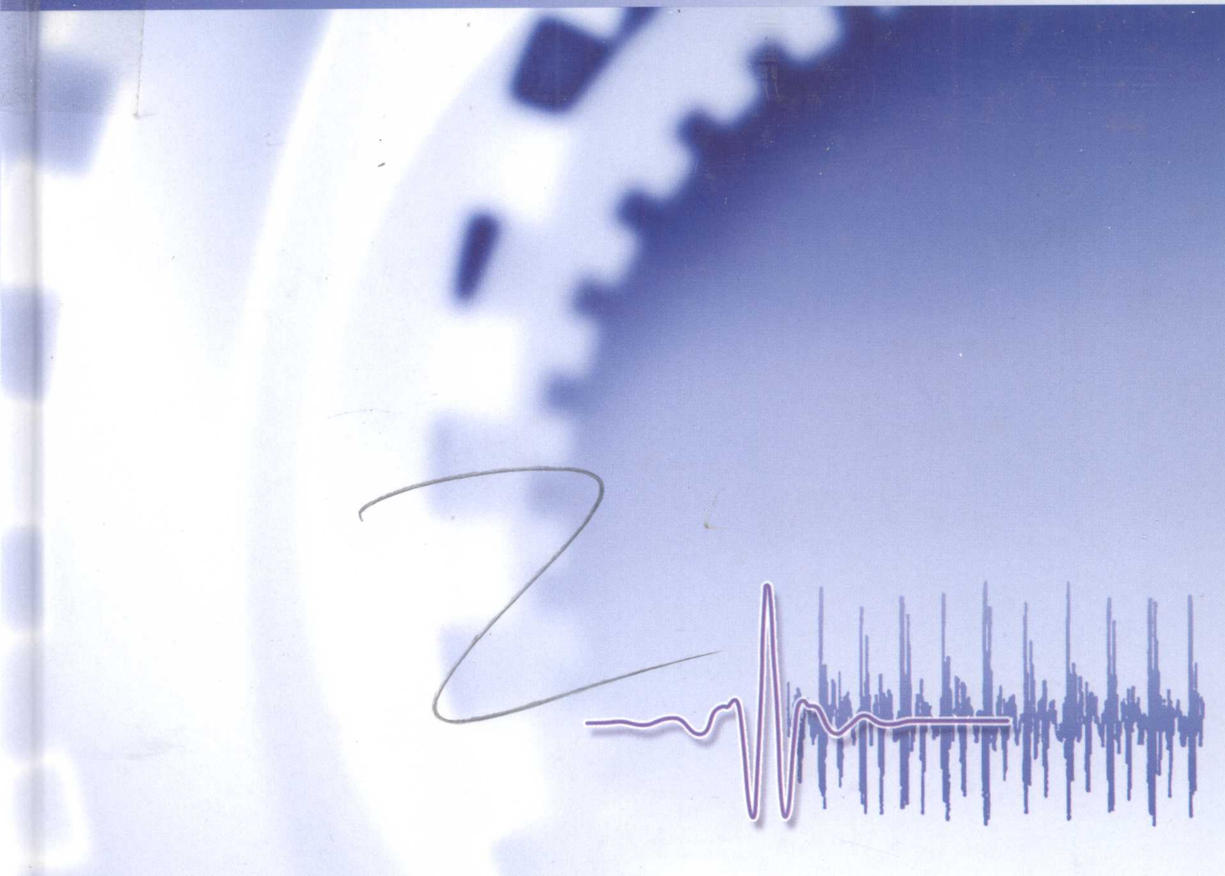

机械故障诊断的内积变换原理与应用

何正嘉　袁　静　訾艳阳　著

科　学　出　版　社

机械故障诊断的内积变换原理与应用

何正嘉　袁　静　訾艳阳　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书以Hilbert空间的内积变换为理论基础，以信号特征提取和故障诊断为研究目标，重点讨论动态信号特征与基函数的合理构造，内容涉及Hilbert空间数学基础、小波变换与多分辨分析、第二代及冗余第二代小波变换、双树复小波变换、多小波变换以及基于多小波变换的信号处理技术，用形象的数字仿真结果和典型的工程案例分析来阐述机械信号处理方法。

本书可供在机械、能源、冶金、石化、运载、国防等国民经济工矿企业中从事机械设备状态监测、故障诊断和预知维修工作的科技人员使用，也可作为高等院校机械工程、能源动力和仪器仪表学科中从事与本领域研究相关的教师和研究生的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

机械故障诊断的内积变换原理与应用 / 何正嘉，袁静，訾艳阳著.
—北京：科学出版社，2012

ISBN 978-7-03-033119-9

Ⅰ.①机… Ⅱ.①何…②袁…③訾… Ⅲ.①机械设备-故障诊断
Ⅳ.①TH17

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第270104号

责任编辑：刘宝莉 / 责任校对：朱光兰
责任印制：赵 博 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012年1月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2012年1月第一次印刷 印张：20 1/4
字数：390 000

定价：80.00元

中国科学院科学出版基金资助出版

前　言

机械、运载、能源、冶金、石化、国防等国民经济行业中的关键机械设备，长期在重载、疲劳、腐蚀、高温等复杂、恶劣的工况下运行，设备中的核心零部件和重要机械结构不可避免地会发生不同程度的故障。例如，汽轮发电机组、航空发动机、燃汽轮机等大型旋转机械出现动静碰摩、密封摩擦、轴瓦破碎、转子裂纹等故障现象；高速机车、连铸连轧机组、数控机床等装备中的主轴、齿轮、轴承和丝杠经常出现磨损、腐蚀、剥落、胶合、擦伤、裂纹、断齿等故障现象；大型内燃机、往复式压缩机、工程机械等装备在变工况作用下，其曲轴、轴承、连杆、活塞、液压泵、液压缸、液压阀等产生磨损、疲劳断裂以及穴蚀、烧蚀、泄漏等故障现象；在大型飞机和风电装备中使用的复合材料用量日趋增加，在使用过程中复合材料结构会出现纤维断裂、基体开裂、层间剥离等损伤现象。

机械设备一旦出现事故，将带来巨大的经济损失和人员伤亡。近年来，国内外机械设备因各种故障引起的灾难性事故屡有发生。这些事故多是由于机械设备在运行过程中产生的故障引发的，人们对故障萌生及其演变缺少必要的动态监测与故障预示先进手段，致使事故防不胜防，难以保障关键设备的运行安全。所以，机械设备故障监测与预示，对于保障设备运行安全、避免经济损失和人员伤亡意义重大，一直是国内外工程领域研究的难点和热点。《国家中长期科学技术发展规划纲要(2006—2020 年)》、国家自然科学基金委《机械工程学科发展战略报告(2011—2020 年)》，均将与故障诊断相关的重大产品、重大设施和复杂机电系统运行的可靠性、安全性、可维护性等关键技术列为重要的研究方向。

故障(fault)是机器的部件或组件劣化或出现可能导致机器失效(failure，丧失完成某项规定功能的能力)的反常状态时，部件或组件所处的状态。随着机械设备的不断运行，故障状态处于劣化或蜕变的渐进物理过程，可以说故障既是状态(设备性能和状况)又是过程(故障萌生和扩展)。设备在运行中萌生的故障(即早期故障)，具有症状不明显、特征信息微弱的特点。即使故障发展到一定程度，故障症状往往被机械设备运行过程的强大噪声所淹没而显得十分微弱。因此，故障动态响应信号的微弱性表现在两个方面：一是故障动态信号本身非常微弱(早期故障)；二是故障特征信号被机械系统多干扰源和强噪声所淹没，信噪比低，难以识别。正因如此，使得关键设备的运行监测、故障诊断的难度不断增大。现有的多种无损检测技术往往适用于停机检修过程中的静态设备对象，设备在运行中萌生和扩展的故障被漏检时有发生，很难实现机械设备在运行过程中故障动态监测与诊断。因此，机械设备故障的动态监测与诊断始终是故障诊断领域的前沿与挑战性难题，只有

不断研究开发故障预示的新理论和新技术，掌握故障演变规律，进行有效的故障特征提取和运行状态识别，才能防患于未然，保障设备运行安全。

基于故障既是状态又是过程这一本质属性，如何利用运行过程中机械设备的状态参数和动态响应对故障特征进行提取，实现其故障状态与演变过程的动态识别，从而达到故障诊断的目的，是本领域科技工作者孜孜以求的奋斗目标。工程中关键设备结构复杂，部件繁多，采集到的故障动态信号是各部件响应的综合反映，且系统传递途径的影响增加了信号的复杂程度。不同类型的故障及其扩展，在设备运行过程中引发的振动、噪声、声发射、应力、应变、压力、流量等动态响应信号具有不同的特征波形，现代信号处理方法在动态信号的特征提取方面取得了长足进展，快速傅里叶变换、短时傅里叶变换、小波变换、第二代小波变换、多小波变换、双树复小波变换等信号处理方法，为关键设备运行监测与故障诊断奠定了基础并在众多领域不断取得可喜的工程应用效果。

上述信号处理的变换方法分别在不同的历史时期问世，它们在机械设备状态监测与故障诊断的工程应用中发挥着各具特色的重要作用。尽管这些方法实施途径不同，但都具有相同的共性，这一共性就是 Hilbert 空间完备的内积变换，旨在探求信号中包含与“基函数”最相似或最相关的分量。本书针对这些方法通过信号与基函数的内积变换将它们联系起来，建立基于内积变换的特征波形基函数信号分解与特征提取的机械故障诊断原理和技术，重点研究基函数的构造方法和作用，使所构造的基函数与动态信号物理特征达到最佳匹配，以便有效地提取故障特征，实现科学、正确的状态监测与故障诊断。“同于道者，道亦乐得之”(老子)这一哲理正好反映选择与故障特征波形相似的基函数，就可以满意地得到故障诊断合理结果的客观规律。作者基于经典小波变换进行机械设备非平稳信号的故障诊断原理研究和应用，认识到从傅里叶变换到小波变换，其本质都是内积变换，区别在于采用不同的基函数。对谐波信号采用三角基函数进行傅里叶变换，其结果是很理想的，而对非平稳信号采用小波基函数进行小波变换，其结果也必将理想。近年来，作者们继续研究第二代小波、双树复小波、多小波变换的故障诊断原理和应用，深刻感受到这些方法的内积变换和基函数构造的数学魅力和自然哲理，期望让读者也分享这一感受，正是撰写本书的初衷。

作者主持和承担了两项国家自然科学基金重点项目“大型复杂机电系统早期故障智能预示的理论与技术”(50335030，2004－2007 年)和“关键设备故障预示与运行安全保障的新理论和新技术”(51035007，2011－2014 年)，高等学校博士学科点专项科研基金资助项目“优良特性多小波构造原理与机电设备复合故障诊断”(200806980011，2009－2011 年)，国家高技术研究发展计划 863 项目“大型动力装备故障微弱特征识别技术研究”(No. 2006AA04Z430，2006－2008 年)，国家重点基础发展计划 973 项目“数字化制造基础研究(2005CB724100，2006－2010 年)”和“超高速加工及其装备基础研究”(2009CB724405，2009－2014 年)等，在项目的执

行过程中,针对工程中的实际问题,努力从理论和应用上进行探索,为有效提取诊断信息做了有益的尝试。我们的研究成果已广泛应用于国民经济基础产业,为旋转机械、往复机械、航空发动机、冶金轧机、电力机车等机电设备中常见多发故障,提供具有普遍意义的大型复杂机电系统早期故障智能预示和运行安全保障的理论与技术。本研究成果获 2008 年教育部技术发明一等奖、2009 年国家技术发明奖二等奖。作者们将所取得的研究成果进行加工、凝练、整理和总结,供从事机械设备监测诊断工作的科技人员和师生们参考。

本书以 Hilbert 空间的内积变换为理论基础,以信号特征提取和故障诊断为研究目标,重点讨论动态信号特征与基函数的合理构造,用形象的数字仿真结果和典型的工程案例分析来阐述机械信号处理方法、故障诊断原理和工程应用效果,努力使本书形成以下特点:

(1) 具有先进性。总结作者在本领域的最新研究成果,在基于经典小波变换的理论和应用的基础上,深入研究第二代小波变换、多小波变换、双树复小波变换等信号处理方法,反映信号降噪和微弱信号提取研究和应用中的新进展。

(2) 具有实用性。介绍基于内积变换的先进信号处理技术在故障诊断中的原理和应用,针对工程中的典型故障,给出诊断依据和结论,对科研人员和工程技术人员有参考价值。

(3) 具有可读性。本书以故障信号与基函数的内积变换为主线,内容深入浅出,结构编排合理。既有基本原理,又有综合方法,工程背景明确,案例分析典型,便于加深读者对本书内容的理解。

本书内容取材于作者所在的西安交通大学装备智能诊断与控制研究所的科研积累,以及赵纪元、訾艳阳、陈雪峰、张周锁、李兵、马军星、薛继军、杨胜军、高强、向家伟、李富才、胥永刚、段晨东、李凌均、姜洪开、丁康、胡桥、祁克玉、何育民、李臻、谭继勇、王衍学、董洪波、雷亚国、汪友明、丁锋、王晓冬、曹宏瑞、袁静、程礼、陈保家、叶俊杰、张小丽、孙海亮、陈彬强等博士的创新研究成果。博士生孙海亮、陈彬强在书稿的校对和排版等方面做了大量的工作。我们都忘不了英年早逝的博士生陈华新生前做出的贡献。

作者由衷地感谢国家自然科学基金委员会、工信部、教育部在科研立项和研究基金等方面的多项资助(51035007;200806980011;2009CB724405)。感谢东方汽轮机公司、解放军空军 5719 厂、西门子信号有限公司、上海宝钢集团检测公司、中国兵器集团第 202 研究所、北京京能热电股份有限公司等单位的支持与协助。谨向长期以来关心和支持我们工作的众多同仁致以由衷的感谢!

由于水平有限,涉面不广,书中难免存在不当之处。我们诚恳地欢迎广大读者批评指正和不吝赐教。

何正嘉

2011 年 8 月于西安交通大学兴庆校区

目　录

第1章 绪 论

机械设备状态监测与故障诊断广泛运用的现代信号处理技术，它的数学基础与泛函分析密切相关。泛函分析综合了函数论、几何学、代数学的思想和方法，研究无限维向量空间中的问题，在信号处理、量子物理、优化理论、控制论、概率论、函数论等学科中都有重要应用，并且已经渗透到诸多工程技术性的学科中，它的空间理论已成为近代分析的基础之一。

泛函分析是 Euclid 空间上的微积分学和解析几何学的延伸。例如，连续实函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的积分

$$J(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

就是一个泛函数，它的变元由实数变成为实函数，这种函数的函数是泛函分析最早研究的对象。由于泛函分析吸取了各个数学分支中的精华，具有高度的抽象性、系统性和普遍性，为各种学科提供了一般的数学规律和重要的工具。整个泛函分析都是用“空间”来描述的，这使很多经典理论具有简单明了的几何直观性。在本书中简要介绍与数值分析关系比较密切的基本理论和定理，包括距离空间、赋范空间、内积空间与 Hilbert 空间等函数空间的数值逼近[1,2]。这些内容是后续章节的数学基础，便于加深读者在阅读中的理解。

1.1 距离空间

1.1.1 距离空间的定义

定义 1.1.1 设 X 表示非空集合，若其中任意两元素 x,y 按一定规则与一实数 $d(x,y)$ 相对应，且 $d(x,y)$ 满足以下三条公理(距离公理)。

(1) 非负性：$d(x,y)\geqslant 0$，当且仅当 $x=y$ 时等号成立；

(2) 对称性：$d(x,y)=d(y,x)$；

(3) 三角不等式：$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$。

则称 $d(x,y)$ 为 x 与 y 间的距离，记为 (X,d)。

对于距离空间 (X,d)，若 M 是 R 的非空子集，则 d 限制在 $M\times M$ 上还是一个距离函数，故 (M,d) 也是一个距离空间，称 X 的**子空间**。

下面举例说明几种距离的定义。

(1) 设 $\mathbf{R}^1$ 为非空实数集,对其中任意两实数 x 和 y,定义距离

$$d(x,y)=|x-y| \tag{1.1.1}$$

显然满足距离公理(1)非负性,称为欧氏距离。$\mathbf{R}^1$ 按式(1.1.1)构成一距离空间。

(2) 设 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维实向量全体构成的空间,定义距离如下:

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中任意两元素,则

$$d(x,y)=\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\Big)^{1/2} \tag{1.1.2}$$

可以证明,它满足距离公理。当 $n=2$ 时,则由式(1.1.2)定义的距离即为平面上两点间距离。

(3) 用 $C_{[a,b]}$ 表示定义在 $[a,b]$ 上所有连续函数的全体,对于任意 $x(t)$, $y(t)\in C_{[a,b]}$,可定义距离

$$d(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)| \tag{1.1.3}$$

(4) 用 $L^2_{[a,b]}$ 表示 $[a,b]$ 上平方可积函数的全体,即对任意的 $x(t)\in L^2_{[a,b]}$ 都有

$$\int_a^b |x(t)|^2\mathrm{d}t<+\infty$$

则可在 $L^2_{[a,b]}$ 中定义距离:对于任意 $x(t),y(t)\in L^2_{[a,b]}$,有

$$d(x(t),y(t))=\Big(\int_a^b|x(t)-y(t)|^2\mathrm{d}t\Big)^{1/2} \tag{1.1.4}$$

(5) 用 $l^2(\mathbf{Z})$ 表示满足 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<+\infty$ 的平方可和实数列的全体,则其中任意两点

$$x=(x_1,x_2,\cdots),\qquad y=(y_1,y_2,\cdots)$$

之间的距离可定义如下:

$$d(x,y)=\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^2\Big)^{1/2} \tag{1.1.5}$$

可见,在任意两实数、向量、函数、数列之间引进距离,具有更广泛的含义。

1.1.2 距离空间的完备性

定义 1.1.2 设 X 为距离空间,$x_n(n=1,2,\cdots)$ 是 X 中的点列,$x\in X$,如果当 $n\to\infty$ 时,数列 $d(x_n,x)\to 0$,则称点列 x_n 按距离 $d(x,y)$ 收敛于 x,记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x \tag{1.1.6}$$

此时,称 x_n 为收敛点列,称 x 为 x_n 的极限。

定义 1.1.2 告诉我们,在距离空间中一般点列的收敛是通过距离的收敛来定义的。有了收敛的概念,我们可以讨论距离空间的完备性。

定义 1.1.3 距离空间 (X,d) 中的点列 x_n 称为基本列(Cauchy 列),若任意

给定 $\varepsilon > 0$，存在自然数 N_ε，当 $m,n > N_\varepsilon$ 时，有

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \tag{1.1.7}$$

由上述定义可知，x_n 为基本列(Cauchy 列)的充分必要条件是

$$d(x_m, x_n) \to 0, \quad m,n \to \infty$$

定义 1.1.4　距离空间 (X,d) 称为完备的，若 X 中的任一基本列(Cauchy 列)都收敛到 X 中的一点。

在完备空间中要证明一个点列收敛，只需证明它是基本列(Cauchy 列)，而不必预先知道其极限值。完备性可以使得一些经典的分析理论在距离空间中继续延续，所以在泛函分析中主要的研究对象是完备空间。可以证明，由式(1.1.1)～式(1.1.5)定义的距离都是完备的距离空间[1,2]。

1.2　赋范线性空间

1.2.1　线性空间的定义

定义 1.2.1　设 X 是一个非空集合，$\mathbf{K}$ 是数域(实数域 $\mathbf{R}$ 或复数域 $\mathbf{C}$)，X 称为数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，若任意给定 $x,y \in X$，都有唯一的一个元素 $z \in X$ 与之对应，称为 x 与 y 的和，记作

$$z = x + y \tag{1.2.1}$$

任意给定 $x \in X, \alpha \in \mathbf{K}$，都有唯一的一个元素 $u \in X$ 与之对应，称为 α 与 x 的积，记作

$$u = \alpha x \tag{1.2.2}$$

且任意给定 $x,y,z \in X, \alpha,\beta \in \mathbf{K}$，上述的加法与乘法运算(称为线性运算)满足下列 8 条运算规则：

(1) $x + y = y + x$；

(2) $(x + y) + z = x + (y + z)$；

(3) 存在零元素 $0 \in X$，有 $x + 0 = x$；

(4) 存在负元素 $-x \in X$，有 $x + (-x) = 0$；

(5) $1 \cdot x = x, 0 \cdot x = 0$；

(6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$；

(7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$；

(8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$。

当 $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ 时，称 X 为实线性空间；当 $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ 时，称 X 为复线性空间。

1.2.2　赋范线性空间的定义

定义 1.2.2　设 X 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，若任意给定 $x \in X$，都有一个非负

实数 $\|x\|$ 与之对应，使得任意给定 $x,y\in X,\alpha\in\mathbf{K}$，下列范数公理成立：

(1) 正定性：$\|x\|\geqslant 0,\|x\|=0\Longleftrightarrow x=0$；

(2) 绝对齐次性：$\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$；

(3) 三角不等式：$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$。

则称 $\|x\|$ 为 x 的范数，称 X 是数域 $\mathbf{K}$ 上的赋范线性空间，记作 $(X,\|\cdot\|)$。

由于实数的有序性，可以比较大小，因此范数可度量大小。任何赋范线性空间都是距离空间，因在赋范线性空间中，任意两点 x,y 之间的距离都可以通过范数来定义，称为由范数导出的距离：

$$d(x,y)=\|x-y\| \tag{1.2.3}$$

对于范数的计算，在 $\mathbf{R}^n$ 中可定义范数

$$\|x\|=\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\Big)^{1/2} \tag{1.2.4}$$

也可定义范数为

$$\|x\|_1=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i| \tag{1.2.5}$$

由上面范数的计算，可导出 $\mathbf{R}^n$ 中的距离

$$d(x,y)=\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\Big)^{1/2} \tag{1.2.6}$$

$$d_1(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i| \tag{1.2.7}$$

在连续函数的全体 $C_{[a,b]}$ 中，可定义范数

$$\|x\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)| \tag{1.2.8}$$

并由它可导出距离

$$d(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)| \tag{1.2.9}$$

在平方可积函数的全体 $L^2_{[a,b]}$ 中，可定义范数

$$\|x\|=\Big(\int_a^b|x(t)|^2\mathrm{d}t\Big)^{1/2} \tag{1.2.10}$$

并由它可导出距离

$$d(x,y)=\Big(\int_a^b|x(t)-y(t)|^2\mathrm{d}t\Big)^{1/2} \tag{1.2.11}$$

对于 p 次幂可和数列空间 $l^p(\mathbf{Z})$ 空间，$1\leqslant p\leqslant\infty$，可定义范数

$$\|x\|_p=\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\Big)^{1/p} \tag{1.2.12}$$

当 $p=2$，平方可和实数列的全体 $l^2(\mathbf{Z})$ 中，范数 $\|\cdot\|_2$ 称为 Euclid 范数。

赋范线性空间中的距离都是指由范数导出的距离，因此赋范线性空间中的收敛问题可按照范数来考虑。

定义 1.2.3 设 X 是赋范线性空间，$x_n, x \in X$，若

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0 \tag{1.2.13}$$

则称点列 x_n 按范数收敛于 x。

1.3 内积空间

在 1.1 节和 1.2 节，我们已经将 Euclid 空间中的距离概念推广到距离空间和赋范线性空间，使得许多涉及向量长度的结论都能在赋范线性空间中得以直观运用。实际应用中向量之间的夹角、正交等概念十分重要，本节在赋范线性空间中引入向量内积的概念，以形成结构更为丰富的内积空间。内积空间保持了 Euclid 空间很多几何性质，是 Euclid 空间最自然的推广。

1.3.1 内积空间的定义

定义 1.3.1 设 X 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间，若任意给定 $x, y \in X$，都有唯一的数 $\langle x, y\rangle \in \mathbf{K}$ 与之对应，且满足

(1) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle, \alpha \in \mathbf{K}$;

(2) $\langle x+z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle, z \in X$;

(3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;

(4) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ 且 $\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$。

则称 $\langle x, y\rangle$ 为 x, y 的内积，称 X 为数域 $\mathbf{K}$ 上的内积空间，记作 $(X, \langle\cdot, \cdot\rangle)$。

由于 $\mathbf{K}$ 可以是实数域或复数域，因而 X 可以是实内积空间或复内积空间。自然，内积也可以是实数或复数。下面举例说明内积空间：

(1) 任意给定 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$，定义

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{1.3.1}$$

则 $(\mathbf{R}^n, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ 是一个内积空间。

(2) 任意给定 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{C}^n$，定义

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \tag{1.3.2}$$

则 $(\mathbf{C}^n, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ 是一个内积空间。

(3) 任意给定 $x = (x_1, x_2, \cdots), y = (y_1, y_2, \cdots) \in l^2(\mathbf{Z})$，定义

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} \tag{1.3.3}$$

则 $(l^2(\mathbf{Z}), \langle\cdot, \cdot\rangle)$ 是一个内积空间。

(4) 任意给定 $x(t), y(t) \in L^2_{[a,b]}$，定义

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t \tag{1.3.4}$$

则 $(L^2_{[a,b]}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个内积空间。

1.3.2 内积的性质

这里以定理形式给出内积的三条性质，证明从略，可参考相关文献[1]、[2]。

1) Schwarz 不等式

定理 1.3.1 设 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是内积空间，则任意给定 $x, y \in X$，有

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \tag{1.3.5}$$

2) 由内积导出范数

定理 1.3.2 设 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是内积空间，任意给定 $x \in X$，定义

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{1.3.6}$$

则 $\|\cdot\|$ 是 X 上的范数。

在范数的记号下，Schwarz 不等式(1.3.5)可写为

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\| \tag{1.3.7}$$

3) 内积的连续性

定理 1.3.3 若在内积空间 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 中有

$$x_n \to x, \quad y_n \to y$$

则

$$\lim_{m,n\to\infty} \langle x_n, y_m\rangle = \langle x, y\rangle \tag{1.3.8}$$

由证明可知，凡是内积空间都是赋范线性空间，也是距离空间。规定在后续的讨论中，凡是内积空间的范数都是由内积导出的，其中的距离也是由内积导出的范数来规定的。

1.3.3 正交性与正交分解

有了内积的基础，可以将经典的直角坐标、垂直投影等 Euclid 空间的几何概念推广到内积空间，从而定义向量与向量、向量与集合、集合与集合之间的正交性，建立起内积空间的几何学。

定义 1.3.2 设 X 是内积空间，$x, y \in X, M, N \subset X$。

(1) 若 $\langle x, y\rangle = 0$，则称 x, y 正交，记为 $x \perp y$。

(2) 若任意给定 $a \in M$，都有 $x \perp a$，则称 x 与 M 正交，记为 $x \perp M$。

(3) 若任意给定 $x \in M, y \in N$，都有 $x \perp y$，则称 M 与 N 正交，记为 $M \perp N$。

容易理解，零元素 0 是唯一一个与所有向量均正交的向量。