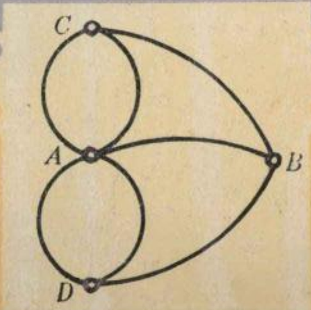
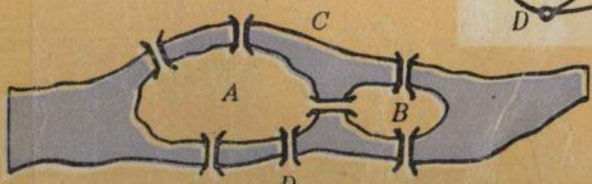
数学方法与解题方法论

ON MATHEMATICAL METHODOLOGY AND ITS PROBLEMS' SOLVING

李玉琪　李家俊　编著





中国矿业大学出版社

O Mathematical Methodology
and Its Problems' Solving

数学方法与解题方法论

李玉琪　李家俊　编著

The authors: Li Yuqi and Li Jiajun

中国矿业大学出版社

China University of
Mining and Technology Press

（苏）新登字第 010 号

内容提要

本书是从数学方法论的高度，较全面地阐述了数学解题的一般规律和方法。

本书含数学解题理论、数学方法论、竞赛数学等三部分内容，共分七章。全书以剖析数学思维方法为主线，内容丰富，选例精湛。可供高等师范院校数学教育专业讲授相关课程的教材或参考书，还可供中学数学教师阅读或参考，对广大数学爱好者与中学生也有参考价值。

数学方法与解题方法论

李玉琪　李家俊　编著

中国矿业大学出版社出版

新华书店经销　中国矿业大学印刷厂印刷

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 11.625 字数 290 千字

1994 年 1 月第一版　1994 年 1 月第一次印刷

印数 1—4000 册

ISBN 7-81040-171-8

O·13　　定价：6.50 元

前　言

书抑也！

“问题解决”(Problem Solving)是美国数学教育界继“新数运动”和“回到基础”之后，在80年代率先正式提出的又一个新的口号。其后，英国、日本、台湾等竞相仿效。目前，数学教育中的问题解决越来越受到人们的青睐与重视，成为国际数学教育的一大热点。

“问题解决”有多种不同的含义：把问题解决看作教学目的；把问题解决看作过程；把问题解决看作一种基本技能；把问题解决看作一种教学形式等。虽然，以上关于“问题解决”的各种解释对数学教学有着各自的意义，但是，其中注意联系实际与突出数学的思维方法，可以认为是现今所谓“问题解决”的两个重要特征。

数学方法论，特别是其中对于数学思维的研究，由于它是解决问题的理论，所以，理应属于“问题解决”的研究范围。从数学教育的基本理论建设这一角度进行分析，数学方法论是数学教育的一个基本理论。

我国有很长的“问题解决”的历史，现今，也有着极为丰富的解题实践与经验。但是，鉴于各种原因，对解题理论的研究却尚为不足。学生的解题多沉缅于浩瀚题海之中，流逝于无意义的单纯演算。

数学思维能力是数学能力的核心，解题是培养数学思维能力的有效手段。怎样在解题中着眼于发展学生的数学思维能力，培养有创造性的跨世纪人才，已成为当前我国数学教育工作者迫待解决的重要课题。

依照上述想法，在多年开设《数学方法论》、《数学解题理论》、

《竞赛数学》等课程的基础上，我们撰写了《数学方法与解题方法论》一书。本书是把解题提高到思想方法的层次，以方法论的高度研究数学解题理论。通过解题训练，以发展学生数学思维能力，充分发挥数学解题的教育功能。尽管书中的例题大都取自初等数学的范围，但是，正如波利亚所说："初等数学问题可提供全部我们所需要的多样性，而研究这些问题的求解特别容易着手，而且有趣"，从而相应的结论（模式）也就具有超出初等数学范围的普遍意义。本书是正在兴起的学科教育学的一门子课程。可供高等师范院校数学教育专业作为教材或参考书，也可供中学数学教学研究人员、中学数学教师阅读和参考。

本书共七章。在撰写分工中，李玉琪撰写了第二、三、四、五诸章，李家俊撰写了第一、六、七诸章。在每章后附有"问题研究"，这不仅是相应各章的复习与研究，并且是对有关章节所作的新增内容的介绍与补充。问题不同于习题（Exereise），问题与习题相比，一是非常规，二是重视情景应用，三是探究性。本书这样设立，是一种尝试，不一定能做得贴切、得体。

在本书撰写中，笔者参阅了国内一些专家、教授的专著、论文和资料，获益非浅。在出版中，该书又得到徐州师范学院院、系各部门和中国矿业大学出版社的大力支持，在此一并表示感谢。

由于笔者水平有限，加之时间仓促，遇有错误和欠妥之处，敬请同行和读者予以批评指正。

作　者

于徐州师范学院数学系

1993年11月

目　录

[illegible]

第一章　数学解题概论

数学解题广泛而深入地研究，是现代中国数学教育，特别是中学数学教育的一大特色．但是这些研究多集中于具体的解法方面．本章将在我国丰富的解题实践基础上，就数学解题的意义、过程、策略原则以及解题过程中的思维活动等理论问题展开研究，力求形成数学解题的系统理论．解题理论是数学教育理论体系的重要组成部分，是当前提高中学数学教师的理论水平与实践能力所迫切需要的．

§1.1　数学解题的意义

美国数学家哈尔莫斯（P・R・Halmos）指出，数学诚然是由它的概念、理论、方法组成．没有这些组成部分，数学就不存在．但是数学真正的组成部分应该是问题与解．解题才是数学的心脏．

1.1.1　解题与数学家及数学科学

问题对于数学家个人工作的重要作用以及对于整个数学科学进展的深远意义是不容置疑的．事实证明，只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力．而问题的缺乏则预示着发展的停滞与衰竭．数学研究也需要自己的问题．问题不仅为数学发展确定了目标，也是数学发展的动力．正是数学问题的不断产生与解决，推动了数学科学的发展，使古老的数学科学至今充满着勃勃生机．19 世纪初，为了解决高于四次方程的代数解问题，挪威的阿贝尔（N・H・Abel）、法国的伽略华（E・Galois）显示了令人惊叹的才华．伽略华引入的群、域的新概念、新思想，标志着近代数学的诞

生. 著名的欧几里得(Euclid)第五公设问题,更以其无穷的魅力,吸引了大批优秀的数学家,高斯(Gauss)、俄国的罗巴契夫斯基(Лобачевский)、匈牙利的鲍耶(Janos Bolyai)等人正是在研究第五公设问题的同时,创立了非欧几何. 尤其值得一提的是著名的德国数学大师希尔伯特(Hilbert)在 1900 年巴黎国际数学家代表大会上所作的《数学问题》演讲,不仅对各类数学问题的意义、源泉及研究方法发表了精辟的见解,而且他抓住当时数学研究领域中最活跃、最关键、最有影响的课题,提出了 23 个数学问题. 90 多年来的实践证明,这些问题涉及了现代数学许多重要的领域,极大地影响、推动了 20 世纪数学科学发展的进程.

数学问题起源于两个方面. 在每个数学分支,那些最初、最古老的问题一般起源于外部的客观世界. 但是,随着数学科学的发展,人的智力受到成功的激励,开始认识到自己的独立性,数学科学就能不受外部世界的影响独立地发展着,并在自身的矛盾运动中提出新的问题,开辟新的数学分支. 外部世界的需求以及数学科学自身的矛盾运动之间,或者说经验与思维之间这种反复出现的相互作用,驱动着整体数学的发展.

1.1.2 数学解题与数学教育

不仅对数学科学,而且对学校数学教育,问题与解也是中心. 当代最著名的数学教育家波利亚(G・polya)指出:“中学数学教学的首要任务就是要加强解题训练.”“掌握数学意味着什么呢?这就是要善于解题. 不仅要善于解一些标准的题,而且要善于解一些要求独立思考、思路合理、见解独到和有发明创造的题.”[①]学校数学教育必须实现既定的教育目的. 当前国内教育界围绕此问题的讨论虽无定论,但是现代数学教育必须全面提高人的素质则是共识. 这样,掌握必要的数学知识与基本技能;发展智力,培养能力;完善

① 波利亚著:《怎样解题》,科学出版社,1982.

人的品格，这三个方面应该是整个数学教育过程中必须达到的目标. 按照心理学的观点，数学知识的掌握，数学能力的培养，智力的发展都是在数学思维活动中形成发展的. 而数学思维的过程实质上就是不断提出问题、解决问题的过程. 数学知识是数学问题的结果，所谓知识体系则是数学问题的体系；数学能力是在解决数学问题过程中形成的心理特征；数学思想方法观点是在数学解题过程中形成的具有一般性的观念系统；数学态度是在数学解题中养成的数学心理态势，是对数学观念的调节与运用. 总之，数学知识是数学解题中物化的成果，数学能力是个人内化的产物；数学观念、态度则是两者的结晶，即养成的个性心理的特征结构.

从这一认识出发，数学解题就不仅在数学家面前显示其价值，对数学学习者来说，作用也是巨大的.

第一，通过数学解题，获得系统的数学知识，形成数学的基本技能、技巧. 这是数学解题的知识功能.

第二，通过数学解题，培养数学能力，发展数学观念，形成完善的人的品格. 此为数学解题的教育功能.

从智力发展看，主要是通过数学解题培养学生科学的思维方式，形成良好的思维品质. 这是衡量思维能力强弱的重要指标. 数学问题是思维活动的驱动力，它为思维指示方向、确立目标、添加活力，使学生的思维活动有一定水平的目的性、方向性、确定性和辨别性.

数学解题还在非智力因素的培养方面发挥应有的作用. 原苏联数学家辛钦(A·R·Хичин)特别提出四点：真诚、正直、坚韧和勇敢. 数学问题的解答一般没有正确与错误的纷争，只有解法优劣的探讨. 数学真理的这种不容争辨性，包含着巨大的教育价值. 解题者一般能够从一个确定性来评价自己的结果. 这一方面积极地影响着学生坚韧不拔意志的形成，同时通过反复努力所获得的成功，使学生尝吟回味，增强自信与成就感. 数学解题中，对严谨、简

洁、准确、条理性的追求，可培养学生良好的学风与工作习惯.数学解题的教育功能还在于它给学生以美的陶冶.问题条件与结论的对称、和谐;解法中数学思想方法的精巧构思、奇异变换，无不体现了数学的统一、简洁、对称、和谐、奇异的美感.当然数学解题对培养学生的辩证唯物主主义世界观，爱国主义情操也有不可忽视的作用.

第三，通过数学解题，检查评定学业成绩，这是数学解题的评价功能.

应该指出，数学解题在数学教学活动中是重新发现，与数学家解题是不同的.一般，学生在教师指导安排下，有计划、有目的地对不十分复杂的数学问题寻找解题的途径与方法;也可以在教师有意创设的非标准问题中，独立地有创造性地探索解法、严格论证.这些问题在研究解题教学时需加以注意.

数学解题是一种复杂的智力劳动，是富有创造性的人类活动.鉴于它的特殊重要意义，当前一般意义下的“问题解决”已成为世界性的数学教育研究的热点.什么是“问题解决”?数学教育中要解决什么样的问题?数学解题中具有什么样的规律?解题过程中微观的心理机制怎样?解题过程如何宏观控制?在这些问题上的研究与探讨方兴未艾.各国数学教育家尽管理解上不尽一致，但实际上包含了各种层次和形式的问题.1988年在布达佩斯举行的第六次国际数学教育大会(ICME—6)在“问题的模式与应用”专题研究中，提出以下问题:①虚设的问题;②进一步的问题;③经典问题;④新经典问题;⑤开放问题;⑥探究题.

应该说，常规的、经典的问题解决仍是学术界研究的中心.我国中学数学教育界近年来关于数学解题的研究，无论深度、广度都堪称世界一流.1986—1993年在连续数届IMO中，我国选手的出色成绩，引起了世界各国的关注.这说明，我国在数学解题的具体教学中有丰富的卓有成效的经验，但是也普遍存在着以下几个方

面的问题：①数学问题与解的理论研究比较薄弱；②“题海战术”愈演愈烈，扼杀了相当大一部分学生的积极性与创造性；③对观察、试验、联想、类比、猜想、想象、直觉、灵感等非逻辑思维方法缺乏应有的重视与研究.

因此，在数学教学活动中，充分发挥数学解题的作用，就必须加强对数学解题的理论研究，密切地联系我国数学教育战线的新情况、新问题，探究数学解题活动的内部规律，从而建立能够指导实际教学工作的数学解题理论. 这方面，美国数学家波利亚发表的三部最受推崇的经典著作《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》等堪为典范.

§1.2 数学解题的过程

1.2.1 数学问题

问题(problem)不同于习题(Exereise)和考题(Test Question).习题的目的在于巩固和练习，内容比较常规，学生易于模仿. 考题则专指在限定时间内所独立完成的题目. 数学问题应如何定义，尚无统一的看法. 一般讲，问题是指需要研究、讨论并加以解决的矛盾和疑难.

从系统论的观点出发，设 R 是某一具体或抽象的集合，其元素之间依经验或规定确定了某些关系和性质. 主体 S 与系统 R(R 至少是一个和谐的系统)构成的集合(S、R)中的 R 称为一个题系统. 如果 S 对 R 中的全部元素、性质、关系均是已知的，R 对 S 来说称为稳定系统. 否则 R 称为问题系统，记作 R_x. 当主体 S 要求 R_x 中他所不了解的元素、性质或关系时，R 对 S 就成了问题.

题系统 R 一般由四个要素组成：

Y：初始状态；

Z：最终状态；

P:解(由 Y 转化为 Z 的过程);

O:解题基础(由 Y 转化为 Z 的依据).

如果 R 中的四要素对 S 来说全部已知,R 即为稳定系统,记作 R_0;如果 R 中的四要素对 S 来说,至少一个已知,且至少一个未知,R 即为问题系统,记为 R_x($x=1,2,3$,表示未知要素的个数).集合(S,R_x)是一个问题,为叙述方便,把(S,R_0)称为标准型问题.特别,当题系统 R 中的元素、性质、关系,或者解题基础与数学有关时,可以把其称为数学问题.

根据问题 R_x 中未知要素的个数,把数学问题分类如表 1-1 所示.

表 1-1

未知要素个数	问题类型	记号	确定度
0	标准型	R_0	完全确定
1	训练型	R_1	确定
2	探索型	R_2	不确定
3	问题型	R_3	最不确定

例 1 对于学习完同角三角函数关系的高一同学.

问题一 求证 $\mathrm{tg}^2\theta - \sin^2\theta = \mathrm{tg}^2\theta \cdot \sin^2\theta$. 为标准问题. 这里,

Y:左边为 $\mathrm{tg}^2\theta - \sin^2\theta$,右边为 $\mathrm{tg}^2\theta \cdot \sin^2\theta$;

Z:左=右;

O:同角公式;

P:化为 $\sin\theta,\cos\theta$.

问题二 化简 $\sin^3\theta(1+\mathrm{ctg}\theta)+\cos^3\theta(1+\mathrm{tg}\theta)$. 为训练型问题. 除结论 Z 未知,其余 Y、P、O 均为已知.

例 2 已知 $\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0,\\ \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0.\end{cases}$ 求 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+$

$\cos^2\gamma$ 的值. 为探索型问题. 这里 Y、O 已知，而 Z、P 未知.

例 3 从正方体的棱和各面上的对角线中选出 K 条，使其中任意两条线段所在的直线都是异面直线，求 K 的最大值. 为问题型问题，因为，除了 Y 已知外，其余 Z、O、P 均未知.

从信息论的观点考察，数学问题 R_x 中提出的信息分三类：

(1)已知条件信息：根据初始状态转化为一组表达式；

(2)已知运算信息：指可对初始状态施加的各种变换，包括数学运算与变换、逻辑运算或具体的操作规定；

(3) 目标信息.

1.2.2 数学解题及其过程

标准型和训练型问题，由于不存在或只有一个未知要素，通常具有定向的解题方法，可称为收敛性问题，常用于巩固学生知识的练习或强化思维定势的训练；探索型和问题型问题，由于未知要素较多，通常难以有定向的解题思路，可称为发散性问题，常用于培养学生思维的灵活性与创造性，有助于发展学生的智力. 我们主要讨论后者的解题过程.

1. 数学解题的概念

所谓数学解题，就是把问题系统 R_x 转化为稳定系统 R_0 的过程. 即问题型 $R_3 \xrightarrow{\text{转化}}$ 探索型 $R_2 \xrightarrow{\text{转化}}$ 训练型 $R_1 \xrightarrow{\text{转化}}$ 标准型 R_0. 具体地说，主体 S 对问题系统 R_x 的初始状态 Y，依据解题基础 O，施行必要的一系列变换，逐步化未知为已知，转化为目标状态 Z 的过程. 这个过程一般是一个渐进的线性过程. 解题过程中介于初始状态与目标状态之间的状态称为中间状态. 那么解题过程可以图示如下：

初始状态 $Y \xrightarrow{\text{变换}} A_1 \xrightarrow{\text{变换}} A_2 \longrightarrow \cdots\cdots \xrightarrow{\text{变换}} A_n \xrightarrow{\text{变换}}$ 目标状态 Z.

A_1、A_2……A_n 为中间状态序列.

在解题过程中，一种解法，就是一条途径，按此途径，可以对 R 的初始状态 Y 施行规定的必要的变换，建立起一系列中间状态，

得到一个线性的状态序列，从而把初始状态与目标状态联接起来.

我们以一道 R_3 型的问题，来考察这个逐步转化的过程.

例 4 给定一个形状为直角三角形的金属片，现在要剪出尽可能大的两个相等的圆片，问圆片的半径为多大?

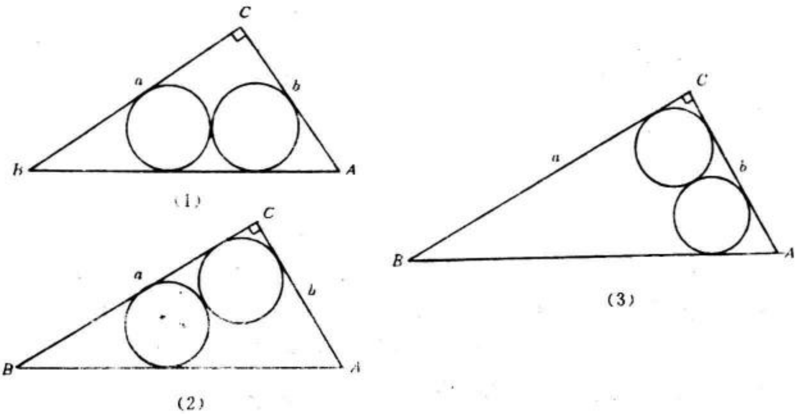


图 1-1

解 此题的未知要素多，甚至已知条件 Y 也是不确定的. 若设两直角边为 a,b 且 $a\geqslant b$，那么两等圆放置的方法有三种(见图 1-1).

为此，我们得到三个中间状态的辅助问题，即在(1)，(2)，(3)的已知情况下，分别求圆片的半径 r，易得：

$$(1)\ r_1=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2+\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}};(2)\ Y_2=\frac{a}{3+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}};$$

$$(3)\ r_3=\frac{b}{3+\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}.$$

再比较 r_1,r_2,r_3 的大小，因为

$$r_1=\frac{c}{2+\frac{1+\cos A}{\sin A}+\frac{1+\sin A}{\cos A}}$$

$$=\frac{a\cdot\cos A}{2\sin A\cos A+1+\sin A+\cos A};$$

$$r_2=\frac{a}{3+\frac{1+\sin A}{\cos A}}=\frac{a\cdot\cos A}{3\cos A+1+\sin A}.$$

只须比较两分母的大小.因为

$$2\sin A\cos A+1+\sin A+\cos A-(3\cos A+1+\sin A)$$
$$=2\sin A\cos A-2\cos A$$
$$=2\cos A(\sin A-1)<0,$$

故 $r_1>r_2$;同理 $r_1>r_3$.所以,在 Rt△ABC 中两个相互外切的等圆的最大半径为(1)之情况:$r=\frac{a\cos A}{(\sin A+\cos A)(\sin A+\cos A+1)}$.

2. 波利亚的解题表

波利亚在《怎样解题》一书中,给出了著名的怎样解题表,把数学解题分为四个步骤,或解题程序:

(1) 弄清问题.未知数是什么?已知数据是什么?条件是什么?满足条件是否可能? 条件是否充分? 画张图,引入适当的符号.把条件的各部分分开,你能否把它们写下来?

(2) 拟定计划.你以前见过它吗?你是否见过相同的问题而形式稍有不同? 你是否知道一个与此有关的问题? 你是否知道一个用得着的定理?看看未知数,试想出一个具有相同未知数或相似未知数的熟悉问题.这里有一个与现在的问题有关,且早已解决的问题.你能否利用它? 你能利用它的结果吗? 你能利用它的方法吗?为了能利用它,你是否应该引入某些辅助元素? 回到定义去.如果你不能解决所提出的问题,可先解决一个与此有关的问题.你能否想出一个更容易着手的有关问题? 一个更普遍的问题? 一个更特殊的问题? 一个类比的问题? 你能否解决这个问题的一部分? 仅

仅保持条件的一部分，而丢弃其余部分，你能对未知数确定到何种程度？你能否从已知数据导出些有用的东西？你能否想出确定未知数的其它数据？如果需要，你能否改变未知数或数据，或者都改变，使新未知数与数据更加接近？你是否充分利用了所有的已知数据？是否利用了整个条件？你是否考虑了包含在问题中的所有必要的概念？

(3) 实施计划. 实现你的解题计划，检验每一个步骤. 你是否清楚地看出每一步都是正确的？能否证明每一步都是正确的？

(4) 回顾. 你能否检验此论证？你能否用别的方法导出结果？你能不能一下子看出它来？你能不能把此结果与方法用于其它问题？

《怎样解题》一书就是围绕上述解题表展开的. 表面看来，这个朴实无华的解题表，毫无惊人之笔，但它却滋养了一代又一代的数学工作者和学习者，使他们终生受益，其显著的特点在于：

(1) 明显的普遍性与常识性. 波利亚的解题表从思维方法的一般意义出发，为数学解题活动提供了一个合理的框架，具有一般的指导意义和广泛的适用范围.

(2) 波利亚的解题表，实质上是一连串的提问，或者说是给出了解题思路的建议. 在解题活动中，自觉的内心发问，为探索思路，破除疑难指出了思维方向，具有极强的应变能力.

(3) 解题表中的提问，驱动着解题者的思维，按一定的方向去搜寻问题的有关信息，不断的获取、加工、分析、应用这些信息.

(4) 有了此表，不能期望就一定能解决所有的问题. 但是循着波利亚的解题程序发问，使我们可能较快的打开思路，提高成功的可能性.

为了叙述与理解的方便，我们把波利亚的解题表改为解题程序如下：

第一步　审明题意