



普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

(第二版)

方桂英 崔克俭 主编



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

(第二版)

方桂英 崔克俭 主编

本书第一版获江西省高等院校优秀教材一等奖



科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是编者在教育大众化的新形势下,根据多年的教学实践编写的高等数学教材,本书为第二版,内容在第一版的基础上有所增删.内容包括:函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、微分方程与差分方程、无穷级数、数学实验.每节后附有习题,每章后附有总习题,书末附有部分习题答案与提示.本书在编写过程中力求结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂.

本书可供高等农林院校非数学类各专业的学生使用,也可供广大教师、工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/方桂英,崔克俭主编. —2 版. —北京:科学出版社,2012
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-034997-2

I. ①高… II. ①方…②崔… III. ①高等数学-高等学校-教材
IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 134242 号

责任编辑:李鹏奇 张中兴 / 责任校对:冯 琳
责任印制:阎 磊 / 封面设计:迷底书装

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 8 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2012 年 6 月第 二 版 印张:21 3/4

2012 年 6 月第五次印刷 字数:428 000

定价:36.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《高等数学》编委会

主 编 方桂英(江西农业大学)

崔克俭(山西农业大学)

副主编 吴 坚(安徽农业大学)

曾海福(江西农业大学)

韩忠海(山西农业大学)

编 者 胡菊华(江西农业大学)

程国华(江西农业大学)

赵喜梅(山西农业大学)

钟培华(江西农业大学)

岳超慧(安徽农业大学)

宋 彦(山西农业大学)

第二版前言

本书第一版于2011年荣获“江西省高等院校优秀教材一等奖”。第二版是在第一版的基础上,结合“高等学校本科教学质量与教学改革工程”万种新教材建设项目的全面实施,按照新形势教材改革的精神,进行全面修订。此次修订前,我们广泛征求各使用院校的意见,召开了教材修订研讨会,许多有丰富教学经验的教师对本书修订提供了积极、中肯的意见。修订中,我们保留了原教材的系统、风格,保留了结构严谨、通俗易懂等特点。同时注意吸收当前教材改革中的一些成功的经验,对一些内容进行适当的精简与合并,对原版存在的个别问题进行修订。新版增加了数学实验及数学软件(Matlab)的使用介绍。新版的教材更适合当前教学的需要,成为适应时代要求、符合改革精神又继承传统优点的教材。

本书结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂,追求简明实用的效果。同时也与全国硕士研究生入学统一考试(数学三,农学门类数学联考)大纲接轨,我们审查并计算证明过全部习题,各章总习题增加了一些考研真题,为有志深造的同学提供一本好的基础教材。对于打“*”的章节以及总习题中的部分题,在教学中可灵活选用,也可作为读者进一步阅读学习的内容,以使本教材适合多种层次的需求。

广大用书教师与科学出版社的编辑对该教材的修订提出了许多宝贵的意见与建议,我们在此表示真诚的感谢。并希望读者对本书存在的问题给予批评指正。

编 者

2012年3月

第一版前言

本书紧紧围绕全国高等农林院校高等数学教学大纲,以极限理论为工具,以微积分为核心,全面系统地介绍了高等数学的基本理论、方法及其在农业科学和管理科学等领域中的应用.

在本书的编写过程中,我们几所学校结合各自多年的教学经验,通力合作,广泛交换意见,使本书能充分体现以下特点:

第一,加强基础,注重应用.在讲清基本理论的基础上突出数学在实际问题中的应用,把数学建模这根主线贯穿全书的始终.设置了较多的农业科学、经济管理科学等方面的应用性例题,注重提高学生的数学素质,培养学生应用数学解决实际问题的能力,同时培养学生的创新思维能力.

第二,传授方法,培养能力.在教材结构的安排和设计上,通过对数学问题的论证和求解,向学生灌输高等数学的基本思想和方法,培养他们分析问题和解决问题的能力.同时,我们尽量简化繁琐复杂的论证和计算,通过生动形象的描述使抽象理论具体化,使学生在掌握数学方法的基础上,不断增强学习的主动性.

第三,体系完整,结构严谨.在教材内容的安排上,我们既考虑了初等数学与高等数学的衔接,又照顾到高等数学与后续课程的联系,力求做到承上启下、平稳过渡.内容由浅入深,循序渐进,通俗易懂,一方面能使學生把握高等数学的思想方法,另一方面又可培养学生严密的逻辑思维能力.

例题和习题是教材的重要组成部分,在编写本书的过程中,我们力求例题和习题具有典型性、多样性,使它们既能提炼方法,又具有巩固理论和训练应用的双重价值.希望学生深刻体会例题的思想和方法,尽量独立地做好每一道习题.这对于加深基本理论的理解和掌握高等数学的方法无疑具有重要的意义.书中每章后的总习题参照了历年的考研题型,旨在提高学生的应试能力和综合能力.

本书是高等农林院校非数学类各专业高等数学通用教材,也可作为其他高等院校非数学类各专业学生的参考书,还可作为科学技术与管理人员的自学及参考用书.

参加本书编写的有江西农业大学方桂英、曾海福、胡菊华、程国华老师,山西农

业大学崔克俭、韩忠海、赵喜梅老师,以及安徽农业大学吴坚、岳超慧老师.全书由方桂英、崔克俭老师审阅并负责统稿.编审工作得到江西农业大学胡建根、高晓波、孙爱珍、吴志远、邓梦薇、刘华明等教师的协助,在此表示衷心的感谢.

编者十分感谢科学出版社对本书出版给予的关心与大力支持.

限于编者的水平,本书难免有不妥之处,敬请广大读者和授课教师批评指正.

编 者

2009年3月

目 录

第二版前言

第一版前言

第 1 章 函数与极限	1
1.1 函数	1
1.1.1 函数的概念	1
1.1.2 函数的基本性质	3
1.1.3 反函数与复合函数	5
1.1.4 初等函数	6
1.1.5 其他类型的函数	7
习题 1.1	10
1.2 数列极限	11
1.2.1 数列极限的定义	11
1.2.2 收敛数列的性质	13
习题 1.2	14
1.3 函数极限	15
1.3.1 自变量趋于无穷大时函数的极限	15
1.3.2 自变量趋于有限值时函数的极限	16
1.3.3 函数极限的性质	17
习题 1.3	19
1.4 无穷小量与无穷大量	19
1.4.1 无穷小量	19
1.4.2 无穷大量	20
1.4.3 极限运算法则	21
习题 1.4	23
1.5 两个重要极限	24
1.5.1 极限存在的两个准则	24
1.5.2 两个重要极限	26
习题 1.5	29
1.6 无穷小量的比较	30
习题 1.6	32

1.7 函数的连续性	33
1.7.1 函数连续的概念	33
1.7.2 函数的间断点	34
1.7.3 连续函数的性质 初等函数的连续性	36
1.7.4 闭区间上连续函数的性质	37
习题 1.7	39
第 1 章总习题	40
第 2 章 导数与微分	42
2.1 导数的概念	42
2.1.1 导数的定义	42
2.1.2 利用定义求导举例	45
2.1.3 函数可导性与连续性的关系	47
习题 2.1	48
2.2 导数的求导法则	49
2.2.1 导数的四则运算法则	49
2.2.2 反函数的求导法则	50
2.2.3 复合函数的求导法则	52
2.2.4 隐函数的求导法则	54
2.2.5 由参数方程确定的函数的导数	55
习题 2.2	56
2.3 高阶导数	57
习题 2.3	61
2.4 函数的微分	62
2.4.1 微分的概念	62
2.4.2 微分基本公式与运算法则	64
2.4.3 微分在近似计算中的应用	65
习题 2.4	67
第 2 章总习题	68
第 3 章 微分中值定理与导数的应用	70
3.1 微分中值定理	70
3.1.1 罗尔定理	70
3.1.2 拉格朗日中值定理	71
3.1.3 柯西中值定理	73
3.1.4 泰勒公式	74
习题 3.1	76

3.2 洛必达法则	77
3.2.1 $\frac{0}{0}$ 与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	77
3.2.2 其他类型未定式	80
习题 3.2	81
3.3 函数的单调性与曲线的凹凸性	81
3.3.1 函数的单调性	81
3.3.2 曲线的凹凸性	83
习题 3.3	85
3.4 函数的极值与最大值、最小值	86
3.4.1 函数的极值	86
3.4.2 函数的最大值与最小值	89
习题 3.4	91
3.5 函数图形的描绘	92
3.5.1 曲线的渐近线	92
3.5.2 函数图形的描绘	94
习题 3.5	95
3.6 导数在经济学中的应用	96
3.6.1 边际分析	96
3.6.2 弹性分析	97
习题 3.6	100
第 3 章总习题	100
第 4 章 不定积分	103
4.1 不定积分的概念与性质	103
4.1.1 原函数的概念	103
4.1.2 不定积分的概念	104
4.1.3 不定积分的性质	105
4.1.4 基本积分公式	106
习题 4.1	108
4.2 换元积分法	108
4.2.1 第一类换元法	109
4.2.2 第二类换元法	114
习题 4.2	117
4.3 分部积分法	119
习题 4.3	122

4.4 有理函数的积分	123
4.4.1 有理函数的积分	123
4.4.2 可化为有理函数的积分	127
习题 4.4	129
* 4.5 积分表的使用	129
习题 4.5	131
第 4 章总习题	131
第 5 章 定积分及其应用	133
5.1 定积分的概念与性质	133
5.1.1 引例	133
5.1.2 定积分的定义	134
5.1.3 定积分的性质	137
习题 5.1	139
5.2 微积分基本公式	140
5.2.1 可变上限定积分及其导数	140
5.2.2 牛顿-莱布尼茨公式	142
习题 5.2	144
5.3 定积分的换元积分法和分部积分法	145
5.3.1 定积分的换元积分法	146
5.3.2 定积分的分部积分法	149
习题 5.3	151
5.4 广义积分与 Γ 函数	152
5.4.1 积分区间为无限的广义积分	152
5.4.2 被积函数为无界的广义积分	153
5.4.3 Γ 函数	155
习题 5.4	156
5.5 定积分的应用	156
5.5.1 定积分的元素法	157
5.5.2 平面图形的面积	157
5.5.3 体积	160
5.5.4 经济学、生物学等方面的应用实例	162
习题 5.5	164
* 5.6 定积分的近似计算	165
5.6.1 矩形法	165
5.6.2 梯形法	166

习题 5.6	167
第 5 章总习题.....	167
第 6 章 多元函数微积分	169
6.1 空间解析几何简介	169
6.1.1 空间直角坐标系	169
6.1.2 空间曲面	171
习题 6.1	173
6.2 多元函数的极限与连续	174
6.2.1 区域	174
6.2.2 多元函数概念	175
6.2.3 二元函数的极限	176
6.2.4 二元函数的连续性	176
习题 6.2	177
6.3 偏导数	178
6.3.1 偏导数的概念	178
6.3.2 高阶偏导数	180
习题 6.3	181
6.4 全微分	182
6.4.1 全微分的定义	182
6.4.2 全微分在近似计算中的应用	183
习题 6.4	184
6.5 多元复合函数与隐函数的求导法则	184
6.5.1 多元复合函数的求导法则	184
6.5.2 多元隐函数的求导法则	186
习题 6.5	187
6.6 多元函数的极值及其应用	188
6.6.1 多元函数的极值	188
6.6.2 条件极值	189
6.6.3 多元函数的最大值与最小值	192
习题 6.6	193
6.7 二重积分	193
6.7.1 二重积分的概念与性质	193
6.7.2 二重积分的计算	196
习题 6.7	203
第 6 章总习题.....	205

第 7 章 微分方程与差分方程	207
7.1 微分方程的基本概念	207
习题 7.1	210
7.2 可分离变量的微分方程	211
7.2.1 可分离变量的微分方程	211
7.2.2 齐次微分方程	214
习题 7.2	215
7.3 一阶线性微分方程	216
习题 7.3	220
7.4 可降阶的高阶微分方程	220
7.4.1 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程	220
* 7.4.2 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	221
* 7.4.3 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	222
习题 7.4	223
7.5 高阶线性微分方程	223
7.5.1 二阶线性微分方程解的结构	223
7.5.2 二阶常系数齐次线性微分方程	225
7.5.3 二阶常系数非齐次线性微分方程	228
习题 7.5	230
7.6 差分方程的基本概念	231
7.6.1 差分的概念与性质	231
7.6.2 差分方程的概念	233
习题 7.6	233
7.7 常系数线性差分方程	234
7.7.1 一阶常系数线性差分方程	234
* 7.7.2 二阶常系数线性差分方程	237
习题 7.7	239
第 7 章总习题.....	239
第 8 章 无穷级数	241
8.1 常数项级数	241
8.1.1 级数敛散性概念	241
8.1.2 收敛级数的基本性质	243
习题 8.1	244
8.2 常数项级数敛散性判别方法	245
8.2.1 正项级数敛散性判别方法	245

8.2.2 交错项级数敛散性判别方法	249
8.2.3 任意项级数的绝对收敛与条件收敛	250
习题 8.2	252
8.3 幂级数	252
8.3.1 函数项级数的概念	252
8.3.2 幂级数及其收敛域	253
8.3.3 幂级数的运算	256
习题 8.3	258
8.4 函数的幂级数展开	258
8.4.1 泰勒级数	258
8.4.2 函数展开成幂级数	259
习题 8.4	262
第 8 章总习题	262
* 第 9 章 高等数学实验	265
9.1 MATLAB 操作基础	265
9.1.1 MATLAB 桌面平台	265
9.1.2 MATLAB 帮助系统	268
9.1.3 MATLAB 的基本命令与函数	268
9.1.4 MATLAB 的数值计算	270
9.1.5 MATLAB 的程序设计	273
9.2 基于 MATLAB 的高等数学实验	278
9.2.1 求极限	278
9.2.2 求导数	279
9.2.3 泰勒级数逼近计算器	280
9.2.4 二维与三维图像描绘	280
9.2.5 非线性方程求根	285
9.2.6 求积分	287
9.2.7 求解微分方程	289
9.3 数学建模案例	292
附录一 常用三角函数公式	298
附录二 希腊字母表	299
附录三 积分表	300
部分习题答案与提示	309

第 1 章 函数与极限

函数是数学中最重要的基本概念之一,是高等数学的主要研究对象. 极限概念是微积分的理论基础,连续性是函数的一个重要性质. 本章将介绍函数的概念与性质,函数极限的概念及其性质与运算,并运用函数的极限讨论函数的连续性.

1.1 函 数

1.1.1 函数的概念

首先看几个例子.

例 1.1.1(自由落体问题) 一个自由落体,从开始下落时算起,经过的时间设为 $t(\text{s})$,在这段时间中落体的路程设为 $s(\text{m})$. 由于只考虑重力对落体的作用,而忽略空气阻力等其他外力的影响,如果落体从开始到着地所需的时间为 T ,那么从物理学知道, s 与 t 之间有如下的依赖关系(其中 g 为重力加速度):

$$s = \frac{1}{2}gt^2, \quad 0 \leq t \leq T.$$

例 1.1.2 某化工公司统计去年农用化肥月生产量如表 1.1.1 所示.

表 1.1.1

月 份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
月产量/万吨	5.1	5.2	5.6	6.2	5.9	5.5	5.8	5.0	6.1	5.4	4.2	4.1

从上表可以看出过去一年该公司月产量 x (万吨)与时间 t (月)之间有着确定的对应关系.

例 1.1.3 图 1.1.1 是气温自动记录仪描出的某地一天的温度变化曲线,它给出了气温 $T(^{\circ}\text{C})$ 与时间 $t(\text{h})$ 之间的依赖关系.

时间 t 的变化范围是 $0 \leq t \leq 24$,当 t 在这范围内任取一值时,从图 1.1.1 中的曲线可找出气温的对应值.

上述几个例子所描述的问题虽各不相同,但却有共同的特征:它们都表达了两个变量之间的相互依赖关系,当一个变量在它的定义域中任意取定一值时,另一个变量按一定法则就有一个确定的值与之对应. 把这种确定的依赖关系抽象出来,就是函数的概念.

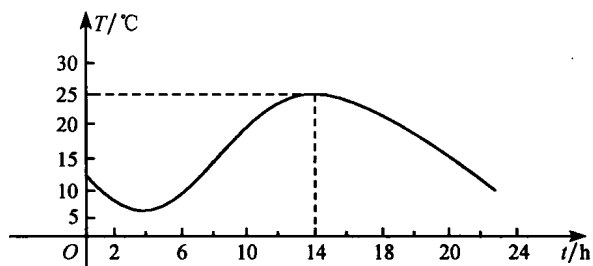


图 1.1.1

定义 1.1.1 设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的非空子集, f 是一个对应法则. 如果对于 D 中的每一个 x , 按照对应法则 f , 都有确定的唯一实数 y 与之对应, 则称 f 为定义在 D 上的函数. 集合 D 称为函数 f 的定义域, 与 D 中 x 相对应的 y 称为 f 在 x 处的函数值, 记作

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

称全体函数值构成的集合为函数 f 的值域, 一般记为 $f(D)$.

如果把 x, y 分别看成 $D, \mathbf{R}$ 中的变量, 则称 x 为自变量, y 为因变量.

函数的定义中有两个基本要素, 就是定义域与对应法则. 两个函数相同的充分必要条件是它们的定义域相同, 对应法则也相同.

函数关系表示法通常有三种: 解析式法、列表法和图示法.

下面再看几个函数例子.

例 1.1.4 根据《中华人民共和国个人所得税法》(2007 年 12 月 29 日第五次修正), 工资、薪金所得缴纳个人所得税的税率如表 1.1.2 所示.

表 1.1.2

级数	月工资 x /元	税率/%
0	$0 \leq x \leq 2000$	0
1	$2000 < x \leq 2500$	5
2	$2500 < x \leq 4000$	10
3	$4000 < x \leq 7000$	15
4	$7000 < x \leq 22000$	20
5	$22000 < x \leq 42000$	25
6	$42000 < x \leq 62000$	30
7	$62000 < x \leq 82000$	35
8	$82000 < x \leq 102000$	40
9	$x > 102000$	45

采用超额累进计算税费的方法. 若记月工资为 x (元), 应缴纳的税款为 y (元), 则 y 是 x 的函数. 根据超额累进计算税费的方法, 该函数为

$$y = f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 2000, \\ 0.05(x-2000), & 2000 < x \leq 2500, \\ 25 + 0.1(x-2500), & 2500 < x \leq 4000, \\ 175 + 0.15(x-4000), & 4000 < x \leq 7000, \\ 625 + 0.2(x-7000), & 7000 < x \leq 22000, \\ 3625 + 0.25(x-22000), & 22000 < x \leq 42000, \\ 8625 + 0.3(x-42000), & 42000 < x \leq 62000, \\ 14625 + 0.35(x-62000), & 62000 < x \leq 82000, \\ 21625 + 0.4(x-82000), & 82000 < x \leq 102000, \\ 29625 + 0.45(x-102000), & x > 102000. \end{cases}$$

例 1.1.4 中, 函数有时需要用几个式子表示, 这种在自变量的不同变化范围内, 对应法则用不同的式子表示的函数称为分段函数.

下面介绍几个常见的分段函数.

例 1.1.5 绝对值函数(图 1.1.2)

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

例 1.1.6 符号函数(图 1.1.3)

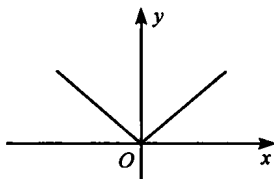


图 1.1.2

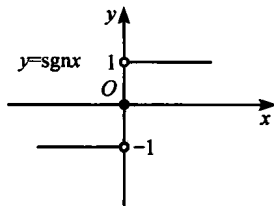


图 1.1.3

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

对任意实数 x , 满足关系

$$x = |x| \operatorname{sgn} x.$$

例 1.1.7 取整函数(图 1.1.4)

$$y = [x],$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

1.1.2 函数的基本性质

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在 D 上有定义, 若存在常数

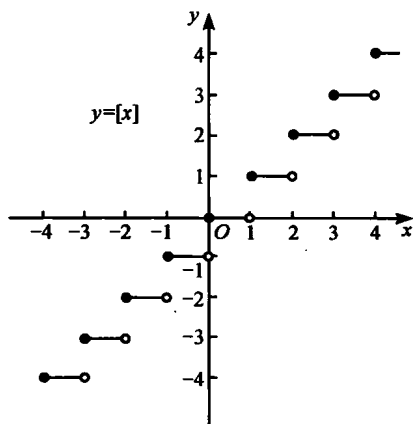


图 1.1.4