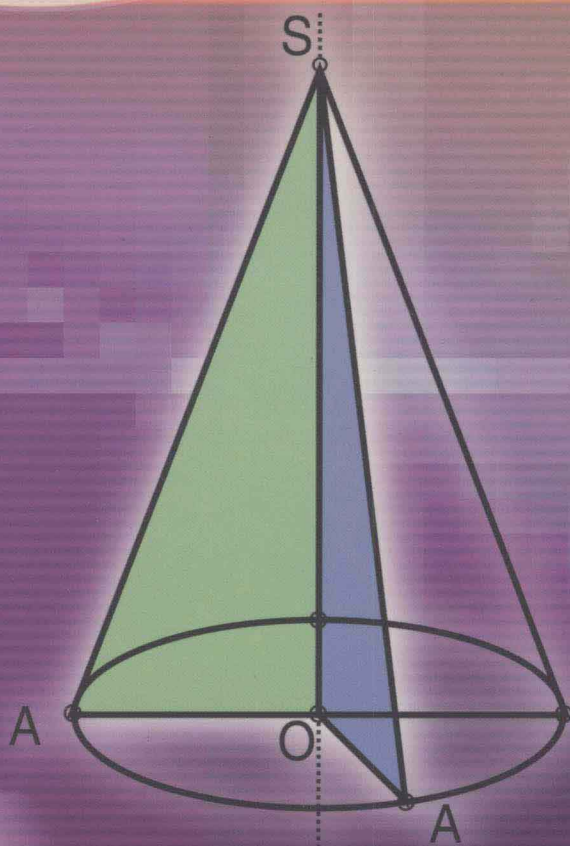


動態數學實驗

《幾何畫板》使用技巧及課件100例

Motion Mathematics Experiment

The Practical Skills for The Geometer's Sketchpad
& 100 Illustrations



澳門勞工子弟學校 編輯

澳門基金會 出版

動態數學實驗

《幾何畫板》使用技巧及課件100例

Motion Mathematics Experiment

The Practical Skills for The Geometer's Sketchpad
& 100 Illustrations

作者：董淑珍

澳門勞工子弟學校 編輯

澳門基金會 出版

二零零一年九月

動態數學實驗

《幾何畫板》使用技巧及課件 100 例

作 者：董淑珍

編 輯：澳門勞工子弟學校

技 術：澳門勞工子弟學校電腦科組

封面設計：吳衛堅

印 刷：澳門新藝印務有限公司

出 版：澳門基金會

書 號：ISBN99937-1-019-9

2001年9月第一版第一次印刷

定 價：澳門幣60元

序 言

資訊科技對教育的推動，是上一世紀後期的豐碩成果之一。其對教育所帶來的成效和促進，以及對教育的改革和發展，將是十分深遠的。無庸置疑，資訊科技的日新月異和知識經濟的高速發展，必然對教育提出更高的要求，也對人才的質和量提出更高的要求。

教育如果只是同步適應社會的發展，那將顯示教育、特別在人才培養方面的“滯後”。因此，教育必須超前社會的發展，那怕超前半步，也是必須的。這就是我們通常所說的要有超前意識來培養高素質的人才。

回顧近二十年來，不論在教學手段或者教育目標上，我們在基礎教育方面經歷過電化教育，包括視聽教學的階段和電腦教學的階段。今天我們進入資訊教育的階段，隨著學校網絡的建立，校園電子化的實現，各科教學平台的築建，使教與學進入一個嶄新的階段。各類信息大量湧入學校，各類教學課件的開發，使教師和學生在知識大道上，更加努力地奔馳。

澳門勞工子弟學校於一九八一年二月率先開設電腦課程，自編一套電腦課本，建立第一個電腦室。一九九七年率先建立澳門第一個多媒體控制中心，全面推行以電腦為主體的輔助教學系統，並於一九九九年實現學校校園網絡化和電子化，把資訊科技教育推向一嶄新的階段。

《動態數學實驗》是董淑珍老師利用『幾何畫板』平台，在制作一百多個數學課件中選出一百個課件，主要是對平面幾何、立體幾何、解析幾何及代數中的圖形、軌跡、函數圖象等，用實驗的形式表現出來，隨著參數的不同而變化，達到動態的效果。這不單把抽象的數學概念形象化，更可舉一反三，靈活地求解或證明。

無疑，如何利用『幾何畫板』輔助數學教學和學習，《動態數學實驗》給你一個經驗。掌握這個經驗，不論是教師在教學中利用作為輔助數學教學的手段，還是學生在學習數學中用來幫助理解，都是很有用的教學參考書，是一個好幫手。

數學，一直以來被認為是抽象的、邏輯推理性的，因而產生一些難以理解和難以觀察的困難。本書力求通過課件的形式使教與學變得生動活潑，趣味橫生。為了使抽象變為實驗，本書作者把積累的經驗編成“妙用『幾何畫板』的十一個技巧”，作為本書的第一部份。如果掌握好技巧，那麼，第二部份的一百個實例課件，將可隨意擴展，這也是本書的一個特征。

從資源共享的角度，本書也僅是起著拋磚引玉的作用，在數學學科範圍內用動態實驗的構思，也可說一種創新，其目的也在於引起更多的研究和開發。無可避免，由於能力的限制，加上時間的關係，肯定存在不少的缺點和遺漏，請教育工作者及使用本書的朋友，給予批評和指正。

本人相信，也是本人的期望，將有更多更好的教學軟件開發出來。

澳門勞工子弟學校校長



2001年9月

目 錄

第一部分 『幾何畫板』的使用技巧

技巧一	如何作出已知線段的三倍長點、四倍長點等	1
技巧二	『幾何畫板』中標記向量妙用	2
技巧三	『幾何畫板』中標記角妙用	3
技巧四	製作移動時半徑不變的圓的方法	7
技巧五	如何解決『幾何畫板』中角的度數範圍只有 $0^\circ\sim 180^\circ$ 的問題	9
技巧六	如何利用已知的函數方程作圖形或軌跡	
一、	用直角坐標方程表示的圖形和軌跡的作法	11
二、	用參數方程表示的圖形和軌跡的作法	14
三、	用極坐標方程表示的圖形和軌跡的作法	16
技巧七	如何編輯『幾何畫板』中自動給出的標籤及度量值	
一、	編輯簡單的標籤和度量值	18
二、	編輯複雜的度量值	19
技巧八	如何用幾何方法作圖形或軌跡	23
技巧九	如何能作出逐漸延伸中(或縮短中)的直線和圓弧	28
技巧十	用『幾何畫板』中的“插入對象”功能得到各種圖的動態效果	30
技巧十一	如何利用『幾何畫板』中的記錄工具	33

第二部分 用『幾何畫板』制作的課件

課件一	三棱錐	37
課件二	正四棱錐	38
課件三	六棱錐	38
課件四	直三棱柱	39
課件五	正四面體展開圖	39
課件六	正六面體展開圖	40
課件七	直棱柱側面展開圖	41
課件八	斜三棱柱	42
課件九	平行六面體	43
課件十	長方體	44
課件十一	立方體	45
課件十二	正三棱臺	46
課件十三	正四棱臺	47
課件十四	圓柱	48
課件十五	圓錐	49
課件十六	圓臺	50

課件十七	應用祖暅原理求棱柱、圓柱體積的圖形演示	51
課件十八	應用祖暅原理求半球體積的圖形演示	52
課件十九	指數函數圖象	53
課件二十	對數函數圖象	54
課件二十一	冪函數圖象	55
課件二十二	函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖象	57
課件二十三	用單位圓中的正弦線、余弦線作正弦函數、余弦函數的圖象	59
課件二十四	正弦函數 $y=\sin x$ 在區間 $[-2\pi, 4\pi]$ 上的圖像(三個週期)	61
課件二十五	余弦函數 $y=\cos x$ 在區間 $[-2\pi, 4\pi]$ 上的圖像(三個週期)	62
課件二十六	正弦函數 $y=\sin x$ ($-\infty < x < +\infty$)	63
課件二十七	簡諧振動函數的圖像	64
課件二十八	四邊形	66
課件二十九	平行四邊形	68
課件三十	平行四邊形的中心對稱性	69
課件三十一	矩形的中心對稱性	71
課件三十二	平行四邊形的對角線不是對稱軸	72
課件三十三	矩形的中心對稱性	73
課件三十四	正方形的軸對稱性	75
課件三十五	菱形的軸對稱性	77
課件三十六	梅涅勞斯定理	79
課件三十七	圓內接四邊形性質(托勒密定理)	80
課件三十八	設不等腰 ΔABC 的內切圓在三邊 BC, CA, AB 上的切點分別為 D, E, F , 則 EF 與 BC, FD 與 CA, DE 與 AB 的交點 X, Y, Z 在一條直線上。	81
課件三十九	在 ΔABC 的邊上 BC, CA, AB 分別取點 A_1, B_1, C_1 使 AA_1, BB_1, CC_1 相交 於一點, 證明 AA_1, BB_1, CC_1 關於相應的角平分線對稱的直線 $AA_2, BB_2,$ CC_2 也相交於一點。	82
課件四十	西姆松線定理	83
課件四十一	蝴蝶定理	84
課件四十二	扇形的弧長與面積	85
課件四十三	圓周角與圓心角	87
課件四十四	三角形的四心	88
課件四十五	向量加減法運算	89
課件四十六	向量結合律	90
課件四十七	螺旋線	92
課件四十八	正中平行線	92
課件四十九	正弦線與余弦線	94
課件五十	正切線與余切線	95
課件五十一	求任意數的平方根	96

課件五十二	鐘擺運動 -----	97
課件五十三	圓周運動-----	98
課件五十四	圓的內外擺線-----	99
課件五十五	圓的漸開線(幾何作法) -----	100
課件五十六	心臟線 -----	101
課件五十七	雙紐線-----	102
課件五十八	橢圓(1)與雙曲線-----	103
課件五十九	橢圓(2) -----	105
課件六十	圓的漸開線(代數作法)-----	107
課件六十一	拋物線-----	108
課件六十二	點 M 到點 A(4, 0)和 B(-4, 0)的距離的和為 12, 求點 M 的軌跡。-----	110
課件六十三	求與兩個定點 O(0, 0)、A(3, 0)的距離的比為 1/2 的點 M 的軌跡。-----	111
課件六十四	等腰三角的頂點是 A(4, 2), 底邊一個端點是 B(3, 5), 求另一個端點的軌跡。-----	112
課件六十五	一條線段 AB(AB =2a)的兩個端點 A 和 B 分別在 x 軸和 y 軸上滑動, 求線段 AB 的中點 M 的軌跡。-----	113
課件六十六	已知點 M 到 x 軸、y 軸的距離的乘積等於 1, 求點 M 的軌跡。-----	114
課件六十七	已知△ABC 的一邊 BC 長為 6, 周長為 16, 求頂點 A 的軌跡。-----	115
課件六十八	點 M 與一定點 F(2, 0)的距離和它到一定直線 x=8 的距離的比是 1:2, 求點 P 的軌跡。-----	116
課件六十九	已知△ABC 的一邊的兩頂點是 B(0, 6)和 C(0, -6), 另兩邊的斜率的乘是-4/9, 求頂點 A 的軌跡。-----	117
課件七十	已知點 M 與橢圓 $\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1$ 的左焦點和右焦點的距離的比為 2:3, 求點 M 的軌跡。-----	118
課件七十一	求與定點 A(5, 0)及定直線 $l: x=16/5$ 的距離比是 5:4 的點的軌跡。-----	119
課件七十二	已知△ABC 一邊的兩個端點是 B(0, 6)和 C(0, -6), 另兩邊斜率的積是 4/9, 求頂點 A 的軌跡。-----	120
課件七十三	點 M 與點 F(4, 0)的距離比它到直線 x+5=0 的距離小 1, 求點 M 的軌跡-----	121
課件七十四	點 M 與已知點 P(2, 2)連線的斜率是它與點 Q(-2, 0)連線的斜率的 2 倍, 求點 M 的軌跡。-----	122
課件七十五	從一個定點 $M_1(a, b)$ 到圓 $x^2+y^2=r^2$ 上任意一點 Q 作線段, M 點內分 M_1Q 成 2:1, 求點 M 的軌跡。-----	123
課件七十六	△ABC 的頂點 B、C 的坐標分別是(0, 0)、(a, 0), AB 邊上的中線長為 m, 求點 A 的軌跡。-----	124
課件七十七	由圓 $x^2+y^2=4$ 上任意一點, 向 x 軸作垂線.求垂線夾在圓周和 x 軸間的線段中點的軌跡。-----	125
課件七十八	從拋物線 $y^2=2px$ 上各點, 作 x 軸的垂線段, 求線段中點的軌跡。-----	126

課件七十九	求拋物線 $y^2=2px$ 上各點與焦點連線中點的軌-----	127
課件八十	等速螺線 $\rho=a\theta$ ($a>0$)的圖形-----	128
課件八十一	求與已知圓 $(x-2)^2+y^2=4$ 和 y 軸都相切的圓的圓心 M 的軌跡。-----	129
課件八十二	彈道曲線彈道曲線的參數方程為 $\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha \\ y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$ (t 為參數) -----	130
課件八十三	橢圓、拋物線、雙曲線的統一方程-----	132
課件八十四	從極點作圓 $\rho=2a \cdot \cos \theta$ 的弦，求各個弦的中點的軌跡。-----	134
課件八十五	從極點 O 作直線和直線 $\rho \cos \theta=4$ 相交於點 M ，在 OM 上取一點 P ，使 $OM \cdot OP=12$ ，求 P 點的軌跡。-----	135
課件八十六	長為 $2a$ 的線段，其端點在兩個直角坐標軸上滑動，從原點作這條線段的垂線，垂足為 M ，求點 M 的軌跡。-----	136
課件八十七	動點 M 作等速直線運動，它在 x 軸和 y 軸方向的分速度分別為 9 和 12 ，運動開始時，點 M 位於 $A(1, 1)$ ，求點 M 的軌跡。-----	137
課件八十八	已知點 $P(2, 0)$ 、 $Q(8, 0)$ 。點 M 到點 P 的距離是它到點 Q 的距離的 $1/5$ ，求點 M 的軌跡。-----	138
課件八十九	直線的參數方程 $\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \end{cases}$ (t 為參數) -----	139
課件九十	圓的參數方程 $\begin{cases} x = x_0 + r \cos \theta \\ y = y_0 + r \sin \theta \end{cases}$ (θ 為參數) -----	141
課件九十一	橢圓的參數方程 $\begin{cases} x = x_0 + a \cos \theta \\ y = y_0 + b \sin \theta \end{cases}$ (θ 為參數) -----	143
課件九十二	拋物線的參數方程 $\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$ (t 為參數， $p>0$) -----	145
課件九十三	雙曲線的參數方程 $\begin{cases} x = a \cdot \operatorname{tg} \theta \\ y = a \cdot \operatorname{ctg} \theta \end{cases}$ (θ 為參數) -----	147
課件九十四	雙曲線的另一參數方程 $\begin{cases} x = \frac{a}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \\ y = \frac{b}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \end{cases}$ (t 為參數) -----	149
課件九十五	極徑與極角成反比($\rho = \frac{a}{\theta}$)的點 $M(\rho, \theta)$ 的軌跡。-----	151

課件九十六	點 $M(x, y)$ 到兩個定點 M_1, M_2 距離的比是一個正數 m ，求點 M 的軌跡-	153
課件九十七	從極點 O 引一條直線和圓 $\rho^2 - 2ap \cos \theta + a^2 - r^2 = 0$ 相交於一點 Q ，點 P 分線段 \overline{OQ} 成比 $m : n$ ，求點 Q 在圓上移動時，點 P 的軌跡。-----	155
課件九十八	定比分點 (一) -----	158
課件九十九	定比分點 (二) -----	159
課件一百	用於有向線段數量公式證明一課的輔助課件-----	161

第一部分 『幾何畫板』的使用技巧

技巧一 如何作出已知線段的三倍長點、四倍長點等。

例1．已知線段的端點 **A** 和 **O**，如何作出三倍長點 **C**、四倍長點 **D** 等。

作法：

1. 選取線段工具，作線段 **AO**，如圖 1-1。
2. 同時選取點 **O** 及線段 **AO** (按住 **Shift** 鍵，再單擊點 **O** 及線段 **AO** 即可)，從作圖菜單中選取垂線命令，得到一條直線 **m**，如圖 1-2。
3. 選取這條直線，從變換菜單中選擇“標記鏡面”命令，如圖 1-3。
4. 選取點 **A**，從變換菜單中選擇“反射”命令，得到點 **B**，如圖 1-4。
5. 隱藏直線 **m**，連接 **OB**，如圖 1-5。
6. 以 **OB** 為已知線段的端點，重複 1~4 步，得三倍長點 **C**，同理可得到四倍長點 **D** 等，如圖 1-6。

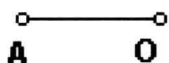


圖 1-1

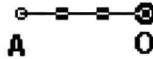


圖 1-2

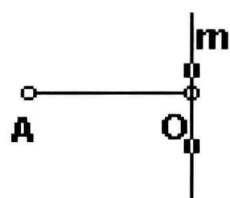
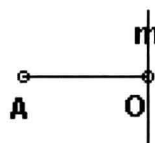


圖 1-3

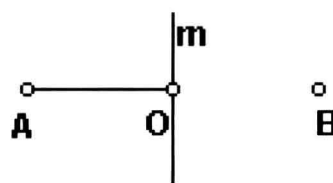


圖 1-4

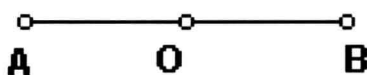


圖 1-5

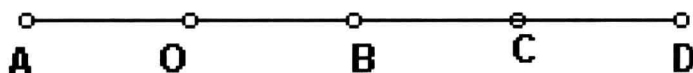


圖 1-6

技巧二 『幾何畫板』中“標記向量”的妙用

例 2 · 求作比為 2 : 3 的兩條線段。

作法：

1. 由例 1 可作出 3 等分的四點：A、O、B、C。
2. 用作點工具作任意一點 E，如圖 2-1。
3. 同時選擇 A、E 兩點(先選 A 點)，從變換菜單中選擇標記向量“ $A \rightarrow E$ ”命令，如圖 2-2。
4. 選擇 B 點，從變換菜單中選擇平移命令，得到平移菜單。從這個菜單中選擇“按標記向量”的選項，並單擊“確定”按鈕，得到點 F(即按標記向量“ $A \rightarrow E$ ”平移 B 點到 F)，如圖 2-3。
5. 用作線段工具作出線段 EF。
6. 再任作一點 P，按上述方法(即按標記的向量 $A \rightarrow E$ ，平移 C 點)可得線段 PQ。(可隱藏線段 AC)。則線段 EF 與線段 PQ 的比為 2 : 3，如圖 2-4。

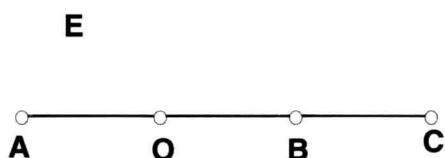


圖 2-1

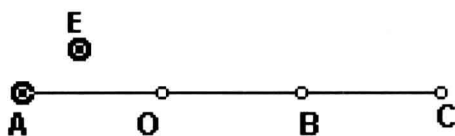


圖 2-2



圖 2-3

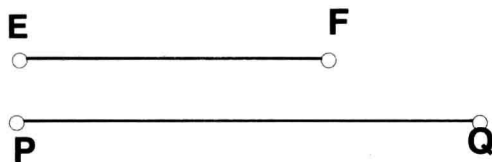


圖 2-4

技巧三 『幾何畫板』中“標記角”的妙用

例3·已知平行四邊形，如何使它旋轉且保持形狀大小不變形。

作法：

1. 首先作出已知平行四邊形 $ABCD$ ，如圖 3-1。
2. 作一個圓 O 。在圓 O 上任取兩點 E 、 F ，按 F 、 O 、 E 順序同時選取這三點，從變換菜單中選擇“標記角”命令，如圖 3-2。
3. 任作一點 O_1 ，並選取這點，從變換菜單中選擇“標記中心 O_1 ”的命令，如圖 3-3。
4. 選取平行四邊形 $ABCD$ ，從變換菜單中選擇旋轉命令，得到旋轉菜單。從這個菜單中選擇“按標記角 $F-O-E$ ”的選項，並單擊“確定”按鈕，如圖 3-4。
5. 同時選取點 E 和圓 O ，從編輯菜單中選擇“操作類按鈕”中的“動畫”按鈕。

當用鼠標雙擊“動畫”按鈕時，平行四邊形 $ABCD$ 就開始繞 O_1 旋轉，如圖 3-5，單擊鼠標動畫停止。

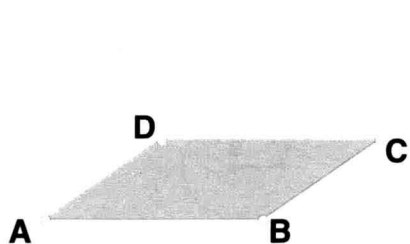


圖 3-1

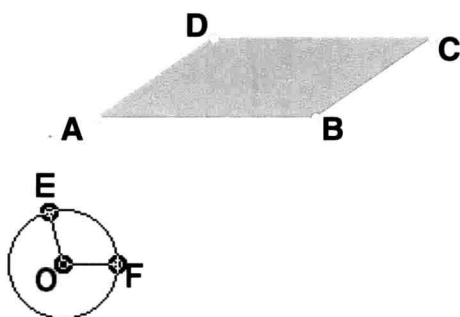


圖 3-2

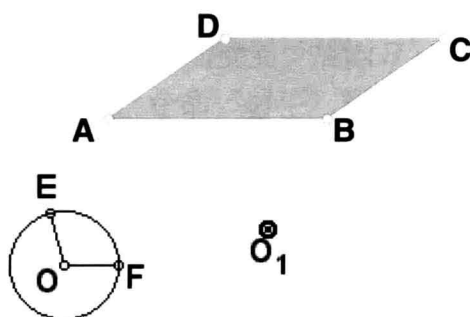


圖 3-3

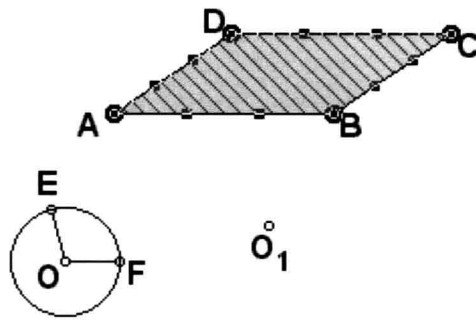


圖 3-4

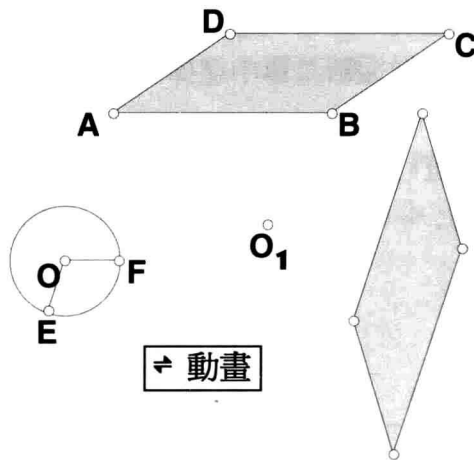


圖 3-5

例 4 · 半徑為 r 的圓在另一個半徑為 R 的圓的內部沿它的圓周滾動，求這個圓上的一點的軌跡(圓的內擺線)。

作法：

1. 用作線段工具作線段 AB (為 R)，並在線段上用作點工具作點 C (AC 為 r)。
2. 再作點 E ，同時選取 A 、 E 兩點，從變換菜單中選擇“標記向量”命令。
3. 選取點 C ，從變換菜單中選擇“平移”命令，出現平移命令對話框，選擇“按標記向量”選項，得到點 F 。
4. 用作線段工具作線段 EF ，同時選取點 E 和線段 EF ，從作圖菜單中選擇“以圓心和半徑作圓”命令，得到圓 E 。
5. 再作點 O ，同時選取點 O 和線段 AB ，從作圖菜單中選擇“以圓心和半徑作圓”命令，得到圓 O 。在圓 O 上任作一點 P ，作線段 OP ，如圖 4-1。
6. 同時選取點 P 和線段 EF ，從作圖菜單中選擇“以圓心和半徑作圓”命令，得

到圓 P。

7. 同時選取線段 OP 和圓 P，從作圖菜單中選擇“交點”命令，得到點 Q。
8. 同時選取點 Q 和線段 EF，從作圖菜單中選擇“以圓心和半徑作圓”命令，得到圓 Q。
9. 在圓 E 上任作一點 T，按 F、E、T 順序同時選取這三點，從變換菜單中選擇“標記角 F-E-T”命令，如圖 4-2。選取點 Q，從變換菜單中選擇“標記中心 Q”命令。
10. 選取點 P，從變換菜單中選擇“旋轉”命令，得到“旋轉”命令對話框，如圖 4-3。單擊“確定”按鈕。得到點 P'，從顯示菜單中選擇“追蹤點”命令，如圖 4-4。
11. 按順序同時選取點 P、圓 O、點 T 和圓 E，從顯示菜單中選擇“動畫”命令，得到“動畫”命令對話框，如圖 4-5、圖 4-6。按自己需要選擇各選項後，單擊“確定”按鈕，得到“動畫”按鈕。
12. 隱藏圓 P，雙擊“動畫”按鈕，得到所求動點 P 的軌跡，如圖 4-7 中的曲線。

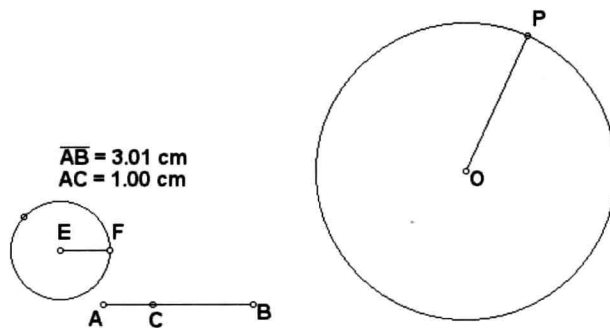


圖 4-1

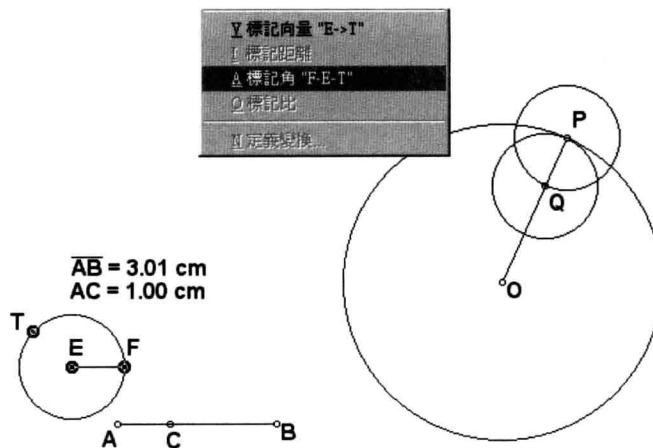


圖 4-2

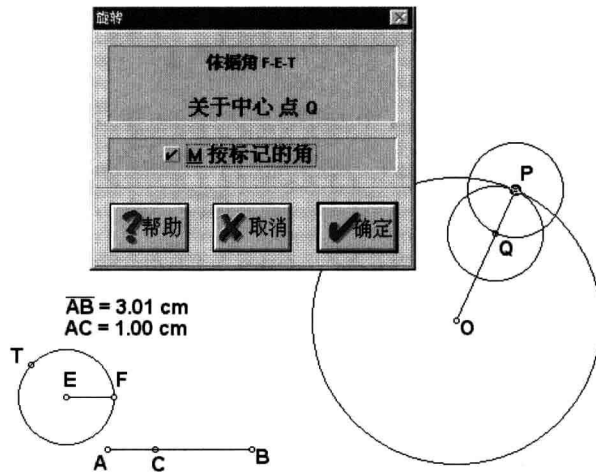


圖 4-3

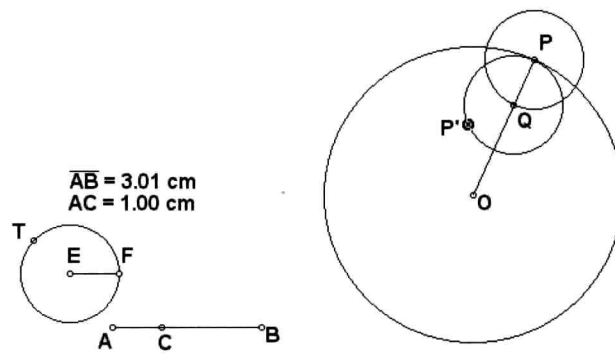


圖 4-4

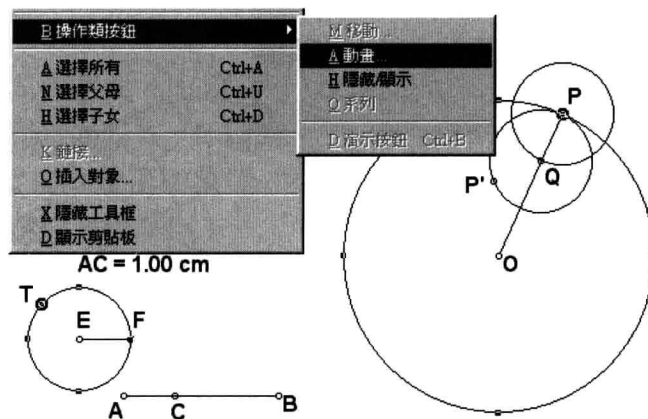


圖 4-5

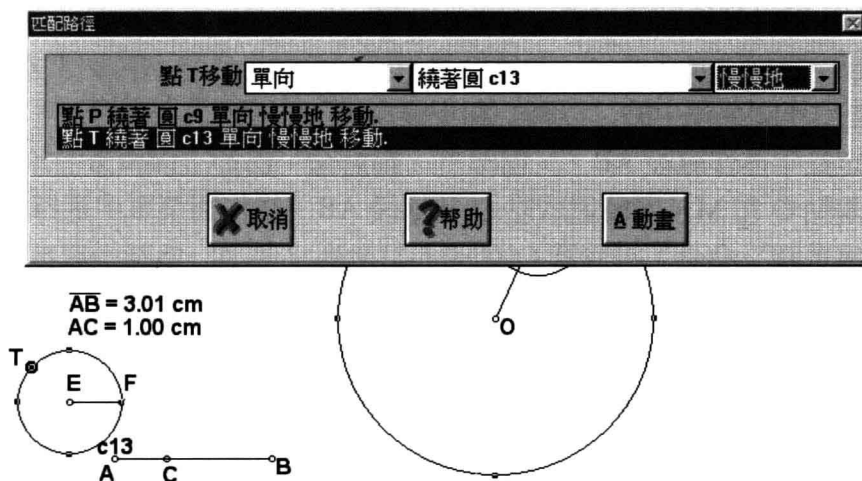


圖 4-6

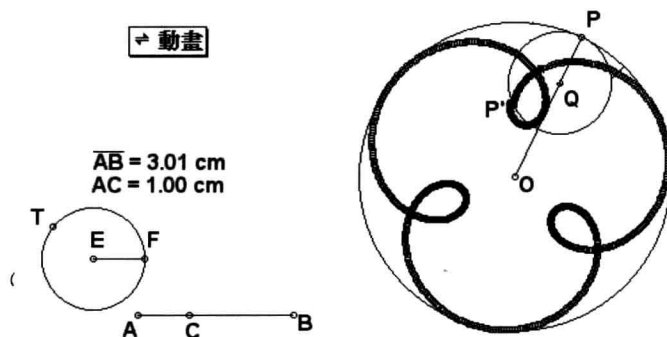


圖 4-7

技巧四 製作移動時半徑不變的圓的方法

一般情況在『幾何畫板』中，用作圓工具作出的圓，當想移動這個圓的位置時，圓的半徑會隨時改變。如圖 5-1 中，圓 M 的半徑是 MN，圓心是 M。把圓心移到 O 點時，圓 M 的半徑就變為 ON 了，如圖 5-2。

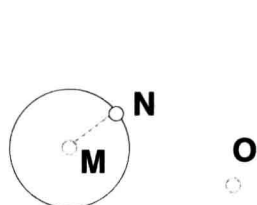


圖 5-1

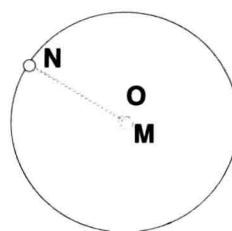


圖 5-2

例 5 · 作移動時半徑不變的圓。

下面兩種作法可得到移動時半徑不變的固定圓。

作法一：使用作圖菜單中的“以圓心和半徑畫圓”命令，作法如下。

1. 按給定長半徑作線段 AB 。
2. 任畫兩點 O 和 M 。同時選取點 O 及線段 AB ，從作圖菜單中選擇“以圓心和半徑畫圓”命令，得到圓 O (如圖 5-3)。
3. 當手動拖動圓 O 到 M 時，圓的半徑保持不變。

還可以從編輯菜單中選擇“操作類按鈕”命令作兩個“平移”按鈕(從 O 到 M ，從 M 到 O)。雙擊“按鈕”圓 O 就可移動，如圖 5-4。

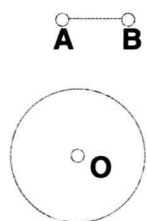


圖 5-3

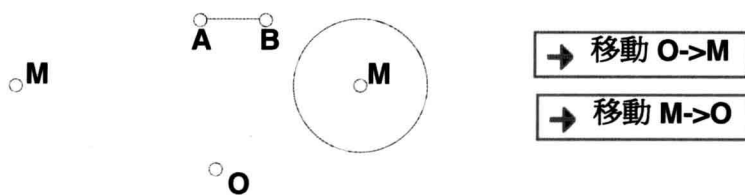


圖 5-4

作法二：

1. 以給定長半徑作線段 AB 。
2. 任畫兩點 O 和 M 。同時選取 A 、 O 兩點，從變換菜單中選擇“標記向量 A 到 O ”命令。
3. 選取點 B ，從變換菜單中選擇“平移”命令，得到點 M 。
4. 用作圓工具，作以 O 為圓心， AB 為半徑的圓。拖動圓心 O ，圓可任意移動，且半徑不變，如圖 5-5。

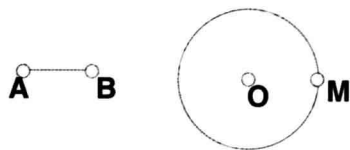


圖 5-5