高等学校教材

高等代数

黄廷祝 主编
何军华 李永彬 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等代数

Gaodeng Daishu

黄廷祝 主编

何军华 李永彬 编

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是作者在多年教学实践和研究的基础上，吸取若干国内外教材的优点，创新教材内容体系和教学方法编写而成，理论体系的处理更加科学、简洁，易教易学。全书主要内容包括代数理论的预备知识、矩阵及其初等变换、行列式、n 维向量空间、多项式、线性空间、线性变换、Jordan 标准形与 λ-矩阵、欧氏空间、二次型与双线性函数。

本书可作为高等学校数学类专业高等代数课程的教材或教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等代数／黄廷祝主编；何军华，李永彬编. --北京：高等教育出版社，2012.1

ISBN 978-7-04-033804-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①黄… ②何… ③李… Ⅲ.①高等代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 273002 号

策划编辑 兰莹莹　责任编辑 贾翠萍　封面设计 于文燕　版式设计 杜微言
插图绘制 尹文军　责任校对 金 辉　责任印制 张泽业

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京地质印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm × 960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	24.5	版　　次	2012 年 1 月第 1 版
字　　数	440 千字	印　　次	2012 年 1 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	35.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物 料 号　33804-00

前　　言

“高等代数”是高等学校数学类专业最主要的基础课程之一。本书是作者在多年教学实践和研究的基础上，吸取若干国内外教材的优点，创新教材内容体系和教学方法编写而成的，出版之前曾作为讲义在电子科技大学数学科学学院试用。

本书特点举例如下：

“高等代数”历来是学生感到困难的课程。为此，作者对教材内容体系和有关内容的处理进行了创新，采用了一些简便方法，使得学生能够较容易地用有限的课时，对重点与难点内容有深刻的理解和掌握，兼顾了科学性与可读性。例如：对于难于理解的抽象的线性空间概念，本书采用与从特殊到一般相吻合的认识过程，采用循序渐进、不断过渡的方式，而不是直接定义抽象的线性空间概念。为此，从第一章就强调矩阵线性运算的八条法则，到第三章建立起 n 维向量空间 F^n 与子空间以及相应的基、维数和坐标的概念，进而过渡到第五章一般抽象的线性空间概念，使得学生易于理解和掌握，同时也体现了数学研究中不断抽象、扩张和一般化的数学思想与精神。

在第〇章中，我们预先介绍了集合上的等价关系与代数系统（尤其是加群）等概念，并在其他章节中，通过具体实例多次运用这些非常有用的抽象概念。例如，矩阵的等价、相抵与合同关系，向量组的等价，多项式的相伴以及线性空间的同构等都是等价关系；矩阵的加法，多项式的加法以及向量的加法等都能构成相应的加群。在此基础上，我们在第五章中采用加群来简化线性空间的定义，并充分借助“同构”思想将第三章中具体的 n 维向量空间的主要概念与性质过渡到一般数域上的线性空间上。

在第一章就引出初等变换的方法，并在其后的计算与证明过程中有意识地反复使用，有利于计算过程与计算格式的程序化，同时使系列重要结论推导简单和便于理解。例如，在第一章就将方阵可逆与齐次线性方程组只有零解、非齐次线性方程组有惟一解、矩阵相抵于单位矩阵、可表示为有限个初等矩阵的乘积等的等价关系建立起来，这使得学生更易深刻理解、把握不同概念的内在联系和统一性。

向量组的线性相关性、矩阵的秩与向量组的秩、线性方程组解的结构中若干个重要定理采用一系列等价命题的叙述与证明方法，使其内在关系揭示得更加深刻、清晰，证明过程更加简洁、易懂，易于掌握一系列重要概念的内在联

系和统一性。

紧接伴随矩阵的方法处理逆矩阵的计算之后，我们给出 Cramer 法则的理论证明，相比通常证法，更加简明易懂。

我们同时给出矩阵与线性变换的特征值与特征向量的定义，并以讨论矩阵情形为主，辅以计算范例，这样便于学生较迅速并深刻理解概念的内涵以及二者之间的关系。充分结合之前对实对称矩阵性质的详尽讨论，使得最后一章有关二次型的相关理论与方法变得更加容易理解和掌握。

本书第一章至第三章由黄廷祝编写，第六章至第九章由何军华编写，第〇章、第四章至第五章由李永彬编写。全书由黄廷祝统稿并定稿。谢云荪教授对全书进行了仔细地审定与修改，电子科技大学数学科学学院的教师们也对本书提出了许多宝贵的修改意见，在此致以衷心的感谢。

借此机会，向多年来对于我们工作给予关心、支持的高等教育出版社数学分社、教育部高等学校数学基础课程教学指导分委员会的专家们致以诚挚谢意。

限于编者水平，疏漏之处，恳请同行与读者批评指正。

编 者

2011 年 6 月于成都

目　　录

第〇章　预备知识

§0.1　连加、连乘与数学归纳法

一、连加号 $\sum$

在数学运算中，我们经常会遇到多个数的求和，比如 $a_1+a_2+\cdots+a_n$，为了书写方便，我们将求和简单地记为 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，其中 $\sum$ 是连加符号，其上标与下标表示求和的范围. 因此 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 也可以写成 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_j$ 或者 $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n}a_k$.

下面给出一些应用连加符号简化书写的例子.

例 1　序列 b_1，b_2，…，b_p，…，b_q，… 中从第 p 项到第 q 项的和 $b_p+b_{p+1}+\cdots+b_q$，用连加号可以写成 $\sum\limits_{i=p}^{q}b_i$ 或 $\sum\limits_{p\leqslant i\leqslant q}b_i$.

例 2　对例 1 中的序列，$\sum\limits_{i=0}^{k}b_{2i+1}$ 表示第 1 项到第 $2k+1$ 项中所有奇数项的和，即

$$\sum_{i=0}^{k}b_{2i+1}=b_1+b_3+\cdots+b_{2k+1}.$$

利用数的加法交换律以及乘法对加法的分配律，显然有下面的等式：

$$\lambda(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\lambda a_1+\lambda a_2+\cdots+\lambda a_n,$$

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n).$$

将上面的两个等式用连加号写出来，就是

$$\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda a_i,\quad \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i.$$

在实际应用中，可能会出现两个、三个，甚至更多个连加号在一起的情况. 比如 mn 个数构成的表：

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

第 1 行，第 2 行，……，第 m 行各数之和用连加号来表示，分别为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j},\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j},\ \cdots,\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}.$$

然后，再将这些数求和，即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} + \sum_{j=1}^{n} a_{2j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_{mj},$$

用连加号书写，就是 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$，实际上是表中全部 mn 个数的总和. 当然，我们也可以先按列求和，而后将各列的和相加而求得总和. 因此，我们有

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}.$$

二、连乘号 $\prod$

与连加号类似，我们可以使用连乘号 $\prod$ 将 n 个数 a_1，a_2，…，a_n 之积 $a_1a_2\cdots a_n$ 简单地记为

$$\prod_{i=1}^{n} a_i.$$

类似地，也可以有多重连乘号，例如 mn 个数构成的表：

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

中所有数的积，可表示为 $\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} a_{ij}$ 或者 $\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m} a_{ij}$.

例 3 $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i)$ 表示所有满足 $i<j$ 的因子 $a_j - a_i$ 的乘积，即

$$\begin{aligned}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)&\cdots(a_n - a_1)\\ (a_3 - a_2)&\cdots(a_n - a_2)\\ &\cdots\cdots\\ &(a_n - a_{n-1}).\end{aligned}$$

三、数学归纳法

我们约定将所有正整数所构成的集合记为 $\mathbf{N}_+$，即 $\mathbf{N}_+=\{1, 2, 3, \cdots\}$. 正整数集合的最本质属性是所谓的归纳原理(或称为归纳公理).

归纳原理　设 S 为 $\mathbf{N}_+$ 的子集，而且满足:

(1) $1\in S$; (2) 如果 $n\in S$，则 $n+1\in S$;

那么 $S=\mathbf{N}_+$.

上面给出的归纳原理实际上就是我们在中学中常用的数学归纳法的基础.

定理 1(数学归纳法)　设 $P(n)$ 是关于正整数集合 $\mathbf{N}_+$ 的一个命题. 如果

(1) 当 $n=1$ 时，命题 $P(1)$ 成立;

(2) 由 $P(n)(n\in\mathbf{N}_+)$ 成立可推出 $P(n+1)$ 成立.

那么，$P(n)$ 对所有正整数 n 都成立.

证　用 S 表示使得 $P(n)$ 成立的所有正整数所组成的集合，即 $S=\{n\in\mathbf{N}_+ \mid P(n)$ 成立$\}$. 由条件(1) 知 $1\in S$; 若 $n\in S$，则 $P(n)$ 成立，由条件(2) 知 $P(n+1)$ 成立，于是有 $n+1\in S$. 所以由归纳原理知 $S=\mathbf{N}_+$，也就是说，$P(n)$ 对所有正整数 n 都成立.

利用正整数的归纳原理，容易推出数学中经常使用的最小数原理.

定理 2(最小数原理)　正整数集 $\mathbf{N}_+$ 的任一非空子集都有一个最小数.

证　设 T 是 $\mathbf{N}_+$ 的一个非空子集，任取 $k\in T$，则集合

$$T_k=T\cap\{1, 2, \cdots, k\}=\{t\in T \mid t\leqslant k\}$$

是有限集，于是 T_k 有最小数 m，显然 $m\in T$，易见 m 也是 T 的最小数.

注　上面的证明过程中似乎没有用到归纳原理，可是我们应用了小于或等于 k 的正整数集合可以写成 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 的事实，而实际上这一事实(通常也称正整数满足良序公理)与正整数的归纳原理是等价的.

由最小数原理，我们可以证明下面的定理.

定理 3(第二数学归纳法)　设 $P(n)$ 是关于正整数集合 $\mathbf{N}_+$ 的一个命题. 如果

(1) 当 $n=1$ 时，$P(1)$ 成立;

(2) 如果对小于 n 的一切正整数 k 都成立 $P(k)$ 可推出 $P(n)$ 成立.

那么，$P(n)$ 对所有正整数 n 都成立.

证　用 S 来记使得 $P(n)$ 不成立的所有正整数所组成的集合，那么 S 是 $\mathbf{N}_+$ 的子集. 我们只需证 S 是空集即可.

用反证法. 如果 $S\neq\varnothing$，那么由最小数原理知 S 中有某个最小数 a，也就是说 a 是使得 $P(n)$ 不成立的最小的数. 由条件(1) 知 $P(1)$ 成立，因此 $a\neq 1$. 由 a 选取的最小性知，对小于 a 的一切正整数 k 都成立 $P(k)$，于是由条件

(2) 知 $P(a)$ 成立，这与 a 的选取矛盾.

最后，我们介绍一种与正整数相关的定义方式.

归纳定义（归纳构造法） 如果某个与正整数 n 有关的量 $\varphi(n)$ 是用 $\varphi(m)(m<n)$ 来定义的，这种定义方法称为**归纳定义**.

例 4 设 a 是一个数，a 的正整数方幂定义可以用关系式

$$a^1=a,\ a^n=a^{n-1}\cdot a$$

来归纳定义.

归纳定义在高等代数以及其他数学分支中经常用到，其合理性可由完全归纳原理所保证.

习 题 0.1

1. 证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}x_ix_j=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2$.

2. 计算 $\prod\limits_{k=0}^{99}\mathrm{e}^{2k+1}$.

3. 设 T 是一个由一些整数构成的集合.

(1) 如果 T 中有正整数，证明 T 中必有最小的正整数；

(2) 如果 T 中有负整数，证明 T 中必有最大的负整数.

4.（双重数学归纳法）设 $P(m,n)$ 是关于正整数 m,n 的命题. 如果

(1) $P(1,1)$ 成立；

(2) 由 $P(m,n)$ 成立可以推出 $P(m,n+1)$，$P(m+1,n)$ 都成立.

证明 $P(m,n)$ 对所有正整数 m,n 都成立.

*5. 用第二数学归纳法证明：对于任意正整数 n，

$$f_n(x)=\cos(n\arccos x)$$

是关于 x 的 n 次多项式.

§0.2 映射、变换

中学数学中，大家已学习过了集合论的基础，本节我们讨论集合之间的一种特殊关系，即映射. 映射与函数的概念在数学中扮演着中心的角色.

定义 1 设 A 和 B 是两个非空集合，所谓集合 A 到集合 B 的一个映射就是指一个法则 σ，A 中每一个元素 a 在法则 σ 之下惟一对应于 B 中某个元 b，并记 $\sigma(a)=b$，通常记映射 σ 为

$$\sigma:\ A\to B,\ a\mapsto\sigma(a),\ \forall a\in A.$$

同时称 $\sigma(a)$ 为 a 在映射 σ 下的像，a 为 $\sigma(a)$ 在映射 σ 下的一个原像. 称集

合 A 为映射 σ 的定义域，集合 $\{\sigma(a)\mid a\in A\}$ 为映射 σ 的值域，并记 $\sigma(A)=\{\sigma(a)\mid a\in A\}$ 或 $\mathrm{Im}\,\sigma=\{\sigma(a)\mid a\in A\}$. 如果 B 是一个数集，我们也将映射 σ 称为集合 A 到数集 B 的一个函数. 一个集合 A 到其自身的映射，通常称为集合 A 上的变换.

若 $\sigma: A\to B$，$\tau: A_1\to B_1$ 是两个映射，如果

$$A=A_1,\ B=B_1,\ \text{并且有}\ \sigma(a)=\tau(a),\ \forall a\in A,$$

则称映射 σ 与 τ 相等，记作 $\sigma=\tau$.

例 1 用 $\mathbf{Z}$ 表示全体整数的集合，$2\mathbf{Z}$ 是全体偶数的集合，定义

$$\sigma:\ \mathbf{Z}\to\mathbf{Z},\ n\mapsto 2n,\ \forall n\in\mathbf{Z},$$

则 σ 是 $\mathbf{Z}$ 到 $2\mathbf{Z}$ 的一个映射.

例 2(恒等变换) 设 A 是一个非空集合，定义

$$\sigma:\ A\to A,\ a\mapsto a,\ \forall a\in A.$$

即 σ 将 A 的每个元素都映为自身，称 σ 为集合 A 上的**恒等映射**或**恒等变换**，记为 id_A.

例 3(常值映射) 设 A，B 是两个非空的集合，b 是 B 中一个固定的元素，称映射

$$\sigma:\ A\to B,\ a\mapsto b,\ \forall a\in A$$

为从 A 到 B 的一个常值映射.

例 4 任意一个定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 都可以看成是从实数集合到自身的映射(变换)，因此可将函数视为映射的特殊情形.

定义 2(映射的复合) 设映射 $\sigma: A\to B$ 与映射 $\tau: B\to C$，那么可以定义映射

$$\tau\sigma:\ A\to C,\ a\mapsto\tau(\sigma(a)),$$

称 $\tau\sigma$ 为 τ 与 σ 的复合，或 τ 与 σ 的乘积. 有时也将 $\tau\sigma$ 写成 $\tau\circ\sigma$.

性质 设 $\sigma: A\to B$，$\tau: B\to C$，$\delta: C\to D$ 都是映射，则

(1) $\sigma\,\mathrm{id}_A=\sigma=\mathrm{id}_B\sigma$;

(2) $\delta(\tau\sigma)=(\delta\tau)\sigma$，即映射的乘法满足结合律.

证 (1) 直接验证可得.

(2) 易见 $\delta(\tau\sigma)$，$(\delta\tau)\sigma$ 都是从集合 A 到集合 D 的映射，它们有相同的定义域和值域. 另一方面，任取 $a\in A$，有

$$(\delta(\tau\sigma))(a)=\delta((\tau\sigma)(a))=\delta(\tau(\sigma(a))),$$
$$((\delta\tau)\sigma)(a)=(\delta\tau)(\sigma(a))=\delta(\tau(\sigma(a))),$$

因此 $\delta(\tau\sigma)=(\delta\tau)\sigma$.

定义 3(变换的方幂) 设 σ 是非空集合 A 上的变换，我们规定

$$\sigma^0=\mathrm{id}_A,\ \sigma^1=\sigma,\ \sigma^2=\sigma\sigma,\ \sigma^n=\sigma^{n-1}\sigma\,(n\geqslant 2).$$