高等工业专科学校试用教材

简明运筹学

江苏省《工程数学》编写组

东南大学出版社

简明运筹学

江天学　黄劳生　眭发鸿　编

东南大学出版社

内 容 简 介

本书内容包括：线性规划、动态规划、图与网络、库存控制、排队论、决策分析、矩阵对策的基本知识及应用共七章，每章有习题，书后附答案．内容简明扼要、通俗易懂、精练实用，便于自学．全书采用模块式结构、各章可独立使用，适用于22学时至70学时范围的各种教学计划．

本书可作为高等专科学校、职业大学、职工大学、业余大学、函大、夜大、干部训练班、专业证书班、厂长培训班等有关专业学生的教材或教学参考书．也可供厂矿企业、工程技术人员、系统工程人员、区域规划工作人员参考．

简明运筹学

江天学　黄劳生　眭发鸿　编

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼2号)

南京航空学院飞达印刷厂

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 13,344 字数 340 千字

1991年6月 第1版 1991年6月第1次印刷

印数：1–1560册

ISBN7–81023–486–2

O・44　　定价:6.40元

责任编辑　雷家煜

前　　言

本教材是在江苏省教委高校教学处的组织指导下，在继《高等数学》编写之后作为高等工业专科学校使用的《工程数学》成套系列试用教材，它包括线性代数、概率论与数理统计、简明运筹学、数学物理方法。

本套教材在内容选择、结构体系及应用举例诸方面都努力体现基础为专业服务的思想，具有鲜明的专科特色，认真贯彻了少而精的原则，注重学生基本运算能力和运算方法的训练及理论联系实际能力的培养。

这套教材供高等工业专科学校、职业大学各专业使用，也可作为职工大学、业余大学、干部训练班、专业培训班等作为选用教材，还可供已学过高等数学进一步自学成才的同志以及工程技术人员选用。

《工程数学》全套教材由编写组组长汪瑶同副教授统编。线性代数为彭玉芳（常州工业技术学院副教授）、汪瑶同（扬州工学院）编写，由喜玉芳定稿，概率论与数理统计为常伯林（盐城工业专科学院副教授）、高峻（扬州工学院）、柴国栋（扬州水利专科学院副教授）编写，由常伯林定稿；简明运筹学为江天学（常州工业技术学院副教授）、黄劳生（总参工程兵工程学院副教授）、眭发鸿（扬州水利专科学院副教授）编写，由江天学定稿；数学物理方法中场论与积分变换部分为王清俊（江南社会学院副教授）、李振华（常州工业技术学院）编写，由王清俊定稿，复变函数部分为黄绍贤（扬州工学院副教授）、张受衡（常州工业技术学院）编写，由黄绍贤定稿，数学物理方程部分为张茂康（扬州工学院）、秦国强（总参工程兵工程学院副教授）编写，

由张茂康定稿。

本套教材在编写过程中得到了江苏省教委高校教学处邱坤荣处长的指导和帮助，全国工科数学课程指导委员会委员、东南大学陶永德教授审阅了全套教材提出了许多宝贵的修改意见，对完成本教材起了重要的指导作用，扬州工学院蔡蕃老师为本套教材绘制了全部插图，我们一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，敬请读者批评指正。

江苏省《工程数学》编写组

1991年2月

目　录

第一章　线性规划

任何经济活动或生产活动都必须十分注意提高经济效益，充分利用现有的资源与生产条件，寻求最有利的工作方案，最有利的生产组织与计划，达到高效、优质、低消耗、低成本的目的，线性规划所研究的正是这类问题。线性规划的任务有两个：其一，在一定的人力、物力、财力条件下，如何科学地安排生产，使产量或利润达到最大；其二，如何合理地筹划安排使用最少的人力、物力、财力资源去完成给定的任务。

线性规划是运筹学中研究较早，发展较快，应用较广，比较成熟的一个分支，是学习运筹学其它一些分支的基础，是一门重要的现代管理科学。

线性规划可以归结为一类条件极值问题，即在一组线性等式或线性不等式约束条件下，寻求一个线性函数的最大值或最小值。这样的一类极值问题可以容纳非常多的变量和约束条件。要解决这类极值问题单靠微积分方法已显得无能为力。

第一节　线性规划问题的数学模型

用线性规划来解决实际问题的关键环节是将具体的经济管理问题转化为数学问题，即建立线性规划问题的数学模型。线性规划问题的模型很多，我们研究其中最重要最有代表性的四个模型。

(1) 生产计划安排问题；

(2) 配料问题（营养问题）；

(3) 合理下料问题；

(4) 运输问题。

有了这四个模型做基础，其它模型的建立也就比较顺利。

建立线性规划模型一般有三个步骤:

(1) 明确决策变量　将有待解决的未知量设为 x_1，x_2，…，x_n 等;

(2) 列出约束条件　分别用未知量的线性方程或不等式写出问题的全部约束条件;

(3) 确定目标函数　用 max 或 min 表示要解决的是目标的最大化问题还是最小化问题。

现在通过具体例子来进行阐述。

例 1　某工厂要用 A_1、A_2、A_3 三种原料生产甲乙两种产品，假设每生产一个单位的甲产品需耗用 A_1 原料 1t（吨）、A_2 原料 4t；每生产一个单位的乙产品需耗用 A_1 原料 2t、A_3 原料 4t。生产甲产品一个单位可获利 2 千元，生产乙产品一个单位可获利 3 千元。而 A_1、A_2、A_3 三种原料的库存量分别为 8t，16t，12t，问甲、乙两种产品各生产多少才能使工厂获利最大。

分析　先把实际问题简化列出表 1–1。

表 1–1　原料、产品、利润关系表

原 料	单位产品所需的原料		原料库存量(t)
	甲	乙	
A_1	1	2	8
A_2	4	0	16
A_3	0	4	12
单位产品可得利润(千元)	2	3	

设 x_1、x_2 分别为甲、乙两种产品的生产量，则按照题意 A_1、A_2、A_3 三种原料的总消耗量不能超过原料库存量，所以

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leqslant 8 \\ 4x_1 \qquad &\leqslant 16 \\ 4x_2 &\leqslant 12 \end{aligned}$$

又因为甲、乙两种产品的生产量必须为正，即

$$x_1 \geqslant 0$$

$$x_2 \geqslant 0$$

上面的五个不等式就是生产两种产品的限制条件，也称为约束条件。又因为甲、乙两种产品的产量分别为 x_1 与 x_2 单位时的总利润为 $2x_1+3x_2$（千元），所以我们称 $Z=2x_1+3x_2$ 为目标函数，于是本问题就是如何安排产量 x_1、x_2 满足约束条件，并使目标函数 $Z=2x_1+3x_2$ 达到最大值。因此，原问题的数学模型为:

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ 4x_1 \qquad \leqslant 16, \\ \qquad 4x_2 \leqslant 12, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

s.t.意为“受约束于……”。

例 2 设有 B_1、B_2 两种食物都含有钙（A_1）、蛋白质（A_2）、热量(A_3) 三种营养，每种食物的价格、含有的营养及人体对每种营养每日最低需要量如表 1-2 所示。

表 1-2　食物、营养、价格关系表

营养	单位食物所含的营养成份		每日最低需要量
	B_1	B_2	
A_1(钙)	10	4	20
A_2(蛋白质)	5	5	20
A_3(热量)	2	6	12
食物单价(元)	0.60	1.00	

问如何选购这两种食物既满足每日营养的需要量，又使花费的费用最小。

分析　设每天食物 B_1 的选购量为 x_1 个单位，食物 B_2 的选购量为 x_2 个单位。由于人对钙、蛋白质、热量的每日最低需要量分别为 20 单位，20 单位，12 单位，所以 x_1，x_2 必须满足

$$
\begin{aligned}
10x_1+4x_2&\geqslant 20,\\
5x_1+5x_2&\geqslant 20,\\
2x_1+6x_2&\geqslant 12,\\
x_1&\geqslant 0,\\
x_2&\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

目标函数是在保证营养的条件下，花钱最少，也就是说求 $s=0.6x_1+x_2$ 的最小值。所以，该问题的数学模型为:

$$\min\ s = 0.6x_1 + x_2;$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}10x_1 + 4x_2 \geqslant 20,\\ 5x_1 + 5x_2 \geqslant 20,\\ 2x_1 + 6x_2 \geqslant 12,\\ x_1 \geqslant 0\\ x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

例 3 某车间有一批长为 180cm 的炭结圆钢，现因生产需要，要将它截成 70cm、52cm、35cm 三种不同规格的条料，三种条料的需要量分别为 100 根、150 根、100 根．问应如何下料，才能使 180cm 长的定尺圆钢用量为最少．

分析 下料时每一根圆钢可以有好几种裁截方式，本例共有八种截法．现将八种截法所得的条料数一一列出汇总于表 1–3 中（截口损耗忽略不计）．

表 1–3　下料规格、方式关系表

下料规格(cm)	8 种下料法的条料数								需要量(条)
	1	2	3	4	5	6	7	8	
70	2	1	1	1	0	0	0	0	100
52	0	2	1	0	3	2	1	0	150
35	1	0	1	3	0	2	3	5	100
余　料	5	6	23	5	24	6	23	5	

解 设第 j 种下料方式所用的圆钢数为 x_j 根（$j = 1, 2, \cdots, 8$）为了使所用的圆钢根数最少，则目标函数可用

$s=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8$ 或 $s_1=5x_1+6x_2+23x_3+5x_4+24x_5+6x_6+23x_7+5x_8$ 表示，且使之最小。

前者意为定尺圆钢条数最小化，后者意为使总的余料为最少。而所使用的圆钢总长度最短时，残余料的总长度也一定最短两种写法是一致的。从而本题的数学模型是

$$\min\ s=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8;$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+x_4, & \geqslant 100\\ 2x_2+x_3+3x_5+2x_6+x_7, & \geqslant 150\\ x_1+x_3+3x_4+2x_6+3x_7+5x_8 & \geqslant 100\\ x_j\geqslant 0,\ \text{且为整数.} & (j=1,2,\cdots,8)\end{cases}$$

将上面所述的一些具体问题加以扩充推广到更一般的情形，于是生产计划安排问题、配料问题、合理下料问题的一般数学模型可表达如下：

模型(1) 生产计划安排问题

设用 A_1，A_2，……，A_m 种原料，可以生产 B_1，B_2，……，B_n 种产品。现有原料数、每单位产品所需原料数及每单位产品可得到的利润如表 1-4 所示，问应如何安排生产才能使工厂获利最大。

表 1-4 原料、产品关系表

原 料	单位产品所需原料				现有原料
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2n}	a_2
A_m	C_{m1}	C_{m2}	…	C_{mn}	a_m
单位产品所得利润	b_1	b_2	…	b_n	

解 设 x_j 为生产产品 B_j（$j=1, 2, \cdots, n$）的计划数，则本题的数学模型为

$$\max \quad Z = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \leqslant a_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \leqslant a_2 \\ \cdots\cdots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n \leqslant a_m \\ x_j \geqslant 0 \qquad (j=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

模型(2) 配料问题

设用 n 种原料 B_1，B_2，…，B_n 制成有 m 种成分 A_1、A_2、…，A_m 的产品，各种原料所含的成分如表 1–5 所示，且各产品所含原料的成分的需要量要求不低于 a_1，a_2，…，a_n，而原料的单价分别为 b_1、b_2，…，b_n。问应如何配料，才能使产品的成本最低。

表 1–5 原料、成分关系表

原　料	单位产品所需原料				现有原料
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2n}	a_2
A_m	C_{m1}	C_{m2}	…	C_{mn}	a_m
原料的单价	b_1	b_2	…	b_n	