

新课标·小题库系列



总主编 姜启时

初中数学 解法小题库 (几何)

编著 李清生

上海交通大学出版社

巍巍交大 百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn



策 划 / 冯 勤
任雅君
责任编辑 / 王 珏
封面设计 / 朱 懿

新课标·小题库系列

- ★ 初中数学解法小题库（代数）
- ★ 初中数学解法小题库（几何）
- ★ 初中物理解法小题库
- ★ 初中化学解法小题库

- ★ 高中数学解法小题库
- ★ 高中物理解法小题库
- ★ 高中化学解法小题库

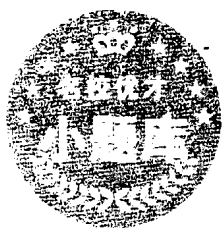
ISBN 978-7-313-05900-0



9 787313 059000 >

定价: 15.00元

新课标·小题库系列



总主编 姜启时

初中数学 解法小题库 (几何)

编著 李清生

上海交通大学出版社

内 容 提 要

《初中数学解法小题库·几何》内容覆盖各不同版本的数学教材,适合全国各地重点中学和普通中学各类学生使用。全书分为几何问题分类解法、辅助线引法、中考热点新题精选、习题解答及提示四个部分。本书注重内容的针对性和实用性,切实从学生思维角度出发,做到题型精选与专项指导相结合,使同学们对初中几何的核心内容有系统的掌握,学会高效科学的应试技巧,具有可读性、启迪性和实用性。

本书适合初中生和初中数学教育工作者使用。

图书在版编目(CIP)数据

初中数学解法小题库. 几何/李清生编著. —上海:上海交通大学出版社,2009

(新课标·小题库系列)

ISBN 978-7-313-05900-0

I. 初… II. 李… III. 几何课—初中—解题
IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 123809 号

初中数学解法小题库·几何

李清生 编著

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话: 64071208 出版人: 韩建民

常熟文化印刷有限公司印刷 全国新华书店经销

开本: 880mm×1230mm 1/32 印张: 8 字数: 225 千字

2009 年 7 月第 1 版 2009 年 7 月第 1 次印刷

印数: 1~8030

ISBN 978-7-313-05900-0/G 定价: 15.00 元

版权所有 侵权必究

前 言

《中学数理解法小题库》是适应全国中、高考命题形式多样化改革需要的初、高中各年级同步学习的配套用书,配合各省、市教材版本,覆盖初、高中各个年级。本套小题库书紧密结合课堂教学改革的国情,根据不同学科教材的特点和课堂改革的需要编写。为了使广大学生培养能力,本书聘请了具有丰富教学经验的知名教师共同编写,通过对试题的深入细致的研究,追寻试题突破方法,培养考生理性的逻辑思维方式,掌握应试方法和答题技巧,有效地指导考生备考复习。

本书注重内容的针对性和实用性,切实从学生思维角度出发,做到题型精选与专项指导相结合,使同学们对各科目核心内容有系统的掌握,学会高效科学的应试技巧,具有可读性、启迪性和实用性。

全书共分为两大板块:

分类解法与习题部分:每一专题中,精选近年各地中考试题中的新题,分类编排,为切实满足优等生拓宽拔高的特殊需要,配备了一定量的题意新颖、内容丰富、贴近学生实际的训练题,为尖子生冲刺高考架设桥梁。

答案与解析:对新题进行详解精析,指点迷津,使学生打开思路,找到突破难题的切入口,使同学们融会贯通,有效提升解题能力。

这套丛书有如下特点:

一、全面丰富实用。以国家教育部颁布的《新课程大纲》为依据,本书信息量大,内容丰富,对教材中的重点、难点、疑点进行全方位扫描。精选题目,对每一个知识点、易错点、疑似点进行了剖析,题题揭示规律。

二、创设互动情境。本书体现了新课程改革的新思路,选题独特新颖,引导学生不断创设问题情境,激励学生注重参与解题探究过程。书中原创大量新颖的、与生产生活实际相结合的探究性问题,培养学



生在探究过程中运用所学知识解决实际问题的能力。

三、分析解读透彻. 本书吸收了名师的教法和优秀学生的学法, 充分了解各年级学生的认知水平和知识储备, 透彻研究了习题难度, 对重点、难点、疑点突破方法有深入研究, 对各种题型及其同类变式的解题方法、技巧、规律、误区研究透彻. 本书有资深一线教师的精辟分析, 指导学生应试的技巧, 使同学们方便有效地进行自测, 答案中对难度较大的试题均有提示点拨, 便于同学们核对.

四、适用对象全面.《初中数学解法小题库》(几何)内容覆盖各不同版本的数学教材, 适合全国各地重点中学和普通中学各类学生使用. 本书编写按思维规律循序渐进, 对考生进行科学的指导, 有效培养学生思维的科学性、敏捷性和发散性.

五、承蒙杨玉朋、徐文平、王亚萍、林静、孟令川、王洪友、刘永胜诸位老师大力协助、提供材料、参与编写, 使本书顺利完成, 在此, 谨向各位致诚至谢意.

本书在策划、编写、审核过程中, 得到了上海师范大学、中国科协教育专家委员会有关专家的支持和指导, 在此一并致谢. 我们真诚地希望本书能成为同学们的良师益友, 更希望本书能够伴随着你一起成长!

编 者





目 录



第一部分 几何问题分类解法	1
第一节 两线段相等	1
第二节 两角相等	18
第三节 两线段不等问题	28
第四节 两角不等	37
第五节 两直线互相垂直	42
第六节 两直线平行	49
第七节 两线段的和、差、倍、分	55
第八节 两角的和、差、倍、分	64
第九节 三点共线	70
第十节 四点共圆	77
第十一节 四边形有内切圆	83
第十二节 两圆相等	85
第十三节 直线与圆相切	87
第十四节 平行线和比例线段	91
第十五节 三角形有关量的求法	102
第十六节 面积和面积证法	107
第十七节 正多边形和圆	114
第十八节 定值	118
第十九节 极值	125
第二十节 间接证法	136
第二十一节 尺规作图	140



第二十二节 探索性问题	148
第二部分 辅助线引法	172
第二十三节 基本图形和相关辅助线	174
第二十四节 几何旋转变换	198
第二十五节 平移等积变换	203
第二十六节 辅助线引法歌	205
第三部分 中考热点新题精选	207
第二十七节 精选考题	207
习题解答及提示	215



第一部分 几何问题分类解法

第一节 两线段相等

常用定理、方法:

1. 在同一三角形中,等角对等边.
2. 角平分线上的点到两边距离相等.
3. 线段垂直平分线上的点到线段两端点距离相等.
4. 全等三角形的对应边及所有对应线段相等.
5. 平行四边形对边相等,对角线互相平分.
6. 在同圆(或等圆)中,相等的圆心角、圆周角、相等的弧所对的弦,以及弦所对的弦心距相等.
7. 轴对称图形对应点连线被对称轴垂直平分.
8. 中心对称图形对应点连线被对称中心平分.
9. 若 $a = b$ 、 $b = c$, 则 $a = c$.
10. 平行线等分线段定理.

例1 已知: BC 是等腰直角 $\triangle ABC$ 的斜边, 在 BC 边上取 D , 使 $DC = \frac{1}{3}BC$, 作 $BE \perp AD$ 交 AC 于 E , 如图 1-1 所示.

求证: $AE = EC$.

证明: 过点 C 作 AB 的平行线交 AD 延长线于 F .

$\therefore \angle ACF = \angle CAB = 90^\circ$, $CF : BA = CD : DB = 1 : 2$,

$\therefore CF = \frac{1}{2}BA$,

$\because AD \perp BE$, $\therefore \angle ABE = \angle CAF$, $\angle AEB = \angle CFA$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CAF$, $\therefore CF = AE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AC = EC$.

方法: 利用辅助线补出相似形及全等三角形二个基本图形.

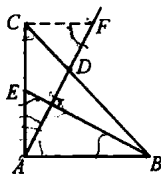


图 1-1



例2 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AD \perp BC$ 于 D , $\angle C$ 的平分线交 AB 于 E , AD 于 F , $EM \perp BC$ 于 M , 如图1-2所示.

求证: $AE = FM$.

证明一: $\because \angle ACE = \angle MCE$,

$EA \perp AC$, $EM \perp BC$,

$\therefore EA = EM$.

又 $\because \angle EAC = \angle FDC$,

$\therefore \angle AEC = \angle DFC = \angle AFE$,

$\therefore AF = AE = EM$.

$\because EM \perp BC$,

$\therefore EM \parallel AF$,

$\therefore$ 四边形 $AEMF$ 是平行四边形.

$\therefore AE = MF$.

证明二: 易证 $\triangle EAC \cong \triangle EMC$,

$\therefore AC = MC$,

$\therefore \triangle AFC \cong \triangle MFC$,

$\therefore MF = AF = AE$.

例3 已知 $\triangle ABC$ 中, AD 为高. 分别以 AB 、 AC 为边向形外作正方形 $ABEF$ 、 $ACGH$. DA 延长线交 FH 于 M , 如图1-3所示.

求证: $FM = MH$.

证明一: 过点 F 作 $FQ \parallel AH$ 交 DA 延长线于 Q ,

$\therefore \angle QFA + \angle FAH = 180^\circ$.

又 $\because \angle BAC + \angle FAH = 180^\circ$,

$\therefore \angle QFA = \angle CAB$.

$\because \angle ABD + \angle BAD = 90^\circ$,

$\angle FAQ + \angle BAD = 90^\circ$,

$\therefore \angle FAQ = \angle ABD$.

$\therefore \triangle FAQ \cong \triangle ABC$ (ASA),

$\therefore FQ = AC = AH$,

$\therefore$ 四边形 $AHQF$ 为平行四边形.

$\therefore FM = MH$.

方法: 用辅助线补出平行四边形, 对角线互相平分.

证明二: 过点 F 、 H 分别作 DA 的垂线, 垂足为 X 、 Y .

易证 $\triangle AHY \cong \triangle CAD$, $\triangle FAX \cong \triangle ABD$.

$\therefore FX = HY = AD$.

$\therefore \triangle FXM \cong \triangle HYM$

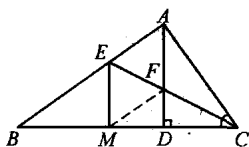


图 1-2

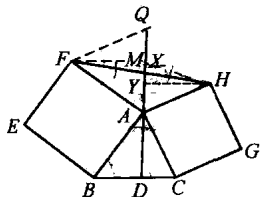


图 1-3



$\therefore FM = MH$.

方法:构造全等三角形.

例4 已知 $\square ABCD$ 对角线 AC 、 BD 交于点 O ,过 O 的直线 MN 交 AD 、 BC 于 E 、 F ,如图1-4所示.

求证: $OE = OF$.

证明一: $\because \square ABCD$ 是中心对称图形.

直线 MN 过对称中心 O .

$\therefore$ 交点 E 、 F 为对称点,

$\therefore OE = OF$.

方法:利用中心对称图形性质.

证明二:易证 $\triangle AOE \cong \triangle COF$ 得 $OE = OF$.

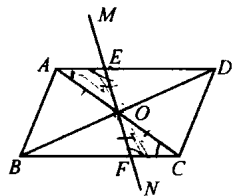


图1-4

例5 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C - \angle B = 90^\circ$, $\angle A$ 的内外角平分线交 BC 于 D 、 E ,图1-5(a)所示.

求证: $AD = AE$.

证明一: $\because AD$ 、 AE 是 $\angle A$ 的内外角平分线.

$\therefore AD \perp AE$, $\angle DAE = 90^\circ$,

$$\angle ADC = \angle B + \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$$

$$= \frac{1}{2}\angle B + 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2}(\angle C - \angle B) = 45^\circ,$$

$\therefore AD = AE$.

证明二:在 AB 上截 $AC' = AC$,如图1-5(b)所示.

则 $\triangle ADC \cong \triangle ADC'$ (SAS),

$\therefore \angle ACD = \angle AC'D$,

$\angle AC'D = \angle B + \angle C'DB$,

$\angle ACD = \angle B + 90^\circ$,

$\therefore \angle C'DB = 90^\circ$,

$\angle ADC = 45^\circ$,

$\therefore AD = AE$.

方法:构造全等三角形.

例6 已知 $\odot O$ 内半径 $OA \perp OB$, P 为 OA 上一点, BP 交 $\odot O$ 于点 D ,过点 D 引 $\odot O$ 切线交 OA 延长线于 C ,如图1-6(a)所示.

求证: $PC = CD$.

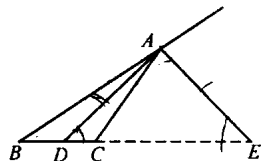


图1-5(a)

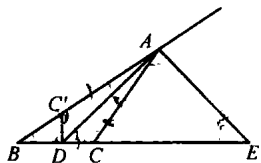


图1-5(b)

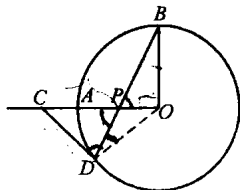


图1-6(a)





证明一:连结 OD ,

$$\therefore OD \perp CD, OD = OB,$$

$$\angle ODC = 90^\circ, \angle B = \angle ODB,$$

$$\angle B + \angle OPB = 90^\circ,$$

$$\angle PDC + \angle ODB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OPB = \angle PDC = \angle CPD,$$

$$\therefore PC = CD.$$

方法:连半径,利用切线性质.

证明二:延长 CO 交 $\odot O$ 于 E , 如图 1-6(b) 所示.

$$\therefore \angle CDB = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{AD}) \text{ 的度数.}$$

$$\angle BPO = \frac{1}{2}(\widehat{BE} + \widehat{AD}) \text{ 的度数.}$$

$$\therefore \widehat{AB} = \widehat{BE},$$

$$\therefore \angle CDB = \angle BPO = \angle CPD.$$

$$\therefore PC = CD.$$

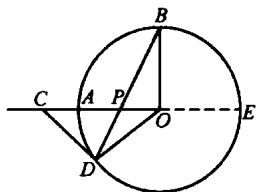


图 1-6(b)

例 7 I 为 $\triangle ABC$ 的内心, AI 的延长线与 $\odot ABC$ 交于 D , 如图 1-7 所示.

求证: $DI = DB = DC$.

证明: $\because I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心.

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD, \angle ACI = \angle BCI,$$

$$\therefore \widehat{BD} = \widehat{DC},$$

$$\therefore BD = DC,$$

$$\therefore \angle DIC = \frac{1}{2}(\angle A + \angle ACB),$$

$$\angle ICD = \angle BCD + \frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\angle BCD = \angle BAD = \frac{1}{2}\angle A,$$

$$\therefore \angle ICD = \angle CID,$$

$$\therefore DI = DC = DB.$$

方法:利用角平分线性质.

例 8 已知, AB 为 $\odot O$ 的弦, 过 A, O 两点任作一圆交 AB 于 C , 交 $\odot O$ 于 D , 如图 1-8(a) 所示.

求证: $BC = CD$.

证明一:连 OB, OD, DB .

$$\therefore \angle OBD = \angle ODB,$$

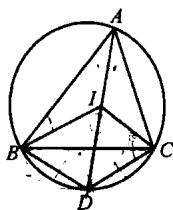


图 1-7

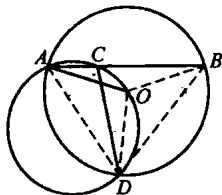


图 1-8(a)



$$\angle QAB = \angle OBA = \angle ODC,$$

$$\therefore \angle OBA + \angle OBD = \angle QAB + \angle ODB = \angle ODC + \angle ODB.$$

$$\text{即 } \angle CBD = \angle CDB.$$

$$\therefore BC = CD.$$

证明二: 连 OD 、 DB .

$$\because \angle ACD = \angle B + \angle CDB,$$

$$\angle ACD = \angle AOD = 2\angle B,$$

$$\text{即 } \angle B + \angle CDB = 2\angle B,$$

$$\therefore \angle CDB = \angle B,$$

$$\therefore BC = CD.$$

证明三: 连 OB 、 OC 、 OD 、 AD , 如图 1-8(b) 所示.

$$\angle OBA = \angle QAB = \angle ODC.$$

$$\angle BCO = \angle ODA,$$

$$\because OD = OA,$$

$$\therefore \angle ODA = \angle OAD = \angle OCD,$$

$$\therefore \angle BCO = \angle DCO.$$

$$\therefore \triangle BCO \cong \triangle DCO (\text{AAS}).$$

$$\therefore BC = CD.$$

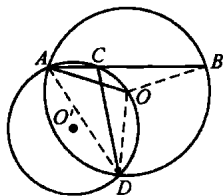


图 1-8(b)

例 9 已知, $\odot O$ 与 $\odot O'$ 外切于点 D , A 、 C 为公切线, 切点为 A 、 C . AB 是 $\odot O$ 直径, BE 切 $\odot O'$ 于点 E , 如图 1-9 所示.

求证: $BE = AB$.

证明: 连 BD 、 CD , 过点 D 作内公切线, 交 AC 于 F , 则 $FC = FD = FA$.

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ, \text{ 又 } \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore B、D、C \text{ 三点共线.}$$

$$\because AB \perp AC,$$

$$\therefore AB^2 = BD \cdot BC,$$

$$- \quad BE^2 = BD \cdot BC.$$

$$\therefore AB = BE.$$

方法: 证明 B 、 D 、 C 三点共线, 从而构造切割线及射影定理两个基本图形.

例 10 如图 1-10 所示, 以 $\odot O$ 半径 OA 为直径作 $\odot O'$, $\odot O$ 半径 OC , OD 交 $\odot O'$ 于 EF , $CH \perp OD$, 垂足为 H . 求证: $EF = CH$, 如图 1-10.

证明: 以 OC 为直径作 $\odot OCH$, 则 H 在圆上,

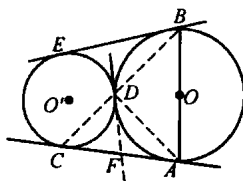


图 1-9

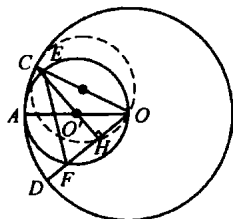


图 1-10





$$\because OC = OD,$$

$\therefore \odot O'$ 与 $\odot OCH$ 为等圆,

$$\therefore EF = CH.$$

方法:等圆中相等的圆周角所对弦相等.

例 11 以正方形 $ABCD$ 顶点 D 为圆心,边长为半径作 $\widehat{AC}$,以 AD 为直径作半圆. P 为 $\widehat{AC}$ 上任一点, PD 交半圆于 N , $PM \perp AB$, 如图 1-11 所示.

求证: $PM = PN$.

证明:连 PA 、 NA ,

$$\because AD \text{ 为半圆直径}, \therefore \angle PNA = \angle DNA = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because DA = DP,$$

$$\therefore \angle PAN = \frac{1}{2} \angle PDA,$$

$$\because DA \text{ 为 } \odot D \text{ 半径}, BA \perp AD,$$

$$\therefore BA \text{ 与 } \odot D \text{ 切于点 } A,$$

$$\therefore \angle MAP = \frac{1}{2} \angle PDA = \angle NAP,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle PMA \cong \text{Rt}\triangle PNA,$$

$$\therefore PM = PN.$$

方法:构造全等形.

例 12 已知 $\odot O$ 、 $\odot P$ 外切于 A ,外公切线 BC 切 $\odot O$ 、 $\odot P$ 于 B 、 C . BC 、 OP 交于点 Q ,过 Q 引 $MN \perp BC$ 交 BA 、 AC 于 S 、 R ,如图 1-12(a). 求证: $QS = QR$.

证明一:连 OB 、 PC ,

$\because BC$ 为 $\odot O$ 、 $\odot P$ 的公切线,

$$\therefore OB \perp BC, PC \perp BC, \text{又 } MN \perp BC,$$

$$\therefore OB \parallel PC \parallel MN,$$

$$\therefore QR : QA = PC : PA = 1,$$

$$QS : QA = OB : OA = 1,$$

$$\therefore QR = QS = QA.$$

证明二:连 CS ,过点 A 作两圆内公切线,交 BC 于 D ,则 $DB = DA = DC$, 图 1-12(b) 所示,

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ = \angle CAS,$$

$$\text{又} \because \angle CQS = 90^\circ,$$

$\therefore C$ 、 A 、 S 、 Q 四点共圆,

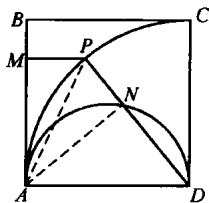


图 1-11

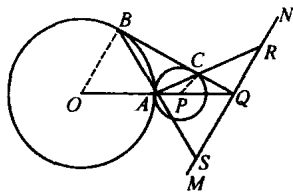


图 1-12(a)

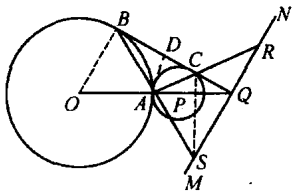


图 1-12(b)



$\therefore \angle CAQ = \angle CSQ,$
 $\therefore PC \parallel MN,$
 $\therefore \angle ACP = \angle ARS,$
 $\angle ACP = \angle CAP,$
 $\therefore \angle CAP = \angle CRS = \angle CSR,$
 $\therefore CQ \perp RS,$
 $\therefore RQ = QS.$

方法:综合切线、平行线、等腰、辅助圆等知识.

例 13 已知 BC 为半圆直径, 点 A 为 $\widehat{BG}$ 中点.
 $AD \perp BC$ 于 D , BG 交 AD , AC 于 E , F , 如图 1-13 (a) 所示.

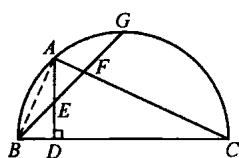


图 1-13(a)

求证: $AE = BE = EF$.

证明一: 连 AB ,

$\because BC$ 为直径, $\therefore \angle BAC = 90^\circ$,

又 $AD \perp BC$,

$\therefore \angle BAD = \angle C, \angle ABC = \angle CAD = \frac{1}{2} \widehat{AGC}$ 的度数,

$\therefore \widehat{AB} = \widehat{AG},$

$\therefore \angle ABG = \angle C,$

$\therefore \angle ABG = \angle BAD,$

$\therefore AE = BE,$

$\angle AFB = \frac{1}{2} (\widehat{AB} + \widehat{GC})$ 的度数 $= \frac{1}{2} \widehat{AGC}$ 的度数,

$\therefore \angle CAD = \angle AFE,$

$\therefore EF = AE = BE.$

证明二: 补半圆, 延长 AD 交圆于 H , 如图 1-13 (b) 所示,

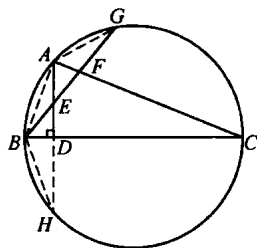


图 1-13(b)

$\because BC$ 为直径, $AD \perp BC$,

$\therefore \widehat{AB} = \widehat{BH} = \widehat{AG}, \widehat{AGC} = \widehat{HC},$

$\therefore \angle ABG = \angle BAH,$

$\therefore AE = BE,$

$\therefore \angle AFB = \frac{1}{2} (\widehat{AB} + \widehat{GC}) = \frac{1}{2} (\widehat{AG} + \widehat{GC}) = \frac{1}{2} \widehat{HC}$ 的度数,

$\therefore \angle AFB = \angle HAC,$

$\therefore AE = EF = BE.$



方法:若遇半圆,补形成全圆可方便利用圆的对称性来解题.

例 14 AB 为半圆直径,圆心为 O . $\odot M$ 切 AB 于 E ,切半圆于 D , PC 为切线, C 为切点, $PC \parallel AB$, 延长 EM 交 PC 于 P , 如图 1-14 所示.

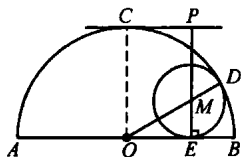


图 1-14

求证: $MP = MO$.

证明:连 OC ,

$\because \odot M$ 切半圆于 D , $\therefore O, M, D$ 三点共线,

$\because \odot M$ 切 AB 于 E , $\therefore ME \perp AB$,

又 $\because PC \parallel AB$, $\therefore PE \perp PC$,

$\because C$ 为切点, $OC \perp PC$,

$\therefore PE = OC = OD$,

又 $\because MD = ME$,

$\therefore PE - ME = OD - MD$,

即 $PM = MO$.

方法:综合利用多条切线,多个切点.

例 15 已知 $\odot O$ 与 $\odot M$ 为等圆, OA 切 $\odot M$ 于点 A , 交 $\odot O$ 于 F , 且 OA 等于它们的直径, 内公切线切两圆于 Q, P , 交 OM 于 E , 如图 1-15 所示.

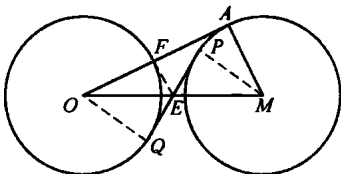


图 1-15

求证: PQ 长等于半径.

证明:连 OQ, EF, MP .

$\because PM \perp PQ, OQ \perp PQ$,

$\therefore OQ \parallel PM$,

$\therefore \triangle OQE \cong \triangle MPE$, $\therefore OE = EM$,

$\because OF = FA$, $\therefore EF \parallel \frac{1}{2}AM$, $\therefore EF \perp OF$,

$\therefore EF$ 切 $\odot O$ 于 F , $\therefore EF = EQ = EP = \frac{1}{2}PQ$,

$\therefore PQ = AM$.

例 16 已知 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 相交于 A, B , 过 A 作两直线交 $\odot O$ 于 D, E , 交 $\odot O'$ 于 C, F , 且使 $\angle DAB = \angle FAB$, 如图 1-16 所示.

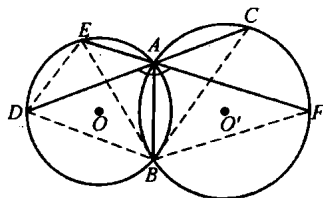


图 1-16

求证: $DC = EF$.

证明:连 BD, BE, BC, BF, DE .

$\because \angle FAB = \angle EDB = \angle DAB = \angle DEB$,

$\therefore DB = EB$,



$$\angle ADB = \angle AEB, \angle AFB = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle DBC \cong \triangle EBF (\text{AAS}),$$

$$\therefore DC = EF.$$

方法: 相交两圆多利用圆周角.

例 17 延长四边形两组对边, AD 、 BC 交于 E , BA 、 CD 交于 F , AC 、 BD 交点为 P , 过 P 引平行于 BC 的直线交 AD 于 G , 交 EF 于 H , 交 DC 于 L , 如图 1-17 所示.

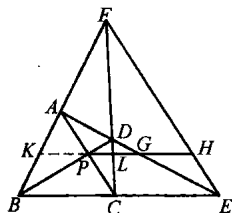


图 1-17

求证: $PG = GH$.

证明: 延长 HP 交 AB 于 K .

$$\because PH \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{KL}{LH} = \frac{BC}{CE} \dots\dots\dots ① \quad \frac{PL}{LG} = \frac{BC}{CE} \dots\dots\dots ②$$

$$\therefore \frac{KL}{LH} = \frac{PL}{LG}, \therefore \frac{KL}{PL} = \frac{LH}{LG}, \therefore \frac{KL - PL}{PL} = \frac{LH - LG}{LG},$$

$$\text{即 } \frac{KP}{PL} = \frac{GH}{LG} \dots\dots\dots ③$$

$$\text{又 } \frac{KP}{PG} = \frac{BC}{CE} \dots\dots\dots ④ \quad \text{由 } ②④ \text{ 得 } \frac{PL}{LG} = \frac{KP}{PG} \Rightarrow \frac{KP}{PL} = \frac{PG}{LG} \dots\dots\dots ⑤$$

由 ③⑤ 得 $GH = PG$.

方法: 联系较少的两线段, 充分利用平行线, 建立多个比例式, 逐步找到两者之间关系.

例 18 AB 为半圆直径, C 为半圆上一点, $CD \perp AB$ 于 D , 切线 AE 、 CE 交于点 E , EB 交 CD 于 F , 如图 1-18(a) 所示.

求证: $CF = FD$.

证明一: 延长 EC 与过点 B 的切线交于 G , 则 $GB \perp AB$.

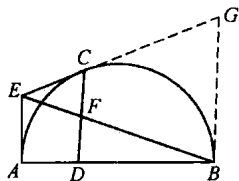


图 1-18(a)

$$\therefore AE \parallel CD \parallel GB, GB = GC, AE = EC,$$

$$\therefore AE : DF = EB : FB \dots\dots\dots ①$$

$$EG : EC = BG : FC,$$

$$\text{即 } EG : AE = CG : FC,$$

$$EG : CG = AE : FC \dots\dots\dots ②$$

$$\because EB : FB = EG : CG \dots\dots\dots ③$$

$$\text{由 } ②③ \text{ 得 } EB : FB = AE : FC \dots\dots\dots ④$$

$$\text{由 } ①④ \text{ 得 } AE : DF = AE : FC,$$

$$\therefore DF = FC.$$