有效教·学·考丛书

有效教学系列·有效学习系列·有效测试系列

学 有效 考 教

依据

新一轮基础教育课程改革所倡导的"有效教学"理念

教育部最新修订的普通高中"新课程方案"

人民教育出版社根据新方案编写的新教材

北京四中 黄冈中学 上海中学 苏州中学 扬州中学

全国五大名校 联合编写

高一数学

有效学习

促进学习方式的变革

使学习过程最优化和学习效果最大化

学科主编：吕宝兴

本册主编：郑跃星

中国轻工业出版社

有效教·学·考丛书

有效教学系列·有效学习系列·有效测试系列

高一数学有效学习

学科主编　吕宝兴

本册主编　郑跃星

中国轻工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

高一数学有效学习／吕宝兴主编．—北京：中国轻工业出版社，2003.10

（有效教·学、考丛书．有效学习系列）

ISBN 7-5019-4082-7

Ⅰ.高… Ⅱ.吕… Ⅲ.数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 077618 号

策划编辑：王大凯　田晓昕　朱　舒　张凌云
责任编辑：朱　玲　田晓昕　　责任终审：滕炎福　　封面设计：麦景童
版式设计：毛丹斯　　　　　　责任监印：刘智颖

出版发行：中国轻工业出版社（北京东长安街 6 号，邮编：100740）
印　　刷：北京天竺颖华印刷厂
经　　销：各地新华书店
版　　次：2003 年 10 月第 1 版　　2003 年 10 月第 1 次印刷
开　　本：787 × 1092　1/16　　印张：15.25
字　　数：300 千字
书　　号：ISBN 7-5019-4082-7/G·405　　定价：16.80 元
邮购电话：010-65241695
发行电话：010-65128898
网　　址：http://www.chlip.com.cn
E-mail：club@chlip.com.cn

编 写 说 明

新课程倡导“有效教学”的基本理念，强调教学方式和学习方式的转变。《有效教·学·考》丛书，是北京四中、黄冈中学、上海中学、苏州中学、扬州中学5所全国著名重点中学的合作成果。由各校教学经验丰富、教学效果显著的特、高级教师联合编写，力争成为全面贯彻和体现新课程基本要求的新型教参教辅图书。本丛书的主要特色如下：

丛书全面体现了“有效教学”的基本理念

“有效教学”的基本理念认为，教学与学习是否“有效”，最终主要是由学生有无进步或发展来判定的。因此，本丛书无论是教师用书，还是学生用书，在对教师教学方式给予指导的同时，尤其注重激发学生的学习兴趣，引导学生在自主学习、研究性学习的过程中积极思考，主动构建适合自己的学习方式和策略，实现有效学习。

丛书立体涵盖了教学、学习、测试三个维度的内容

丛书共分“有效教学系列”、“有效学习系列”和“有效测试系列”（以下简称“教学”、“学习”和“测试”）。“教学”和“学习”互相配套，互为补充。比如针对理科，“教学”里配有“学习”中测试题的详细解答，以方便师生选择使用。此外，去年出版的《2003年3+X高考有效测试》，已为北京四中、黄冈中学、南京师范大学附中、陕西师范大学附中等全国上百所中学选用，深受读者好评。2004年新版“测试”也即将推出。

丛书系统设置了实用、有效的特色栏目

丛书既系统设置有共性的实用栏目，各学科又根据学科性质增设了个性化的特色栏目。

“教学”中的“有效教学目标”、“有效教学内容结构”等栏目，有利于确保教师对每个教学主题都有系统性的整体认识。“有效教学建议”、“有效教学案例”以及“实践（实验）探究活动”等栏目，尽可能地不同于传统意义上的教案，对教学目标、教学过程、教学方法以及学生活动进行了规律性的提炼和总结。

“学习”中的“知识结构网络”栏目，有利于确保学生对每个学习主题都有系统性的整体认识。“有效学习指导”栏目，在区分重点、难点、考点的同时，侧重于对学习方法的指导与点拨。“典型例题解析”栏目，结合例题，针对学生在解题过程中可能遇到的思维障碍和常见错误，作了诊断性的剖析和指导。

丛书精心编制了不同难易度的测试题

丛书中“学习”的测试题力求新颖，体现了学科教学改革的最新趋势和命题变化规律。根据难易度不同，分为“双基能力题”（A卷）和“名校特色题”（B卷），适合不同基础的学生使用。书后附有参考答案及解题思路提示。

书中难免有不妥或错误之处，恳请读者批评指正，以便再版时修订。

《有效教·学·考》丛书编委会

2003年6月

序　言

《全日制高级中学数学教学大纲》指出：数学知识是“学习和研究现代科学的基础”，数学教学“在培养和提高思维能力方面发挥着特有的作用”，数学“已成为现代文化的重要组成部分”。可见，高中数学是每一个准备进一步深造的学生的必备知识，数学是学习其他科学知识的基础，是人们认识世界和改造世界的基本工具。学习数学，对于优化一个人的思维品质，提高一个人的思维能力起着其他学科无法替代的作用，数学教育本质上是一种素质教育。数学是随着人类文明的发展而发展起来的，它是几千年来人们在生产实践和科学创新过程中高度凝炼的结晶，数学本身就是一种文化。

数学学习应摒弃那种考则学，不考则不学；有用则学，无用则不学的纯粹为考试而学的学习方法。不重视数学的基本概念、基本原理和基本技能的学习和训练，而是热衷于各种技巧和方法，把数学作为方法论来学习是对数学的曲解。追踪热点，猜测考题，临时突击，重点突破，往往事倍功半，也不是学习数学的好方法。数学的知识是互相联系、互相渗透的，它需要持之以恒的艰苦努力，也需要有正确的学习方法。希望本书在提高数学学习的有效性方面能带给你一些有益的启示和帮助。

本书是以人民教育出版社《全日制普通高中教科书》的《数学》教材为蓝本编写的。为了提高数学学习的有效性，本书强调知识的系统性和连贯性，强调基本概念、基本原理对数学知识的统领作用。扎实的基本功和正确的思维是学好数学的两个必要条件，本书同样重视数学学习中所必需的一些基本技能的训练和思考方法的培养。对于每一章的知识与高考的相关性也在本书的考虑范围之内。本书难度适中，基本上与教材进度同步，可以作为使用该教材的学生和教师的同步教学及学习用书，也可以作为使用其他教材师生的参考用书。考虑到当前课程改革的发展趋势，本书的例题和习题中都配备了一定数量的新题型，以注重学习能力、探究能力、应用能力、创新能力等数学实践能力的培养和训练。所以本书具有实用性、新型性和一定的前瞻性。

本书按教材章节顺序编写，每节都包括“知识结构网络”、“有效学习指导”、“典型例题解析”、“有效测试”等四个基本栏目。

“知识结构网络”对这一节的内容进行概括提要，指出各个知识点之间的相互联系和本节学习的重点难点。通过知识梳理，使学生易学易记，对这一节的知识框架、内在联系有一个较好的认识和理解。

“有效学习指导”重在概念辨析、基本技能培养、易错易误点的纠正、新知识的掌握等，这个栏目告诉同学们如何有效地学习这一节内容，哪些是要点？哪些是关键？如何把握重点？如何解决难点？

“典型例题解析”中的例题除了具有典型性和代表性外，还具有一定的综合度和新型性。在这里，学习型、探究型、应用型和创新型等能力型的题目会占有一定比例。我们相信，通过这些例题的讲解，学生对于所学知识的巩固和运用、数学实践能力的培养、数学素养的提高都会有所帮助。

“有效测试”是本书作者为配合这一节内容而精心编拟的复习自测题，约为一节课时的题

量。通过自测，学生可以大致衡量自己对这一节数学知识的掌握程度。

围绕本章的内容，每章后另附了三个栏目：“考点精析”、“拓展资料”和“本章测试”。其中“考点精析”是历年全国各地高考的经典试题或作者自编的富有代表性试题的分析与解答，以使学生了解本章内容与高考的相关性；“本章测试”一般分一、二两卷，每卷约为两课时的题量，试题在重视知识考查的同时也重视能力的考查。“拓展资料”是课外阅读内容，或是与本章内容相关的背景资料、历史沿革，或是最新动态、人物介绍，或是知识拓展等。用以扩充学生的视野，提高学习兴趣。书后附有本书所有测试习题的答案、简单提示或简解。

“有效教 · 学 · 考”丛书之数学学科共三册，具体内容和编写分工如下：

《高一数学有效学习》包括“集合与简易逻辑”、“函数”、“数列”、“三角函数”和“平面向量”五章。本册由郑跃星老师（上海进才中学数学教研主任、特级教师）主编，其中“集合与简易逻辑”、“数列”与“平面向量”三章由郑跃星老师编写，“函数”由李文邗老师编写，“三角函数”由魏明志老师编写。

《高二数学有效学习》包括“不等式”、“直线和圆的方程”、“圆锥曲线方程”、“直线、平面、简单几何体”、“排列、组合和概率”五章。其中“直线、平面、简单几何体”这一章的内容A、B册有较大差异，本书同时兼顾A、B两册读者的需要，对于仅限于B册读者使用的地方都用“*”号做了标记。本册由黄华老师（上海师大附中数学教研组长、高级教师、上海市二期课改中心组成员）主编。其中“不等式”和“排列、组合和概率”两章由黄华老师编写，“直线、平面、简单几何体”由冯唯老师编写，“直线和圆的方程”由曹土清老师编写，“圆锥曲线方程”由高在峰老师编写。

《高三数学有效学习》是根据高中数学第三册（选修Ⅱ）编写的，包括“概率与统计”、“极限”、“导数与微分”、“积分”、“复数”五章，其中“复数”这一章仅限于复数的代数形式。“概率与统计”由邱雁老师编写，“导数与微分”、“积分”由徐岳灿老师编写，“极限”、“复数”由况亦军老师编写。

本书从数学学习的有效性出发进行编写，这是一种新的尝试，所以无论是材料的选取、例题和习题的难易程度、对一些数学问题的表述或是例题的解答，等等，都难免会有不当之处，欢迎不吝赐教。

数学学科主编

2003年6月

目 录

第一章

集合与简易逻辑

第一节　集合

一、知识结构网络

(一) 内容提要

1. 基本概念：集合、元素、有限集、无限集、空集、子集、真子集、全集、补集、交集、并集。

2. 基本方法：表示集合的列举法和描述法，含绝对值的不等式解法，一元二次不等式解法。

3. 基本结论：

(1)元素 a 与集合 A 的关系：

① $a\in A$；或者② $a\notin A$。

(2)集合 A 与集合 B 的关系：

① $A\subsetneqq B$；② $B\subsetneqq A$；③ $A=B$；④ $A\cap B=\varnothing$；⑤ $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap B\subsetneqq A$，$A\cap B\subsetneqq B$。

(3)集合的包含关系：

① $A\subseteq A$；② $\varnothing\subseteq A$；③若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；④若 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$。

(4)交集、并集的运算法则：

① $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$，$A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$；

② $A\cap A=A$，$A\cup A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup\varnothing=A$；

③ $A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$；

④ $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$，$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

⑤ $A\cap B=A\Rightarrow A\subseteq B$，$A\cup B=A\Rightarrow B\subseteq A$。

(5)补集的运算法则：

① $A\cap(\complement_U A)=\varnothing$，$A\cup(\complement_U A)=U$；②$(\complement_U U)=\varnothing$，$(\complement_U\varnothing)=U$；③$\complement_U(\complement_U A)=A$。

(二) 重点难点

与集合有关的概念，相近概念的辨析，集合的表示法，集合的运算，判断集合之间的关系，含绝对值的不等式解法，一元二次不等式解法。

二、有效学习指导

(一) 学法导引

本节内容的特点是概念多、符号多，容易造成概念模糊不清，符号张冠李戴。因此在学习本节时，特别要注意理解概念的内涵和外延，注意辨析相近概念的共同点和不同点，准确理解和使用数学符号。

在学习集合概念时，要注意掌握集合的两个特性，即元素的确定性和元素的不重复性。

从表面看空集很不自然，实际上它是一个宝贵的虚构，具有重要的意义。在集合运算中，

常常需要优先考虑相关集合是一个空集时是否满足条件。

子集概念的引出拉开了研究集合与集合之间关系的序幕，派生出真子集、集合相等、全集、补集等概念，导出了集合的交、并、补等运算。

将集合的$\subseteq$、$\subsetneqq$、$=$关系与数的$\leqslant$、$<$、$=$关系和图形的$\backsim$、$\trianglerighteq$关系进行类比，发现集合的包含、真包含、相等关系也具有传递性。

将集合的$\cap$、$\cup$运算与数的$+$、$\times$运算进行类比，可以发现集合的交、并运算也满足交换律、结合律和分配律。对集合的补运算进行研究，试图去发现运算的规律，以提高自己的探索能力。

在理解集合语言的基础上，加强应用集合语言的意识，例如构造美丽的图案，并用集合语言予以表达。

(二)疑难剖析

例 1. 世界体育明星能否构成一个集合?

【剖析】 巴西的足球运动员罗纳尔多、里瓦尔多是公认的世界体育明星（当然也有人不这样认为），你的体育教师不是世界体育明星，而有些人是否是世界体育明星会有很多争议，因为每个人对世界体育明星的评判标准是不完全相同的。因为“世界体育明星”这个概念不具备可以明确判断一个对象是或者不是世界体育明星的条件，所以世界体育明星不能构成一个集合。

【说明】 一个对象能否成为集合，首先看它是否满足元素的确定性，即对任何事物能够判断它是或者不是这个对象的元素。“世界冠军”这个概念可以构成集合。因为存在着客观标准，任何一个人(或事物)都可以判断是或者不是世界冠军，无论这个人(或事物)是否著名，从事的项目是否风靡全球。

例 2. 本页上的文字、符号的全体能否构成一个集合?

【剖析】 因为本页上的文字、符号的全体中含有相同的元素(例如“集合”这个词不止一次出现)，所以本页上的文字、符号的全体不能构成集合。

【说明】 在高中阶段，我们涉及的集合必须满足元素的确定性和元素的不重复性。在高等数学里，可以研究模糊集合和重集，即可以讨论元素不确定的集合和含有重复元素的集合。

例 3. 用适当的方法，将下列对象的全体表示成集合：

(1)水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星、冥王星；

(2)目前联合国常任理事国的国籍；

(3)小于 20 的所有质数；

(4)不等式 $x-3>2$ 的解集；

(5)直线 $y=x$ 上所有的点。

【剖析】 (1){已发现的太阳系的九大行星}；

(2){中国，美国，俄罗斯，英国，法国}；

(3){2,3,5,7,11,13,17,19}；

(4)$\{x \mid x>5\}$；

(5)$\{(x,y) \mid y=x\}$。

【说明】 集合的表示法主要是列举法和描述法。把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做列举法。列举法的优点是能看清集合的元素。把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做描述法。描述法的优点是能看清集合的元素的特性。

例 4. 下列表述是否正确，请说明理由：

(1)$\mathbf{Z}=\{$全部整数$\}$；　(2)$\mathbf{R}=\{$实数集$\}=\{\mathbf{R}\}$；

(3)$\{(x,y) \mid x=1,y=2\}$；　(4)$\{(1,2)\}=\{1,2\}$。

【剖析】 (1)不正确，因为括号{ }已经表示全部(或全体)，所以正确表述是 $\mathbf{Z}=\{$整数$\}$。

(2)不正确，因为括号{ }已经表示集合了，而$\{\mathbf{R}\}$表示以 $\mathbf{R}$ 为元素的集合，所以正确表述是 $\mathbf{R}=\{$实数$\}$。

(3)不妥当，因为$\{(x,y) \mid x=1,y=2\}$太累赘，所以正确表述是$\{(1,2)\}$。

(4)不正确，因为$\{(1,2)\}$表示一个点构成的集合，而$\{1,2\}$表示两个数组成的集合，数集与点集是不同类型的集合，所以数集与点集不相等。

例 5. 求集合$\{1,x,x^2-x\}$中 x 满足的条件。

【剖析】 因为 $1,x,x^2-x$ 三个元素要互不相同，即 $x\neq1$，$x^2-x\neq1$，$x^2-x\neq x$，所以 x 满足的条件是 $x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq0$，$x\neq1$，$x\neq2$，$x\neq\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$。

【说明】 问题的关键是体现集合元素的不重复性。

例 6. 能不能说:"子集是由原来的集合中的部分元素组成的集合"?

【剖析】 若集合 B 是集合 A 的非空真子集,则可以说集合 B 是由集合 A 中的部分元素组成的集合。若集合 B 是空集,或集合 B 等于集合 A,就不能这样说了。

例 7. 已知 $A=\{y\mid y=x,\ x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{y\mid y=x^2, x\in\mathbf{R}\}$, $C=\{(x,\ y)\mid y=x, x\in\mathbf{R}\}$, $D=\{(x,y)\mid y=x^2, x\in\mathbf{R}\}$,求 $A\cap B$, $C\cap D$, $A\cap D$, $A\cup B$, $C\cup D$。

【剖析】 集合 A 与集合 B 是数集,它们分别是函数 $y=x(x\in\mathbf{R})$ 和 $y=x^2(x\in\mathbf{R})$ 的值域。集合 C 与集合 D 是点集,它们在坐标平面的几何表示分别是直线 $y=x$ 和抛物线 $y=x^2$。

$A\cap B=[0,+\infty)$, $C\cap D=\{(0,0),(1,1)\}$, $A\cap D=\varnothing$, $A\cup B=\mathbf{R}$,

$C\cup D=\{(x,y)\mid y=x,或\ y=x^2, x\in\mathbf{R}\}$。

【说明】 在高中阶段,我们面临的大部分集合是数集和点集。在进行集合运算时,特别要注意区分数集和点集。

例 8. 约定:空集是有限集。命题一"有限集的子集是有限集",命题二"无限集的子集是无限集"。判断两个命题是否正确,并说明理由。

【剖析】 命题一正确。若 A 是有限集, $B\subseteq A$,则 $\mathrm{card}(B)\leqslant\mathrm{card}(A)$ ($\mathrm{card}(A)$表示集合 A 的元素个数),于是集合 B 是有限集。

命题二不正确。无限集的子集可能是无限集,也可能是有限集。例如集合$\{0\}$和集合 $\mathbf{N}$ 都是集合 $\mathbf{Z}$ 的子集,$\{0\}$是有限集,而 $\mathbf{N}$ 是无限集。

例 9. 已知 $A=\{y\mid y=x^2,\ x\in\mathbf{R}^+\}$, $B=\{x\mid y=x^2,\ y\in\mathbf{R}^+\}$,讨论集合 A 与集合 B 的关系。

【剖析】 集合 A 是函数 $y=x^2(x\in\mathbf{R}^+)$的值域, $A=\mathbf{R}^+$。

集合 B 由平方数为正实数的全体实数组成,即 $B=\mathbf{R}^-\cup\mathbf{R}^+$。

因此 $A\subsetneqq B$。

例 10. 已知 $A=\{x\mid x=2m+1,\ m\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{x\mid x=4n\pm1,\ n\in\mathbf{Z}\}$,讨论集合 A 与集合 B 的关系。

【剖析】 $\because$集合 A 是奇数集,对任意 $n\in\mathbf{Z}$, $x=4n\pm1$ 是奇数, $\therefore B\subseteq A$。

$\because$对任意 $m\in\mathbf{Z}$,当 m 是偶数时, $x=2m+1=4n+1\in B$;

当 m 是奇数时, $x=2m+1=2(2n-1)+1=4n-1\in B$;

$\therefore A \subseteq B$。$\therefore A = B$。

三、典型例题解析

例 1. 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$。

【思路分析】 要证任意 $x \in A \Rightarrow x \in C$。

【证明】 $\because A \subseteq B$, $\therefore$ 任意 $x \in A \Rightarrow x \in B$。
又 $\because B \subseteq C$, $\therefore x \in C$。$\therefore A \subseteq C$。

【拓展】 若 $A \subsetneqq B, B \subsetneqq C$,则 $A \subsetneqq C$。

【类比】 若 $A = B, B = C$,则 $A = C$。
若 $A < B, B < C$,则 $A < C$。
若 $l /\!/ m, m /\!/ n$,则 $l /\!/ n$。
若 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF, \triangle DEF \backsim \triangle GHI$,则 $\triangle ABC \backsim \triangle GHI$。

【说明】 在数学中具有传递性的关系有很多,例如代数中的 $>$、$=$、$<$、$\geq$、$\leq$,几何中的 $/\!/$、$\backsim$、$\cong$。

例 2. 若 A、B 是数集,$A \subseteq B$,$a \in A \Rightarrow b - a \in A$,则称集合 A 为集合 B 关于 b 的对称集:
(1)已知 $B = \{1,2,3,4,5\}$,集合 A 是集合 B 关于 6 的对称集,求集合 A 的个数;
(2)若集合 A 是集合 B 关于 b 的对称集,问 $\complement_B A$ 是否是集合 B 关于 b 的对称集,为什么?

【解】 (1)若集合 A 含有一个元素,则 $A = \{3\}$。
若集合 A 含有两个个元素,则 $A = \{1,5\}$,或 $A = \{2,4\}$。
若集合 A 含有三个个元素,则 $A = \{1,3,5\}$,或 $A = \{2,3,4\}$。
若集合 A 含有四个个元素,则 $A = \{1,2,4,5\}$。
若集合 A 含有五个个元素,则 $A = \{1,2,3,4,5\}$。
所以满足条件的集合 A 有 7 个。
(2)若 A 是集合 B 关于 b 的对称集,则当 $A \subsetneqq B$ 时,$\complement_B A$ 是集合 B 关于 b 的对称集;当 $A = B$ 时,$\complement_B A$ 不是集合 B 关于 b 的对称集。

例 3. 已知 $A = \{1,2,3\}$,求集合 A 的子集的个数。

【解】 按子集所含的元素的个数分类讨论。

若子集不含任何元素，则子集是 $\varnothing$。

若子集含有一个元素，则子集是$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$。

若子集含有两个元素，则子集是$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$。

若子集含有三个元素，则子集是$\{1,2,3\}$。

所以集合 A 的子集的个数是 8。

【拓展】 已知集合 A 含有 n 个元素，求集合 A 的子集的个数。

【解】 解题策略：从头做起。

集合$\{1\}$有 2 个子集：$\varnothing$，$\{1\}$。

$\because$ $\varnothing$、$\{1\}$是集合$\{1,2\}$的子集，把元素 2 添加到集合 $\varnothing$、$\{1\}$中便生成了集合$\{2\}$、$\{1,2\}$。

$\therefore$ 集合$\{1,2\}$有 4 个子集：$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,2\}$。

$\because$ $\varnothing$、$\{1\}$、$\{2\}$、$\{1,2\}$是集合$\{1,2,3\}$的子集，把元素 3 添加到集合 $\varnothing$、$\{1\}$、$\{2\}$、$\{1,2\}$中便生成了集合$\{3\}$、$\{1,3\}$、$\{2,3\}$、$\{1,2,3\}$。

$\therefore$ 集合$\{1,2,3,\}$有 8 个子集：$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,2\}$，$\{3\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，$\{1,2,3\}$。

一般化，假设集合 A 含有 k 个元素，集合 A 有 m 个子集，在集合 A 中添加一个元素 p，构成集合 B。集合 A 的 m 个子集都是集合 B 的子集，把元素 p 添加到集合 A 的 m 个子集中生成 m 个集合 B 的子集，所以集合 B 有 $2m$ 个子集。

n:	1	2	3	4	5	6
子集个数：	2	4	8	16	32	64

猜测：含有 n 个元素的集合 A 有 2^n 个子集，有 2^n-1 个真子集，有 2^n-2 个非空真子集。

【说明】 严格的证明要用数学归纳法。

例 4. 设全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x^2+px+q=0\}$，$B=\{x\mid x^2+3x+2=0\}$，已知 $A\cup B=B$，求实数 p、q 满足的条件。

【解】 $\because A\cup B=B$，$\therefore A\subseteq B$。

$\because B=\{-1,-2\}$，$\therefore$ 当 $A=\{-1,-2\}$时，$p=3$，$q=2$；

当 $A=\{-1\}$时，$p=2$，$q=1$；当 $A=\{-2\}$时，$p=4$，$q=4$；当 $A=\varnothing$ 时，$p^2-4q<0$。

例 5. 已知 $A=\{(x,y)\mid y=ax+1\}$，$B=\{(x,y)\mid y=|x|\}$，且 $A\cap B$ 是单元素集，求 a 的取值范围。

【思路分析】 集合 A 与集合 B 都是点集，集合 A 在坐标平面的图象是过点$(0,1)$的一条直线，点集 B 在坐标平面的图象是过坐标原点的两条射线。要使 $A\cap B$ 是单元素集，当且仅当直线与一条射线有且只有惟一的公共点。

【解】 当 $-1<a<1$ 时，直线 $y=ax+1$ 与两条射线各有一个公共点；

当 $a\geqslant 1$ 时,直线 $y=ax+1$ 与射线 $y=-x(x\leqslant 0)$ 有一个公共点;
当 $a\leqslant -1$ 时,直线 $y=ax+1$ 与射线 $y=x(x\geqslant 0)$ 有一个公共点。
所以 a 的取值范围是 $\{x\mid x\leqslant -1, x\geqslant 1\}$。

例 6. 已知集合 $A\subsetneqq P=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B\subsetneqq Q=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, $P\cap Q=\varnothing$,求集合 $A\cup B$ 的个数。

【解】 满足条件 $A\subsetneqq P=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 的集合 A 有 31 个,记为 A_1、A_2、…、A_{31};满足条件 $B\subsetneqq Q=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ 的集合 B 有 15 个,记为 B_1、B_2、…、B_{15}。
$\because P\cap Q=\varnothing$, $\therefore A_i\cap B_j=\varnothing$, $1\leqslant i\leqslant 31$, $1\leqslant j\leqslant 15$, i、$j\in\mathbf{N}$。
$\therefore$ 集合 $A\cup B$ 的个数是 465。

例 7. 已知 $A=\{x\mid x=a^2+b^2, a、b\in\mathbf{Z}\}$。若 x_1、$x_2\in A$,证明:$x_1x_2\in A$。

【证明】 设 $x_1=a^2+b^2$, $x_2=c^2+d^2$, a、b、c、$d\in\mathbf{Z}$。

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= (a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2 \\ &= a^2c^2+2abcd+a^2d^2+b^2c^2-2abcd+b^2d^2 \\ &= (ac+bd)^2+(ad-bc)^2 \end{aligned}$$

$\because ac+bd$、$ad-bc\in\mathbf{Z}$, $\therefore x_1x_2\in A$。

例 8. 已知 $\{1,2\}\subsetneqq A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$, $\{4,5\}\subsetneqq B\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,求满足条件 $A\cup B\subsetneqq\{1,2,3,4,5\}$ 的集合 A、B 的搭配种数。

【解】 满足条件 $\{1,2\}\subsetneqq A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$ 的集合 A 有 7 个,且均包括元素 1,2;
满足条件 $\{4,5\}\subsetneqq B\subseteq\{1,2,3,4,5\}$ 的集合 A 有 7 个,且均包括元素 4,5。
$\because A\cup B\subsetneqq\{1,2,3,4,5\}$, $\therefore$ 集合 A、B 均不包含元素 3。
$\because$ 满足条件的集合 A 有 3 个:$\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,2,4,5\}$;
满足条件的集合 B 有 3 个:$\{1,4,5\}$, $\{2,4,5\}$, $\{1,2,4,5\}$。
$\therefore$ 集合 A、B 的搭配种数是 9。

例 9. 已知 $A=\{x\mid 2x^2+3x+1=0\}$, $B=\{x\mid ax+1=0\}$,且 $B\subseteq A$,求 a 的值的全体组成的集合 C。

【解】 $\because A=\{x\mid 2x^2+3x+1=0\}=\{-1,-\frac{1}{2}\}$, $B\subseteq A$。

$\therefore$ 当 $B=\{-1\}$ 时,$a=1$;当 $B=\{-\frac{1}{2}\}$ 时,$a=2$;当 $B=\varnothing$ 时,$a=0$。

$\therefore C=\{0,1,2\}$。