x_0 到 x_1 的变化率;若用 $x_0+\Delta x$ 代替 x_1,则有 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=$ ______.

【参考答案】

x_1-x_0 y_1-y_0 $f(x_1)-f(x_0)$ $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

重·难·点·突·破

疑难剖析
yinanpouxi

1. 增量

一般地,对于函数 $y=f(x)$ 来说,$P(x_0,y_0)$ 是函数图象上的一点,$M(x_1,y_1)$ 也是函数图象上的一点,自变量从 x_0 变化到 x_1 时,相应的函数值由 y_0 变化到 y_1,则有:

(1) 自变量的增量:x_1-x_0 叫做自变量 x 的增量,记作:Δx,即 $\Delta x=x_1-x_0$.

(2) 函数的增量:y_1-y_0 叫做函数 y 的增量,记作:Δy,且有 $\Delta y=y_1-y_0=f(x_1)-f(x_0)$.

注意:(1) Δx 是一个整体符号,而不是 Δ 与 x 相乘.

(2) Δx 是自变量 x 在 x_0 处的增量,可为正值,也可为负值.

2. 求函数 $y=f(x)$ 从 x_0 到 x_1 的平均变化率的步骤

第一步:求函数值的增量 $\Delta y=y_1-y_0=f(x_1)-f(x_0)$.

第二步:计算平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.

典型题解
dianxingtijie

题型1 运动物体的平均速度

例1 已知自由落体运动的方程是 $s=\frac{1}{2}gt^2$ (s 的单位:m,t 的单位:s).求:

(1) 物体在时刻 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内的平均速度 $\bar{v}$;

(2) 物体在 $t=10$ s 到 $t=10.1$ s 这段时间内的平均速度.

[解析] 根据平均速度的计算公式,需要先求出 Δs,再计算 $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

[答案] (1) 当 t 由 t_0 变化到 $t_0+\Delta t$ 时,s 的相应改变量是

$\Delta s=\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2=gt_0\cdot\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2$,

$$\therefore \bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{gt_0\cdot\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t}=gt_0+\frac{1}{2}g\cdot\Delta t,$$

即 $\bar{v}=gt_0+\frac{1}{2}g\cdot\Delta t$.

(2) 由(1)知,当 $t_0=10$ s,$\Delta t=0.1$ s 时,

所求平均速度为 $\bar{v}=gt_0+\frac{1}{2}g\cdot\Delta t$

$=g\times10+\frac{1}{2}g\times0.1$

$=10.05g$ (m/s).

即物体在 $t=10$ s 到 $t=10.1$ s 这段时间内的平均速度为 $10.05g$ m/s.

[点评] (1) 如果物体的运动规律是 $s=s(t)$,那么物体在 t

到 $t+\Delta t$ 这段时间内的平均变化率就是物体在这段时间内的平均速度.

(2) 对于同一个 t 值,Δt 的值不同,则平均速度也不同,而当 Δt 的值由 0.1,0.001,0.000 1,…趋向于 0 时,平均速度 $\bar{v}$ 的值趋向于一个常数值 $10g$ m/s.

[借题发挥 1] 自由落体运动的运动方程是 $s=\frac{1}{2}gt^2$(s 的单位:m,t 的单位:s). 计算 t 从 3 s 到 3.1 s,3.01 s,3.001 s 各时间段内的平均速度.

题型2 函数的平均变化率的求法

例 2 求函数 $y=f(x)=x^2$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率. 并判断:

(1) 当 x_0 取某一个定值,Δx 取不同的值时,该函数的平均变化率是否相同,如何变化?

(2) 当 Δx 取定值后,随着 x_0 取值的不同,该函数的平均变化率是否相同?

[解析] 先求出 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,计算 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$,再判断 x_0 不变,Δx 变化时,$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的值是否变化;类似地,判断 Δx 为定值,x_0 变化时,$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的值是否变化.

[答案] $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2$
$=2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$,

∴ 当自变量 x 从 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$ 时的平均变化率是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$,

即所求的函数的平均变化率是 $2x_0+\Delta x$.

(1) 由式子 $2x_0+\Delta x$ 可知,当 x_0 取得某一个定值,

若 $\Delta x>0$,则当 Δx 变小时,$2x_0+\Delta x$ 的值也变小,当 $\Delta x\to 0$ 时,$2x_0+\Delta x\to 2x_0$;

若 $\Delta x<0$,则当 Δx 变大时,$2x_0+\Delta x$ 的值也变大,当 $\Delta x\to 0$ 时,$2x_0+\Delta x\to 2x_0$.

(2) 由式子 $2x_0+\Delta x$ 可知,当 Δx 取得某一个定值时,当 x_0 变小时,则 $2x_0+\Delta x$ 的值也变小,当 x_0 变大时,则 $2x_0+\Delta x$ 的值也变大.

[点评] 可以通过对所求函数的平均变化率的值(或式子)进行分析,找出函数平均变化率的变化特点和规律;或者根据函数的图象,利用数形结合法直观地分析函数的平均变化率的变化情况.

[借题发挥 2] 试比较正弦函数 $y=\sin x$ 的自变量 x 在 0 到 $\frac{\pi}{6}$ 之间和 $\frac{\pi}{3}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 之间变化时函数的平均变化率.

提·升·训·练

1. 在函数的平均变化率的定义中,自变量的增量 Δx 满足 ( )

A. $\Delta x>0$ B. $\Delta x<0$
C. $\Delta x\neq 0$ D. $\Delta x=0$

2. 设函数 $y=f(x)$,当自变量 x 由 x_0 改变到 $x_0+\Delta x$ 时,函数值的改变量 Δy 是 ( )

A. $f(x_0+\Delta x)$ B. $f(x_0)+\Delta x$
C. $f(x_0)-\Delta x$ D. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

3. 对于函数 $y=\frac{1}{x}$,当 $\Delta x=1$ 时,Δy 的值是 ( )

A. 1 B. -1
C. 0.1 D. 不确定

4. 已知函数 $f(x)=2x^2-4$ 图象上一点 $(1,-2)$ 及邻近一点 $(1+\Delta x,-2+\Delta y)$,则 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 等于 ( )

A. 4 B. $4x$
C. $4+2\cdot\Delta x$ D. $4+2(\Delta x)^2$

5. 质点运动规律的方程是 $s=t^2+3$,则在时间 $[3,3+\Delta t]$ 内,相应的平均速度是 ( )

A. $6+\Delta t$ B. $6+\Delta t+\frac{9}{\Delta t}$
C. $3+\Delta t$ D. $9+\Delta t$

6. 函数 $y=x^2-2x+3$ 在 2 到 $\frac{9}{4}$ 之间的平均变化率为________.

7. 质点运动规律的方程是 $s=2t^2+1$,则质点在时间 $(1,1+\Delta t)$ 内,运动位移对时间的变化率为________.

8. 已知曲线 $y=x^2-1$ 上两点 $A(2,3)$ 和 $B(2+\Delta x,3+\Delta y)$,当 $\Delta x=1$ 时,直线 AB 的斜率是________;当 $\Delta x=0.1$ 时,直线 AB 的斜率是________.

9. 如果一个质点在时间 t 的位移函数是 $y=f(t)=t^3+3$,当 $t_1=4$ 且 $\Delta t=0.01$ 时,求 Δy 和 $\frac{\Delta y}{\Delta t}$.

10. 一运动物体的位移 s 与时间 t 的关系是 $s=3t-t^2$.

(1) 求此物体在 $[0,2]$ 这一时间段的平均速度;

(2) 求 $t_1=0$ 到 $t_2=\Delta t$ 的平均速度,并探究此物体的初速度.

1.1.2 导数的概念

自·主·探·究

课标导学 kebiaodaoxue

1. 了解瞬时速度与瞬时变化率的关系,知道瞬时变化率就是导数.
2. 理解函数在某点处的导数定义.
3. 理解函数在一点处的导数与导函数的区别与联系.
4. 体会从有限到无限的逼近思想.

基础梳理 jichushuli

1. 瞬时速度

作变速直线运动的物体在不同时刻的速度是不同的,我们把物体在______的速度叫瞬时速度,用数学语言描述为:设物体运动的路程与时间的关系是 $s=s(t)$,函数 $s(t)$ 在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 之间的平均变化率为________,当 Δt 趋近于0时,$\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ 趋近于一个______,我们把这个______称为 t_0 时刻的瞬时速度,即当 $\Delta t\to 0$ 时,$\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ 的极限值是 $\bar{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=$________.

2. 瞬时变化率

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 及附近有定义,当自变量 x 在 x_0 附近的改变量为 Δx 时,函数值相应的改变量 $\Delta y=$________,若 $\Delta x\to 0$ 时,平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=$________趋近于一个常数值 a,则称常数 a 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的________.

3. 导数的概念

一般地,函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x},$$

我们称它为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数.记作________或________,即 $f'(x_0)=$________.

4. 导函数

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都可导,就说 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导.这时,对于开区间 (a,b) 内每一个确定的值 x_0,都对应着一个确定的导数________,这样就在开区间 (a,b) 内构成一个新的函数,我们把这一新的函数叫做 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的导函数,记作________或________,即 $f'(x)=y'=$________=________.

【参考答案】

1. 某一时刻 $\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ 常数 常数 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$

2. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 瞬时变化率

3. $f'(x_0)$ $y'|_{x=x_0}$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

4. $f'(x_0)$ $f'(x)$ y' $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

重·难·点·突·破

疑难剖析
yinanpouxi

1. (1) 在瞬时速度的概念中，Δt 趋近于0是指时间间隔越来越短，能越过任意小的时间间隔，但始终不能为零. Δt、Δs 在变化过程中都趋近于0，但它们的比值都趋近于一个常数，这个常数可能为0，也可能不为0.

(2)求瞬时速度的步骤：

①设非匀速直线运动的规律是 $s=s(t)$.

②时间改变量是 Δt，位移改变量是 $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$.

③平均速度为 $\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$.

④瞬时速度是 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$.

2. (1) 函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，就是函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，其中 Δx 是自变量 x 在 x_0 处的改变量，所以 Δx 可正也可负，但不能为0；当 $\Delta x>0$（或 $\Delta x<0$）时，$\Delta x\to 0$ 表示 $x_0+\Delta x$ 从右边（或左边）趋近于 x_0；Δy 是相应函数的改变量，Δy 可正也可负，也可以为0.

(2) 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，是指当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to a$（常数）；若当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限不存在，就说函数在 x_0 处不可导或说没有导数.

(3) 由导数的定义可知，求函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数的步骤如下：

①求函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

②求函数的平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

③求函数的瞬时变化率，取极限，得导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$（或当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to f'(x_0)$）.

上述求导方法可简记为：一差，二比，三极限.

3. 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数与函数 $y=f(x)$ 的导函数之间的区别与联系

(1)"函数在一点处的导数"就是指在该点的函数值的改变量与自变量的改变量的比的极限，它是一个常数值，不是变数.

(2)"导函数"简称为导数，是指在开区间 (a,b) 内可导的函数在任意一点 x 处的导数值构成的一个新的函数，即 $f'(x)=y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

(3) 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的函数值，即 $f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}$，所以求函数在一点处的导数，一般是先求出函数的导函数，再计算这点的导函数值.

典型题解
dianxingti jie

题型1　求瞬时速度

例1　以初速度为 $v_0(v_0>0)$ 作竖直上抛运动的物体，t s时的高度为 $h(t)=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$（$g$ 取9.8 m/s²），求物体在时刻 t_0 处的瞬时速度.

[解析]　先求出 Δh，再求出 $\dfrac{\Delta h}{\Delta t}$. 可以用逼近的思想分 $\Delta t>0$ 和 $\Delta t<0$ 两种情形取值观察所趋近的常数，或用极限法求当 $\Delta t\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta h}{\Delta t}$ 的极限.

[答案]　$\because\ \Delta h=\left[v_0(t_0+\Delta t)-\dfrac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2\right]-\left(v_0\cdot t_0-\dfrac{1}{2}gt_0^2\right)=(v_0-gt_0)\Delta t-\dfrac{1}{2}g(\Delta t)^2$，

$\therefore\ \dfrac{\Delta h}{\Delta t}=v_0-gt_0-\dfrac{1}{2}g\cdot\Delta t$.

解法一：$\because\ \bar{v}=\dfrac{\Delta h}{\Delta t}=v_0-gt_0-\dfrac{1}{2}g\cdot\Delta t$，

若 $\Delta t>0$ 时，在 $[t_0,t_0+\Delta t]$ 这段时间内，

当 $\Delta t=0.1$ s时，$\bar{v}=v_0-gt_0-0.49$；

当 $\Delta t=0.01$ s时，$\bar{v}=v_0-gt_0-0.049$；

当 $\Delta t=0.001$ s时，$\bar{v}=v_0-gt_0-0.004\ 9$；

当 $\Delta t=0.000\ 1$ s时，$\bar{v}=v_0-gt_0-0.000\ 49$；

当 $\Delta t=0.000\ 01$ s时，$\bar{v}=v_0-gt_0-0.000\ 049$；

…

可见当 Δt 从右侧无限逼近0时，$t_0+\Delta t$ 无限逼近 t_0，$\bar{v}$ 无限趋近于 v_0-gt_0.

若 $\Delta t<0$ 时，在 $[t_0+\Delta t,t_0]$ 这段时间内，

当 $\Delta t=-0.1$ s时，$\bar{v}=v_0-gt_0+0.49$；

当 $\Delta t=-0.01$ s时，$\bar{v}=v_0-gt_0+0.049$；

当 $\Delta t=-0.001$ s时，$\bar{v}=v_0-gt_0+0.004\ 9$；

当 $\Delta t=-0.000\ 1$ s时，$\bar{v}=v_0-gt_0+0.000\ 49$；

当 $\Delta t=-0.000\ 01$ s时，$\bar{v}=v_0-gt_0+0.000\ 049$；

…

可见当 Δt 从左侧无限逼近0时，$t_0+\Delta t$ 无限逼近 t_0，$\bar{v}$ 无限趋近于 v_0-gt_0；

综上可知，当 $\Delta t\to 0$，$\bar{v}\to v_0-gt_0$，

$\therefore$ 物体在时刻 t_0 处的瞬时速度是 v_0-gt_0.

解法二：$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta h}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(v_0-gt_0-\dfrac{1}{2}g\cdot\Delta t\right)$

$=v_0-gt_0$，

$\therefore$ 物体在时刻 t_0 处的瞬时速度是 v_0-gt_0.

[点评]　求瞬时速度的实质就是求位移改变量 Δh 与时间改

变量Δt比的极限,求极限时,通常是判断当$\Delta t\to 0$时,含有Δt的式子趋向于0(或某一个常数),如当$\Delta t\to 0$时,$\frac{1}{2}g\cdot\Delta t\to 0$.

[借题发挥1] 一辆汽车按运动规律$s=3t^2+1$作直线运动,求这辆汽车在$t=3$ s时的瞬时速度.(时间单位:s,位移单位:m)

题型2 求函数的导数

例2 用导数的定义求函数$y=f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$在$x=1$处的导数.

[解析] 根据导数的定义,第一步求函数的增量Δy,第二步求平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}$,第三步取极限,求得导数.

[答案] $\because \Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\Delta x}}-1$$

$$=\frac{1-\sqrt{1+\Delta x}}{\sqrt{1+\Delta x}}$$

$$=\frac{1-1-\Delta x}{\sqrt{1+\Delta x}\cdot(1+\sqrt{1+\Delta x})}$$

$$=\frac{-\Delta x}{\sqrt{1+\Delta x}\cdot(1+\sqrt{1+\Delta x})},$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{\sqrt{1+\Delta x}\cdot(1+\sqrt{1+\Delta x})}.$$

$$\therefore f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+\Delta x}\cdot(1+\sqrt{1+\Delta x})}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

[点评] 在计算$\frac{\Delta y}{\Delta x}$时,通常要对$\frac{\Delta y}{\Delta x}$变形,本题在计算$\frac{1-\sqrt{1+\Delta x}}{\sqrt{1+\Delta x}}$时,用到分子有理化,把减号的式子$(1-\sqrt{1+\Delta x})$变为含加号的式子$(1+\sqrt{1+\Delta x})$.

[借题发挥2] 求函数$y=x^2$在$x=1$处的导数.

例3 利用导函数的定义,求下列函数的导数:

(1) $y=3x^2-4x+6$; (2) $y=x+\frac{1}{x}$.

[解析] 在函数的定义域内任取一点x,对于自变量的增量Δx,有函数的增量Δy,求出函数的平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}$,再求极限就得到导数.

[答案] (1) $\Delta y=3(x+\Delta x)^2-4(x+\Delta x)+6-3x^2+4x-6$

$$=(6x-4)\Delta x+3(\Delta x)^2,$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=6x-4+3\cdot\Delta x,$$

$$\therefore y'=\lim_{\Delta x\to 0}(6x-4+3\cdot\Delta x)=6x-4.$$

(2) $\Delta y=(x+\Delta x)+\frac{1}{x+\Delta x}-x-\frac{1}{x}$

$$=\Delta x-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)},$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=1-\frac{1}{x(x+\Delta x)}.$$

$$\therefore y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[1-\frac{1}{x(x+\Delta x)}\right]=1-\frac{1}{x^2}.$$

[点评] 求函数$f(x)$的导函数$f'(x)$和求函数$f(x)$在一点$x=x_0$处的导数$f'(x_0)$的步骤相同,只是在求函数值的增量时,用x代替x_0的具体值.

[借题发挥3] 求函数$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的导数,并求出在$x=-1,2$处的导数.

题型3 灵活利用导数定义求极限

例4 若函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数为 m,求:

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{\Delta x}$;

(2) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+4t)-f(a+5t)}{t}$.

[解析] 已知函数的导数值,要求所给极限的值,必须将所给出的极限的式子转化为函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数的定义式子.

[答案] (1) $\because$ 函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数为 m,

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=m$,

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)+f(a)-f(a-\Delta x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}+\lim\limits_{-\Delta x\to 0}\dfrac{f(a-\Delta x)-f(a)}{-\Delta x}$

$=m+m=2m$.

(2) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+4t)-f(a+5t)}{t}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+4t)-f(a)+f(a)-f(a+5t)}{t}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+4t)-f(a)}{t}-\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+5t)-f(a)}{t}$

$=4\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+4t)-f(a)}{4t}-5\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+5t)-f(a)}{5t}$

$=4m-5m=-m$.

[点评] 在导数的定义中,自变量的增量 Δx 的形式是多种多样的,但是不论 Δx 选择哪一种形式,Δy 也必须选择相应的形式,例如 Δx 变为 $m\cdot\Delta x$ 的形式(m 可以为正为负,但不能为0),则 $\Delta y=f(x_0+m\cdot\Delta x)-f(x_0)$,这样仍然可以应用导数的定义 $\lim\limits_{m\cdot\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+m\cdot\Delta x)-f(x_0)}{m\cdot\Delta x}=f'(x_0)$. 本题还用到了添项 $f(a)$ 的方法.

[借题发挥4] 已知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数为 $f'(x_0)$,试求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3\cdot\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

提·升·训·练

1. 已知物体运动曲线的方程是 $s=2t^3$,则在 $t=3$ s 时的瞬时速度是 ( )

A. 6　B. 18　C. 54　D. 81

2. 函数 $y=2x^2$ 在点(1,2)处的瞬时变化率为 ( )

A. 2　B. 4　C. 5　D. 6

3. 已知曲线 $y=2x^2+1$ 在点 P 处的瞬时变化率为 -4,则点 P 的坐标是 ( )

A. (1,3)　B. (−4,33)　C. (−1,3)　D. 不确定

4. 设 $y=f(x)=ax+4$,若 $f'(1)=2$,则 a 等于 ( )

A. 2　B. −2　C. 3　D. −3

5. 函数 $y=(x-1)^2$ 的导数是 ( )

A. −2　B. $2(x-1)$　C. $(x-1)^2$　D. $2x$

6. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x}$,若 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$,则 x_0 等于 ( )

A. −1　B. 1　C. 2　D. −2

7. 若物体运动曲线的方程是 $s=-t^2+3t+2$,则物体的初速度是________.

8. 若一物体的运动方程是 $s=t^{-\frac{1}{2}}$,则当 $t=$________时,瞬时速度为 $-\dfrac{1}{16}$.

9. 函数 $y=x^3-\dfrac{1}{x}$ 的导数是________.

10. 对于函数 $y=x^2$,其导数值等于原来函数值的点的坐标是________.

11. 子弹在枪筒中的运动可以看作匀加速运动,如果它的加速度是 $5.0\times10^5\ \text{m/s}^2$,子弹从枪口中射出时所用的时间为 1.6×10^{-3} s,求子弹射出枪口时的瞬时速度.

1.1.3 导数的几何意义

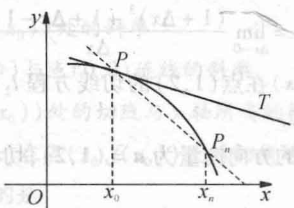
自·主·探·究

课标导学
kebiaodaoxue

1. 进一步了解导数产生的背景,感受极限思想.
2. 理解导数的几何意义.
3. 掌握曲线的切线概念,理解切线斜率的含义和求法.

基础梳理
jichushuli

1. 已知曲线 $y=f(x)$ 上的两点 $P(x_0,f(x_0))$ 和 $P_n(x_n,f(x_n))$.(如图所示)



(1) 当点 P_n 沿着曲线 $f(x)$ 趋近于点______时,割线 PP_n 趋近于确定位置,这个确定位置的______称为过点 P 的切线.

(2) 割线 PP_n 的斜率是 $k_n=$______;当点 P_n 无限趋近于点 P,即 $x_n\to$______时,k_n 无限趋近于______.

2. 导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f(x_0)$ 就是曲线 $y=f(x)$ 在点______处的切线的斜率,即 $k=$______.

【参考答案】

1. (1) P　直线 PT　(2) $\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$　x_0　切线 PT 的斜率 k

2. $(x_0,f(x_0))$　$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

重·难·点·突·破

疑难剖析
yinanpouxi

1. 函数平均变化率的几何意义以及函数导数的几何意义

(1) 函数 $y=f(x)$ 的平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$,实际上是曲线上过两点 $(x_1,f(x_1))$ 和 $(x_2,f(x_2))$ 的直线的斜率;而导数是指当 $\Delta x\to 0$ 时平均变化率的极限,即 Δx 越小,任意两点的连线越趋近于一点处的切线.

(2) 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导,其导数即为过该点的切线的斜率;若在 x_0 处不可导,其斜率不存在,但并非不存在过该点的切线,例如切线是垂直于 x 轴的;导数的物理意义是:若物体的运动方程是 $s=s(t)$,则在点 $P(t_0,s(t_0))$ 处的导数就是该点处的速度.

2. 利用导数求曲线的切线方程的步骤

根据导数的几何意义,可以用函数的导数求出曲线的切线的斜率,进而求出切线方程,具体步骤是:

(1) 求出函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)=k$.

(2) 根据直线的点斜式方程,得到函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的切线方程是:$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

注意:若在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}$,此时切线平行于 y 轴,导数不存在,不能用上述方法求切线方程,可根据切线的定义直接得出切线方程是 $x=x_0$.

3. 由导数的几何意义知,$f'(x_0)=k=\tan\alpha$(其中 k 为曲线上一点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率,α 为切线的倾斜角),所以当 $f'(x_0)>0$ 时,切线的倾斜角为锐角;当 $f'(x_0)<0$ 时,切线的倾斜角为钝角;当 $f'(x_0)=0$ 时,切线与 x 轴平行;当 $f'(x_0)$ 不存在时,切线与 y 轴平行.

典型题解
dianxingtijie

题型1　求切线方程

例1　求过曲线 $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x}$ 上一点 $P\left(4,-\dfrac{7}{4}\right)$ 的切线方程.

[解析]　要求过点 $P\left(4,-\dfrac{7}{4}\right)$ 的切线方程,只需求出切线的斜率,由导数的几何意义知,其斜率为 $f'(4)$,因此需要先求出曲线在 $x=4$ 的导数.

[答案]　$\because f'(4)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{4+\Delta x}-\sqrt{4+\Delta x}-\left(\frac{1}{4}-2\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{4+\Delta x}-\frac{1}{4}\right)-\left(\sqrt{4+\Delta x}-2\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{-\Delta x}{4(4+\Delta x)}-\frac{\Delta x}{\sqrt{4+\Delta x}+2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{-1}{4(4+\Delta x)}-\frac{1}{\sqrt{4+\Delta x}+2}\right]=-\frac{5}{16}.$$

$\therefore k=-\dfrac{5}{16}.$

又∵ 切线过$P\left(4,-\frac{7}{4}\right)$，

∴ 切线方程是$y+\frac{7}{4}=-\frac{5}{16}(x-4)$，即$5x+16y+8=0$.

[点评] 本题求出导数值$f'(4)$是关键，根式的化简——分子有理化是常用的方法技巧.

[借题发挥 1] 已知曲线$y=f(x)=x+\frac{1}{x}$上一点$A\left(2,\frac{5}{2}\right)$，求：

(1) 点A处的切线的斜率；

(2) 点A处的切线方程.

题型2 求曲线上点(或切点)的坐标

例 2 求在曲线$y=x^2$上过哪一点的切线：

(1) 平行于直线$y=4x-5$；

(2) 垂直于直线$2x-6y+5=0$.

[解析] 设切点坐标为(x_0,y_0)，由已知直线的斜率求出切线的斜率，再根据导数的几何意义求出切线的斜率，列出方程即可解得.

[答案] $k=y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x$，设$P(x_0,y_0)$是满足条件的点.

(1) ∵ 切线与直线$y=4x-5$平行，

∴ $2x_0=4$，$x_0=2$，$y_0=4$，∴ 所求点的坐标是$P(2,4)$.

(2) ∵ 切线与直线$2x-6y+5=0$垂直，直线$2x-6y+5=0$的斜率是$\frac{1}{3}$，

∴ $2x_0=-3$，$x_0=-\frac{3}{2}$，$y_0=\frac{9}{4}$，∴ 所求点的坐标是$P\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$.

[点评] 利用解析几何中有关两条直线平行(或垂直)的条件列出方程.

[借题发挥 2] 已知曲线C：$y=x^3$.

(1) 求曲线C上横坐标为1的点处的切线方程；

(2) 第(1)小题中的切线与曲线C是否还有其他公共点？

题型3 导数的几何意义的综合应用

例 3 已知曲线$f(x)=x^2+1$和$g(x)=x^3+x$，在其交点处两条切线的夹角为θ，求$\cos\theta$.

[解析] 夹角θ是由两条切线形成的锐角，所以求出切线方程，进而求出切线的方向向量，根据向量的数量积，求得$\cos\theta$.

[答案] 解方程组$\begin{cases}y=x^2+1,\\ y=x^3+x,\end{cases}$得$x^3-x^2+x-1=0$，即$(x-1)(x^2+1)=0$，

∴ $x=1$，$y=2$，即两曲线的交点坐标是$(1,2)$.

$k_1=f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2+1-1-1}{\Delta x}=2$，

∴ 曲线$f(x)$在点$(1,2)$的切线方程l_1是$y-2=2(x-1)$，即$y=2x$.

$k_2=g'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^3+1+\Delta x-1-1}{\Delta x}=4$，

∴ 曲线$g(x)$在点$(1,2)$的切线方程l_2是$y-2=4(x-1)$，即$y=4x-2$.

取切线l_1的方向向量为$\boldsymbol{a}=(1,2)$，切线l_2的方向向量为$\boldsymbol{b}=(1,4)$，

∴ $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{9}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{17}}=\frac{9}{\sqrt{85}}=\frac{9\sqrt{85}}{85}$，

即$\cos\theta$的值是$\frac{9\sqrt{85}}{85}$.

[点评] 取直线的方向向量的方法是：在直线上取两个特殊点(一般为整点)，由这两个点所确定的向量就是直线的方向向量；在用方向向量求直线的夹角时，要注意向量夹角的余弦值与直线夹角的余弦值的关系是$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle|$.

[借题发挥 3] 已知点$M(0,-1)$，$F(0,1)$，过点M的直线l与曲线$y=\frac{1}{3}x^3-4x+4$在$x=2$处的切线平行.

(1) 求直线l的方程；

(2) 求以点F为焦点，l为准线的抛物线C的方程.

提·升·训·练

1. 下列命题:

①与曲线只有一个交点的直线是曲线的一条切线;

②与封闭曲线只有一个交点的直线叫曲线的切线;

③切线是割线的一个交点趋近于另一个交点的极限位置;

④函数在一点处的导数 $f'(x_0)$ 是一个常量,不是变量.

其中正确命题的个数为 ( )

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

2. 函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是 ( )

A. 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的斜率

B. 点 $(x_0, f(x_0))$ 与点 $(0,0)$ 连线的斜率

C. 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与 x 轴所夹的锐角的正切值

D. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率

3. 下列说法正确的是 ( )

A. 若 $f'(x_0)$ 不存在,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处无切线

B. 若 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处有切线,则 $f'(x_0)$ 必存在

C. 若 $f'(x_0)$ 不存在,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率不存在

D. 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处无切线,则曲线在该点处的导数不存在

4. 曲线 $y=2x^2+1$ 在点 $P(-1,3)$ 处的切线方程为 ( )

A. $y=-4x-1$

B. $y=-4x-7$

C. $y=4x-1$

D. $y=4x-7$

5. 如果曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线方程为 $x+2y-3=0$,那么 ( )

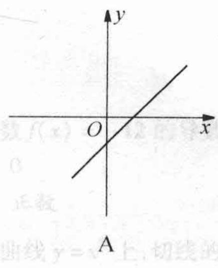
A. $f'(x_0)>0$

B. $f'(x_0)<0$

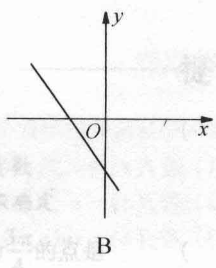
C. $f'(x_0)=0$

D. $f'(x_0)$ 不存在

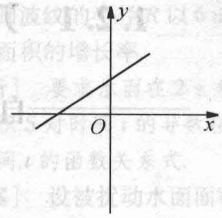
6. 若函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 的图象的顶点在第四象限,则函数 $f'(x)$ 的图象是 ( )



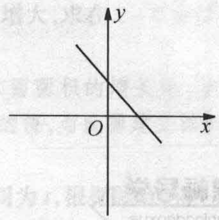
A



B



C



D

7. 函数 $y=2x^3-x$ 在 $x=2$ 处的切线的斜率是________.

8. 曲线 $y=-2x^2+x$ 在点 $(1,-1)$ 处的切线方程是________.

9. 若直线 $y=3x+1$ 是曲线 $y=ax^3$ 的切线,试求 a 的值.

10. 求抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 过点 $\left(4,\frac{7}{4}\right)$ 的切线方程.

1.2 导数的计算

1.2.1 几个常用函数的导数

自·主·探·究

课标导学
kebiaodaoxue

1. 能根据导数的定义求常用函数 $y=c$（c 为常数），$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\frac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$的导数．
2. 掌握并熟记这几种常见函数的求导公式．
3. 会用以上求导公式解决有关问题.

基础梳理
jichushuli

常用函数的导数：

(1) 函数 $y=f(x)=c$ 的导数：$y'=f'(x)=$ ________.

(2) 函数 $y=f(x)=x$ 的导数：$y'=f'(x)=$ ________.

(3) 函数 $y=f(x)=x^2$ 的导数：$y'=f'(x)=$ ________.

(4) 函数 $y=f(x)=\frac{1}{x}$的导数：$y'=f'(x)=$ ________.

(5) 函数 $y=f(x)=\sqrt{x}$的导数：$y'=f'(x)=$ ________.

【参考答案】

(1) 0

(2) 1

(3) $2x$

(4) $-\frac{1}{x^2}$

(5) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

重·难·点·突·破

疑难剖析
yinanpouxi

1. 函数 $y=f(x)=c$ 的导数为 $y'=0$ 的几何意义是函数 $y=c$ 图象上每一点处的切线的斜率都为 0；若 $y=c$ 表示路程关于时间的函数，则 $y'=0$ 可解释为某物体的瞬时速度始终为 0，即物体始终处于静止状态．

2. 函数 $y=f(x)=x$ 的导数为 $y'=1$ 的几何意义是函数 $y=x$ 图象上每一点处的切线的斜率都为 1；若 $y=x$ 表示路程关于时间的函数，则 $y'=1$ 可以解释为某物体作瞬时速度为 1 的匀速运动．

3. 函数 $y=f(x)=x^2$ 的导数为 $y'=2x$ 的几何意义是函数 $y=x^2$ 图象上点 (x,y) 处的切线的斜率为 $2x$，说明随着曲线上点的变化，相应的切线的斜率也变化，当 $x<0$ 时，$y'<0$，图象有下降趋势，当 $x=0$ 时，$y'=0$，点为图象的最低点，当 $x>0$ 时，$y'>0$，图象有上升趋势；若 $y=x^2$ 表示路程关于时间的函数，则 $y'=2x$ 可以解释为某物体作变速运动，且它在时刻 x 的瞬时速度是 $2x$.

4. 函数 $y=f(x)=\frac{1}{x}$的导数为 $y'=-\frac{1}{x^2}<0$，说明双曲线 $y=\frac{1}{x}$上任意一点的切线斜率都为负值，不论 $x>0$ 或 $x<0$，函数的图象都有下降的趋势．

5. 在推导函数 $y=\sqrt{x}$导数的公式时，注意推导过程中的变形技巧：分子有理化. 由 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$可知，当 $x=0$ 时，y'不存在；当 $x>0$ 时，$y'>0$，图象有上升的趋势，函数是增函数.

典型题解
dianxingtijie

题型1　求曲线的切线方程

例 1　求曲线 $y=\frac{1}{x}$在点 $M(3,3)$处的切线方程.

[解析]　利用导数公式 $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$求出切线的斜率，然后根据点斜式写出切线方程.

[答案]　$\because y'=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$,

$\therefore k=y'\big|_{x=3}=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\Big|_{x=3}=-\frac{1}{9}$.

$\therefore$ 所求的切线方程是 $y-3=-\frac{1}{9}(x-3)$，

即 $x+9y-30=0$.

[点评]　在求切线的斜率时，可由导数公式直接求得.

[借题发挥 1]　求曲线 $y=\sqrt{x}$的斜率为$\frac{1}{4}$的切线方程.