策 划 刘坤林 郭建国

2004年全国硕士研究生入学统一考试

数学政治英语模拟试题

清华大学考研辅导班 命题研究中心

清华大学考研辅导班为考生面对考试造就
一种居高临下的知识洞察力和感觉良好的临场状态

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

2004年全国硕士研究生入学统一考试
数学政治英语模拟试题

清华大学考研辅导班　命题研究中心
策　划　刘坤林　郭建国

清华大学考研辅导班为考生面对考试造就
一种居高临下的知识洞察力和感觉良好的临场状态

天津大学出版社

组稿编辑　郭建国
责任编辑　郭建国
技术设计　郭建国
封面设计　谷英卉

图书在版编目(CIP)数据

2004年全国硕士研究生入学统一考试数学、政治、英语模拟试题／清华大学考研辅导班编.—天津:天津大学出版社，2003.11
ISBN 7-5618-1870-X

Ⅰ.2… Ⅱ.清… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－习题②政治理论－研究生－入学考试－习题③英语－研究生－入学考试－习题 Ⅳ.G643

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第105566号

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨风和
地　　址　天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话　发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　　刷　河北省昌黎县人民胶印厂
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　185mm×260mm
印　　张　12.75
字　　数　318千
版　　次　2003年11月第1版
印　　次　2003年11月第1次
印　　数　1－5 000
定　　价　33.00元(含磁带13.00元)

编者的话

清华大学考研辅导班,以清华教学模式的辅导,为考生面对考试造就一种居高临下的知识洞察力和感觉良好的临场状态。广大学员说:“清华就是清华!参加了清华考研辅导班再上考场,对考题一点都不陌生。”“参加清华考研辅导班,确实是考取清华或其他一类大学研究生的成功之路。”

清华大学考研辅导班的数学、政治、英语模拟试题合订本,旨在帮助广大考生总结与检验自身的知识层面,引导考生达到应有的良好应试状态,所涉及的知识范围无疑是国家考研大纲中要求的重点,对考生有重要的指导意义,书内提供的解题方法与技巧具有很强的代表性,在学习当中应注意举一反三,以求在考场上以不变应万变,把握取胜的命运。应该指出,这里提供的模拟试题绝无压题之意。

我们一贯强调,首先要注重知识的基础性、系统性与完整性。完全基础性题目一般占60分以上(满分150分),而且基础性在综合题目中也占有重要的地位。以数学为例,所谓基础知识,包括初等函数的初等性质,构造导数定义的极限模式及其变形,极限存在的命题形式及命题属性(充分的?必要的?还是充要的?),极限运算法则,一阶线性微分方程解的公式,齐次与非齐次线性微分方程解的结构,矩阵的初等变换与秩的概念,向量组的线性相关与无关,向量组的秩与线性方程组解结构之间的关系,概率的事件运算,五个古典概率的基本公式,分布率,分布密度与分布函数的性质及其相互之间关系,数字特征的定义与基本运算公式,简单随机样本及其数字特征,等等。基础性知识的失误往往导致对一个综合题目的切入点错误,最后造成全局性错误。同时还应注意基本概念的背景和各个知识点的相互关系,做题目要以一当十,不宜多做难题。在此基础上,还应注意知识的交叉性与综合性,对基本题目涉及的方法与技巧多做总结与分析,对综合题目中知识点交叉的模式要了解、熟悉,直到具有敏感性。这样的训练会使你遇到个别难题时容易找到切入点与思路。

需要指出,这里提供的数学模拟试题,虽然分为数学一、二、三、四,共计8套试题,但其中的任何一套试题对每一位考生(不论应试数学一、二、三、四的哪一种)均有指导意义。即每一位考生应以这8套模拟试题作为全面检查自身应试复习状态的指南(可除去某种试卷大纲中不要求范围的题目)。

上述的原则,也是清华大学考研辅导班这本模拟试题的设计原则。参与本书编写的老师,均为清华大学考研辅导班的任课教师,他们是一个教学与研究成绩卓著的教授群体。长期担任清华大学考研辅导班主讲,有丰富的教学研究与授课经验,对全国各类硕士研究生入学考试大纲与辅导教学的要求有长期专门深入的研究,虽讲课特点各异,但讲课风格普遍受到同学欢迎。他们中间,有的曾是命题组成员或负责人,有的则是阅卷组负责人或成员,并且都有许多教材与专著出版,在清华校内与社会上享有很高的教学与学术地位,同时也是广大考生的良师益友。这本模拟试题集是由清华大学考研辅导班的教师精心设计编纂而成的,希望能对广大考生朋友考试成功助上一臂之力。

对天津大学出版社不失时机地给予本书出版工作的大力支持,对天津大学出版社郭建国等老师对本书的编辑与出版所付出的大量辛勤劳动,编者在此深表谢意。对书内的疏漏与不当之处,敬请读者批评指正。

清华大学考研辅导班　命题研究中心

2003年11月1日　于清华大学

清華考研辅导班

清华大学考研辅导班以她强大的教学实力和清华的优良教学环境，在社会上独树一帜，深得广大考生好评。13年来，数以万计的青年考生朋友从清华大学考研辅导班走上成功之路。清华教学模式的辅导，为考生面对考试造就一种居高临下的知识洞察力和感觉良好的临场状态。广大学员说：清华就是清华！参加了清华大学考研辅导班再上考场，对考题一点都不陌生。他们说：参加清华考研辅导班，确实是考取一类大学研究生的成功之路。

每年定期举办各类系列考研辅导班

清华大学考研辅导班：针对全国硕士研究生统考，每年举办春季双休日基础班，暑期强化班（两期），秋季双休日强化班，年底冲刺班。

工硕考研辅导班：参照全国工程硕士联合招生入学考试大纲，每年定期举办工硕联考考前辅导班，由清华大学对工程硕士考试具有专门研究的在职主讲教授任教。教学目标：按大纲要求，以考研题型为主线，为参加考试奠定坚实基础。

单考强化班：每年11月初－12月底，举办长工龄单考强化班，双休日白天上课，面向上班族朋友。

清华培训网2003年10月15日全面隆重开播！

www.tsinghuatutor.com　　www.qinghuatutor.com

www.tsinghuatutor.net　　www.qinghuatutor.net

清华培训网由清华大学考研辅导班与清华紫光（集团）总公司合作创办。

本网站提供的高质量网络教育频道，由国内领先的清华紫光网络技术制作，全部课程节目，均由清华大学考研辅导班主讲老师现场讲课的实况录制而成，经过影视专业人员精心编辑与加工，形成视频声讯并茂的教学节目，通过超大规模宽带网传送（600兆以上），使广大考生足不出户，即可身临清华课堂，倾听清华大学教授的授课指导。教学节目均为清华大学考研辅导班面授实况全程录像与可下载的讲课文档，同时提供大量有关考研的各项政策、专题辅导、教材与指导性文章等信息。

清华紫光（集团）总公司网络培训合作项目组

北京市海淀区清华大学东门外学研大厦B座902　邮编：100084　电话：010－62796032

清华大学考研辅导班

清华大学理科楼 数学科学系1101室　邮编：100084　电话：010－62781785

办公网址：http://math.tsinghua.edu.cn　E-mail：csiam@math.tsinghua.edu.cn

目　　录

《中国教育报》特邀清华大学责任教授刘坤林先生为2004年广大考研的学生写一点有指导性的东西，刘坤林教授欣然答应．部分内容曾刊登在2003年10月15日《中国教育报》上，下面是文章的详细内容．

2004年考研数学的应试复习策略

——兼谈防止几种误导

清华大学考研辅导班主讲　清华大学数学科学系责任教授　刘坤林

1.历史回顾与2004年考研

历年考研数学试题都体现一个规律：考试的核心是知识的基础性、综合性与交叉性．2004年考研大纲进一步加强了对基础性的要求．准确的概念理解与过硬的计算能力是对考生的基本要求．加强知识的基础性、系统综合性与交叉性的训练，努力提升对知识的洞察力，以不变应万变，排除误导，是我们的建议．关于2004年考研试题的特点与结构，应注意以下几点．

1)试卷分值问题

从2003年开始，国家考试中心对数学试卷的分数设定为150分，意味着数学成绩的权重有50%的提升，这反映了国家对人才数学素质与能力的重视．但是数学试卷的题目容量并未增加，而是每一题目的赋分值均有提高，比如选择与填空题由原来3分提为4分．对每一个考生来讲，在数学上下的功夫，其价值提高了．2004年数学试卷的分值维持不变．

2)2004年试卷结构与大纲变更

2004年数学考研大纲较2003年有一些局部调整．2004年数学一、数学二、数学三、数学四结构相同，均为23题．其中选择与填空题约占40%(共14小题56分)，其余为解答题．2003年的选择与填空题约占32%(共12小题48分)，这反映了对基础知识注重的提升．按学科统计，各学科能占比例的结构如下(大约)．

数学一：微积分60%，线性代数20%，概率统计20%．

数学二：微积分77%(2004年新增加多元微积分学，要求到二重积分为止)，线性代数23%(要求到特征值与特征向量为止)．

数学三：微积分50%(不含曲线、曲面积分与三重积分以及场论)，线性代数25%(要求到二次型为止)，概率统计25%．大纲将“随机变量的联合分布”的第5条改为“求其简单函数的概率分布”．

数学四：微积分50%(不含曲线、曲面积分与三重积分以及场论)，线性代数25%(要求到特征值与特征向量为止)，概率论25%(不含统计)．大纲将“随机变量的数字特征”的第5条改为“了解切比雪夫不等式”．

2.防止误导之一——“压题，猜题，多做难题”

我们的回答：要注重基础性！

一般考生总是忽略基础性，他们原认为已经有了基础，多做些难题，或听信他人压题，即可上考场．其实这种策略往往导致考试失败．事实上，应该首先注重知识的基础性、系统性与完整性．完全基础性题目一般占60分以上(满分150分)，并且基础性在综合题目中也占有重要的

地位.所谓基础知识,包括初等函数的初等性质,构造导数定义的极限模式及其变形,极限存在的命题形式及命题属性(充分的?必要的?还是充要的?),极限运算法则,一阶线性微分方程解的公式,齐次与非齐次线性微分方程解的结构,矩阵的初等变换与秩的概念,向量组的线性相关与无关,向量组的秩与线性方程组解结构之间的关系,概率的事件运算,五个古典概率的基本公式,分布率,分布密度与分布函数的性质及其相互之间关系,数字特征的定义与基本运算公式,简单随机样本及其数字特征等等.基础性知识的失误往往导致对一个综合题目的切入点错误,最后造成的是全局性错误.同时还应注意基本概念的背景和各个知识点的相互关系,不宜多做难题.对基本题目涉及的方法与技巧多做总结与分析,力争做到举一反三,以一当十,这样的训练会使考生遇到个别难题时容易找到切入点与思路.

至于压题,更是欺人之举.轻信别人压题,会导致侥幸心理,进而带着某种病态进入考场,最后往往导致失败.

许多考生对下述例题的失误,大都属于对基础知识掌握得不扎实.

例 1.求$\int_{-1}^{1}(1+x)\sqrt{1-x^2}\,dx$.此题不用计算,由定积分几何意义,立即可知结果应为单位圆 $x^2+y^2=1$ 面积的$\frac{1}{2}$,即为$\frac{\pi}{2}$.

例 2.曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点$(1,\ -2,\ 2)$处的法线方程为(　　).许多考生误答为切平面方程,而轻易丢掉4分.

例 3.求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$.答案:1.

[解]　$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1.$$

注意以下错误!

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}=2$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}=0$,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}$不存在;$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{|x|}=-1$,$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{|x|}=1$,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{|x|}$不存在,因此原极限不存在.

错误的原因是没有掌握极限运算法则的内涵概念(运算法则的命题属性为充分条件).另有一些人在初等函数 $e^{\frac{1}{x}}$ 的性质上出错.

另外,**由极限构造的导数定义是频繁考点之一**,对此基础知识的不熟练导致许多人失误.请看以下几例.

例 4.设 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$,求 $f(x)$的间断点,并指出其类型.

[解]　$$f(x)=\lim_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}=\lim_{t\to x}e^{\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\frac{\sin t}{\sin x}}.$$

由复合极限定理,同时注意应用导数定义,因此只需计算

$$\lim_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln\frac{\sin t}{\sin x}=\lim_{t\to x}\frac{x(\ln\sin t-\ln\sin x)}{\sin t-\sin x}=x(\ln t)'\Big|_{t=\sin x}=\frac{x}{\sin x},$$

于是$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e$,故 $x=0$ 为 $f(x)$的第一类(可去)间断点.

例5.设 $\delta>0$,$f(x)$在$[-\delta,\delta]$上有定义,$f(0)=1$,且满足$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x)+2xf(x)}{x^2}=0$,考察函数 $f(x)$在 $x=0$ 处的可微性,若可微,求$f'(0)$.

[解法1] $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x)+2xf(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2x-\frac{1}{2}\cdot4x^2+o(x^2)+2xf(x)}{x^2}$

$=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x}-2+0=0$.由极限运算法则得知极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x}=1$,于是函数 $f(x)$在 $x=0$ 处可微,且 $f'(0)=1$.

[解法2] $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x)+2xf(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x)+2x+2xf(x)-2x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-2x)+2x}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{2xf(x)-2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-2}{1-2x}+2}{2x}+2\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2}{1-2x}+2\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0,$$

因此极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$,于是函数 $f(x)$在 $x=0$ 处可微,且 $f'(0)=1$.

注:导数定义与极限运算法则是处理上述题目的基本点.

例6.设可导函数 $f(x)$在$[a,b]$上满足 $f(x)>0$,$f'(x)>0$.已知 $f(a)=A$,$f'_+(a)=B>0$,求极限 $\lim\limits_{b\to a^+}\dfrac{\ln f(b)-\ln f(a)}{f(b)-A}$.

[解] 由导数定义,有

$$\lim_{b\to a^+}\frac{\ln f(b)-\ln f(a)}{f(b)-A}=\lim_{b\to a^+}\frac{\ln f(b)-\ln f(a)}{b-a}\cdot\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

$$=\lim_{b\to a^+}\frac{\ln f(b)-\ln f(a)}{b-a}\cdot\lim_{b\to a^+}\frac{b-a}{f(b)-f(a)}=[\ln f_+(a)]'\cdot\frac{1}{f'_+(a)}=\frac{B}{A\cdot B}=\frac{1}{A}.$$

例7.设 $f(x)$为单调函数,$g(x)$为其反函数,且 $f(1)=2$,$f'(1)=-\dfrac{1}{\sqrt3}$,$f''(1)=1$,求 $g''(2)$.

[解] 由反函数导数公式可得 $f'(x)g'(y)=1$,两边关于 x 再次求导,有 $f''(x)g'(y)+f'(x)g''(y)y'_x=0$,或$f''(x)g'(y)+[f'(x)]^2g''(y)=0$.

令 $x=1$,应有 $y=2$.注意到 $g'(2)=\dfrac{1}{f'(1)}=-\sqrt3$,因此得到 $g''(2)=3\sqrt3$.

另外,**定积分的概念、性质与计算也是频繁考点之一**.以下例题都不属于难题,大都蕴涵了多个基础知识点.

例8.设 $f(x)+\sin^4x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(2x)\mathrm{d}x$,求 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$.

[解] 令 $2x=u$,则 $\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}u$,$\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$.

对等式 $f(x)+\sin^4x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(2x)\mathrm{d}x$ 两边取积分得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)+\sin^4 x]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(2x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x.$$

故有

$$I=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}I-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}I-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

因此

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4(\pi-4)}.$$

本题考点有两个:①定积分是一个只与积分区间及被积函数有关的一个数;②定积分的区间变换.

例 9. 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)\mathrm{d}x$, $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)\mathrm{d}x$,,则正确的是[　　].

(A) $I_1<1<I_2$　(B) $I_1>1>I_2$　(C) $I_1=I_2$　(D) $I_1>I_2>1$

[提示] 利用 $\sin x<x$ 及函数 $\sin x,\cos x$ 的增减性,由积分估值定理得出结论.答案为(A).

例 10. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 二阶可导,对一切 $x\in(0,+\infty)$ 有 $f''(x)\neq 0$,证明在 $(0,+\infty)$ 内曲线 $y=f(x)$ 上一点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与该曲线除切点外无交点.

[证法 1] 设切线方程为 $y(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$,并取辅助函数

$$F(x)=f(x)-y(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0),$$

则只需证明 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内除切点 $(x_0,f(x_0))$ 外无零点.过程略.

[证法 2] 反证法.假设 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与该曲线除切点外,还有一个交点 $x_1\neq x_0$,不妨设 $x_1>x_0$,在 $[x_0,x_1]$ 上用拉格朗日中值定理,并由罗尔定理得出矛盾.过程略.

[证法 3] 泰勒公式法.将(证法 1)中的 $F(x)$ 在 $x=x_0$ 处展开为泰勒公式形式,即 $F(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$, ξ 在 x 与 x_0 之间.因为 $f''(x)\neq 0$,由导数零点定理, $f''(x)$ 不变号,则 $F(x)$ 亦不变号.

在注重基础性的同时,要兼顾综合性与交叉性.答题应规范化,由于评分标准一般按解答步骤给分,答题过程应步骤清晰,理由表达要明确,主要步骤不可跳跃.请看以下几例.

例 11. 已知 $f(x)$ 在某邻域 $N(a,\delta)$ 内二阶可导,且 $f''(x)\neq 0$.

(1) 求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)}{h}$;

(2) 证明存在唯一的 $\theta(h)\in(0,1)$,使得 $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta(h)h)$;

(3) 求 $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)$.

[解] (1) $$\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{2h}=\frac{1}{2}f''(a).$$

(2)由拉格朗日中值定理知,存在 $\theta(h)\in(0,1)$,使得 $f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta(h)h)$,因为 $f''(x)\neq 0$,因此 $y=f(x)$的凸性不变,于是 $\theta(h)$唯一.

(3)由(1)和(2)得 $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta(h)h)$,即

$$\frac{1}{2}f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+\theta(h)h)-f'(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\theta(h)\cdot\frac{f'(a+\theta(h)h)-f'(a)}{\theta(h)h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\theta(h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+\theta(h)h)-f'(a)}{\theta(h)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\theta(h)\cdot f''(a),$$

由极限运算法则得 $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=\dfrac{1}{2}$(中间用到导数定义).

例 12.对于半空间 $x>0$ 内任意光滑曲面都有

$$\oiint_S xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

其中函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$内具有连续的一阶导数,且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$,求 $f(x)$.

本题有如下考点:①高斯公式;②若三重积分的被积函数一定,在任意区域上积分均为零,则被积函数只能为零(易于思考,反证即可得出这一结论),这一点也可类比二维曲线积分与路径无关的情形,由格林公式知道,积分与路径无关时,对应的二重积分被积函数为零(两个偏导数相等);③一阶线性微分方程的概念;④由极限给出初始条件,利用给出的极限条件确定常数 C.

答案为:$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}}{x}$.

本题得分率(按得5分以上)一般为37%,清华考研辅导班为67%.

3.防止误导之二——数学二、数学四题目容易

我们的回答:并非如此!许多人以为数学二、数学四较容易,这是误导!数学二、数学四只是要求范围小,但其中题目的分量与难度并不亚于数学一和数学三.甚至许多实例表明,数学二和数学四常与数学一、数学三共用题目,而且数学二、数学四中题目的难度超出数学一、数学三也是常见情况.请看以下几例.

例 1.[2003-2-10]设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,且 $f'(x)>0$.若极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$存在,证明:

(1)在(a,b)内 $f(x)>0$;

(2)在(a,b)内存在点 ξ,使 $\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$;

(3)在(a,b)内存在与(2)中 ξ 相异的点 η,使得 $f'(\eta)(b^2-a^2)=\dfrac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

注 [2003-2-10]表示2003年数学二的第10题,以下不再标注.

[证] (1) $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$存在$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a^+}f(2x-a)=0\Rightarrow f(a)=0$,

$f'(x)>0\Rightarrow \forall x\in(a,b)$,有 $f(x)>0$.

(2)欲证$\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$, 即要证$\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^a f(x)\mathrm{d}x}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$.

选函数:$G(x)=x^2$, $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则由柯西中值定理有

$$\frac{G(b)-G(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^a f(x)\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f(\xi)},\xi\in(a,b)$$

(3)欲证 $f'(\eta)(b^2-a^2)=\dfrac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 即$\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\dfrac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)}$,或

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f(\xi)}\cdot\frac{f(\xi)}{f'(\eta)(\xi-a)}=\frac{2\xi}{f(\xi)}\cdot\frac{f(\xi)-f(0)}{f'(\eta)(\xi-a)},$$

由(2)有

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f(\xi)}\Rightarrow\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f(\xi)-f(0)}=\frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)},$$

其中,$\eta\in(a,\xi)\Rightarrow f'(\eta)(b^2-a^2)=\dfrac{2\xi}{(\xi-a)}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

例 2.(2000 年数学一、数学二、数学三、数学四共用试题) 设函数 $f(x)$在$[0,\pi]$上连续, 且$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0,\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$,试证明: 在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点 ξ_1 与 ξ_2,使$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

[注] 本题应用罗尔定理并处理这类定积分,要求较高,属于难题.方法较多.

例 3.[2001-2-10]设 $f(x)$在$[-a,+a](a>0)$上有二阶连续导数,$f(0)=0$.

(1)写出 $f(x)$的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式.

(2)证明在$[-a,+a]$上至少存在一点 η,使得 $a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x$.

[解] (1)$\forall x\in[-a,a]$,有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2,$$

其中 ξ 在 $0,x$ 之间.

(2)由上式两边取积分得到

$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^a f(0)x\mathrm{d}x+\int_{-a}^a\dfrac{x^2}{2}f''(\xi)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_{-a}^a x^2f''(\xi)\mathrm{d}x$,应用积分估值定理可得到 $m\leqslant\dfrac{3}{a^3}\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x\leqslant M$,对 $f''(x)$在$[-a,+a]$上应用连续函数介值定理,即得本题结论.

例 4.[2002-2-5]已知 $f(x)$在$(0,+\infty)$内可导,$f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$,且有

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}},$$

求 $y=f(x)$.

[考点] 极限运算,导数定义,微分方程.答案 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$.

[解] $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}\Leftrightarrow\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln f(x+hx)-\ln f(x)}{h}=\dfrac{1}{x}$

$$\Leftrightarrow\lim_{h\to 0}\frac{\ln f(x+hx)-\ln f(x)}{xh}=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow\frac{d}{dx}(\ln f(x))=\frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=Ce^{-\frac{1}{x}}.$$

由已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$,则 $C=1,f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$.

例 5.[2002-2-4]设 $f(x)=\begin{cases}2x+\dfrac{3}{2}x^2, & -1\leqslant x<0,\\ \dfrac{xe^x}{(e^x+1)^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ 求 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$.

答案:$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^3+x^2-\dfrac{1}{2}, & -1\leqslant x<0,\\ \ln\dfrac{e^x}{e^x+1}-\dfrac{x}{e^x+1}+\ln 2-\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

例 6.[2000-2-2]设 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$.

[注] 本题属于难题,难度不亚于数学一.答案:36.

例 7.[2002-2-3]设 $y=y(x)$是二阶常微分方程,$y''+py'+qy=e^{3x}$满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解,则当 $x\to 0$ 时,函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限[ ].

(A) 不存在　(B)等于1　(C) 等于2　(D) 等于3

[注] 应选(C).无须解方程! 考察微分方程解的概念.

例 8.[2002-2-10]已知 $f(x)$在 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数且 $f(0)\neq 0,f'(0)\neq 0,f''(0)\neq 0$,证明存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,使得当 $h\to 0$ 时,$\lambda_1f(h)+\lambda_2f(2h)+\lambda_3f(3h)-f(0)$是比 h^2 高阶的无穷小量.

[证] 只须证明存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1f(h)+\lambda_2f(2h)+\lambda_3f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

由洛必达法则有

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1f'(h)+2\lambda_2f'(2h)+3\lambda_3f'(3h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1f''(h)+4\lambda_2f''(2h)+9\lambda_3f''(3h)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3)f''(0).$$

由前三等式右端式分子极限为零,分别约去公因子

$f(0)\neq 0,f'(0)\neq 0,f''(0)\neq 0$,可得到

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,\\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0,\text{系数行列式不为零(范德蒙德行列式),于是 }\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\text{ 有唯一解.}\\ \lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0.\end{cases}$$

注 亦可用泰勒公式证明.

例 9. [2002-2-9]设 $0<a<b$,证明不等式 $\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

[**证**] 为证右边不等式,令 $f(x)=\ln x-\ln a-\dfrac{x-a}{\sqrt{ax}}\quad(x\geqslant a>0)$,$f(a)=0$,且

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{a}{2x\sqrt{x}}\right)=-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}}<0,-\frac{x-2\sqrt{ax}+a}{2\times\sqrt{ax}}$$

于是 $f(x)<0$,令 $x=b$,$f(b)=\ln b-\ln a-\dfrac{b-a}{\sqrt{ab}}<0$,不等式右边成立.

再证左边不等式.令 $g(x)=\ln x(x>a>0)$,在区间$[a,b]$上用拉格朗日中值定理,$\exists\,\xi\in(a,b)$,使得 $\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}=(\ln x)'\mid_{x=\xi}=\dfrac{1}{\xi}>\dfrac{1}{b}>\dfrac{2a}{a^2+b^2}$,因此得到

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}.$$

注: 以上用到了基本不等式 $a^2+b^2>2ab$.

此外,也可取辅助函数 $F(x)=(x^2+a^2)(\ln x-\ln a)-2a(x-a)\quad(x>a>0)$,利用增减性来证明.

4. 防止误导之三——数学三、数学四考经济数学

不少人认为,经济类考生学过经济类高等数学或参加过经济类数学辅导班就够了.其实这是误导!数学三、数学四历年题目表明,除个别题目有一点经济术语之外,绝大部分题目的题型与数学一相当,而数学上的难度不亚于数学一.一个考生,如果有较好的理工科数学基础,应答数学三、数学四,将不会遇到任何困难,其成绩也定会超过一般学大学经济管理类数学的考生.只要有良好的理工科数学基础,那些少量经济术语不会成为答卷障碍,少量涉及一些经济术语的题目,不过是一般理工科数学教学中的例题而已.如果只限于学习经济类数学教材,则必然距离考研要求相差甚远,达不到应有的应试水平.结论:认真按着理工科数学三门学科的要求做好复习,定有成功的希望.以2000年数学三、数学四为例,只有一个含经济术语的题目(6分),即

假设某企业在两个互相分割的市场上出售同一种产品,两个市场的需求函数(价格)分别是 $P_1=18-2Q_1$,$P_2=12-Q_2$,其中 Q_1 和 Q_2 分别表示该产品在两个市场的销售量(单位:吨),并且该企业生产这种产品的总成本函数是 $C=2Q+5$,其中 $Q=Q_1+Q_2$.

(1) 如果该企业实行价格差别策略,试确定两个市场上该产品的销售量和价格,使该企业获最大利润;

(2) 如果该企业实行价格无差别策略,试确定两个市场上该产品的销售量及其统一的价格,使企业总利润最大化,并比较两种策略下的总利润大小.

本题不过是理工科数学中普通二元极值问题.答案:(1) $P_1=10$,$P_2=7$ 驻点唯一,本题实际背景有最大值52万元;(2) $P_1=P_2=8$,最大利润 $L_{\max}=49$ 万元.结论:差别定价优于统一定

价.本题一般得分率(4 分以上)为 15% ,清华考研辅导班学员为 39% .

每一位考研朋友应有适合自己的复习计划,要善于思考,多动脑筋.选择参考书要特别注意选择信誉较好的出版单位(如著名大学或国家级的出版社)出版的图书,切勿选用某些带有商业炒作色彩的出版物.踏踏实实做好基础知识的整理与系统化,努力造就对知识的洞察力,就能做到以不变应万变,把握取胜的命运.

数学一模拟试题 1

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分．把答案填在题中横线上）

（1）函数 $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $A(1,0,-1)$ 最大的方向导数是______．

（2）级数的和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n!}$ 是______．

（3）已知方程 $y''+\alpha_1(x)y'+\alpha_2(x)y=f(x)\ (f(x)\neq 0)$ 的三个解为 $y_1=\sin x$，$y_2=x^2+\sin x$，$y_3=\mathrm{e}^{2x}+\sin x$，则此方程的通解为______．

（4）$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{101}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}^{100}=$______．

（5）$P(A)=\dfrac{1}{3}$，$P(B\mid A)=\dfrac{1}{4}$，$P(A\mid B)=\dfrac{1}{2}$，则 $P(A\cup\bar{B})=$______．

（6）设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,3^2)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的一组样本，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，已求得假设“总体的均值等于 75”的拒绝域为 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n:\bar{x}<74.02$ 或 $\bar{x}>75.98\}$，则样本容量 $n=$______．

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）

（7）设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是条件极值问题

$$\begin{cases}\min\ \{x^2+2y^2+3z^2\}\\ z-(x-1)^2-y^2-1=0\end{cases}$$

的解，且 $x_0^2+2y_0^2+3_0^2=R$．又设 π_1,π_2 分别是曲面 $x^2+2y^2+3z^2=R$ 和曲面 $z-(x-1)^2-y^2-1=0$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面，则[　　]．

（A）π_1 与 π_2 互相垂直　　（B）π_1 与 π_2 重合

（C）π_1 与 π_2 的法线的夹角是 45°　　（D）（A），（B），（C）都不正确

（8）设球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2az\ (a>0)$ 中每点的质量密度与该点到坐标原点的距离的平方成反比，则该球体的质量 M 与质心 z 的坐标 $\bar{Z}$ 分别为[　　]．

（A）$M=2k\pi a,\bar{Z}=\dfrac{1}{3}a$　　（B）$M=k\pi a,\bar{Z}=\dfrac{1}{3}a$

（B）$M=2k\pi a,\bar{Z}=\dfrac{1}{2}a$　　（B）$M=k\pi a,\bar{Z}=\dfrac{1}{2}a$

（9）设曲线方程为 $\begin{cases}x^2+2y^2+3z^2=6\\ x-2y+z=0\end{cases}$，则在点（1，1，1）处的切线方程为[　　]．

（A）$\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{4}$　　（B）$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$

可沿此线剪下使用

(C)$\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ (D)$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$

(10)设 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，$\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}v$ 在球坐标系下化为累次积分是[ ].

(A)$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}r$ (B)$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}r$

(C)$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}r$ (D)$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}r$

(11)设 n 为自然数，当 $x\in(0,+\infty)$时，$f(x)>0,f''(x)<0$,则不等式成立的是[ ].

(A)$f(n)-f\left(\dfrac{2n-1}{2}\right)>f\left(\dfrac{2n+1}{2}\right)-f(n)$

(B)$f(n)-f\left(\dfrac{2n-1}{2}\right)<f\left(\dfrac{2n+1}{2}\right)-f(n)$

(C)$f\left(\dfrac{2n+1}{2}\right)-f\left(\dfrac{2n-1}{2}\right)>2\left[f(n)-f\left(\dfrac{2n-1}{2}\right)\right]$

(D)$2\left[f\left(\dfrac{2n+1}{2}\right)-f(n)\right]>f\left(\dfrac{2n+1}{2}\right)-f\left(\dfrac{2n-1}{2}\right)$

(12)设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵，方程组$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,则[ ].

(A)当 $n>m$ 时，仅有零解 (B)当 $n>m$ 时，必有非零解

(C)当 $m>n$ 时，仅有零解 (D)当 $m>n$ 时，必有非零解

(13)设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，已知 $\boldsymbol{A}$ 的行列式$|\boldsymbol{A}|=-6$,$\boldsymbol{A}$ 的迹 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}=2$,且满足关系式 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为[ ].

(A)$-2,3,-6$ (B)$2,-3,6$ (C)$1,-2,3$ (D)$-\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{2}$

(14)设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从区间$[0,1]$上的均匀分布，Y 服从参数 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 的指数分布，又设含有 a 的二次方程为 $a^2+2Xa+Y=0$,则方程有实根的概率为[ ].

(A)0.225 6 (B)0.144 5 (C)0.341 8 (D)0.420 1

三、解答题(本题共 9 小题，满分 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 12 分)设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上有二阶连续导数，证明存在 $x_0\in(a,b)$,使得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(x_0).$$

可沿此线剪下使用