21世纪经济管理精品教材·经济学系列

经济学中的优化方法

王弟海　编著

清华大学出版社

21世纪经济管理精品教材·经济学系列

经济学中的优化方法

王弟海　编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统地介绍了一些常用的经济优化方法。第一部分是线性规划问题求解方法，包括代数理论、几何理论以及对偶问题。第二部分是非线性规划问题的求解方法，包括无约束优化问题、等式约束优化问题和不等式约束优化问题以及比较静态分析方法。第三部分是动态优化问题的古典方法——变分法，包括各种边界条件、各种约束条件以及其他各种形式的变分法。第四部分是最优控制理论，包括各种边界条件、各种约束条件以及其他各种形式的最优控制理论。附录分别介绍了动态规划理论、微分方程和差分方程的求解方法以及动力系统稳定性的分析方法。

本书可作为高等院校经济学相关专业的教材。

图书在版编目(CIP)数据

经济学中的优化方法/王弟海编著.--北京：清华大学出版社，2012.9
(21世纪经济管理精品教材·经济学系列)
ISBN 978-7-302-28881-7

Ⅰ.①经…　Ⅱ.①王…　Ⅲ.①最佳化－理论－应用－经济学－高等学校－教材　Ⅳ.①F0

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第105285号

责任编辑：张　伟
封面设计：汉风唐韵
责任校对：王凤芝
责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课 件 下 载：http://www.tup.com.cn,010-62770177-4903
印 装 者：北京密云胶印厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　印　张：21　　字　　数：470千字
版　　次：2012年9月第1版　　印　　次：2012年9月第1次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：38.00元

产品编号：043945-01

前言

经济学发展到现在，优化问题已成为经济学中的基础问题，求解优化问题的方法已经成为经济学研究者必须掌握的数学技术。因为在现代经济学中，个人的理性选择已经成为主流经济学最基本的前提和假设，任何经济行为都被看成是个人在给定的约束情况下进行理性选择的结果。经济学家对人类任何经济行为规律的解释，都希望能把它建立在某种微观基础上，因而希望能够从人类本身的优化选择来理解人类的一切经济行为规律。个体的经济行为表现为个体在给定外部环境参数下所进行的某种优化选择，它在数学上就表现为某种形式的优化问题；加总经济行为表现为不同经济行为主体其经济活动相互作用的结果，它在数学上则表现为多个方程组的联立求解过程。所以，要理解经济学对人类经济行为的解释，就必须要理解经济个体的优化行为，而要理解经济个体的优化行为，首先要处理的问题就是求解个体的优化问题。正因为如此，无论是传统微观经济学领域中的消费者行为理论和生产行为理论，还是现代博弈理论，或者是当代主流宏观经济学、金融经济学以及国际经济学领域，优化问题的求解方法都是这些理论的基础和先决条件。

在微观经济学中，最基础的消费者行为理论和厂商理论都表现为一个静态优化问题。就消费者理论来看，消费者问题本质上是一个个人在预算约束下如何选择消费束，以使得效用水平最大化的问题。通过求解这一优化问题，可以得到个人对各种商品的马歇尔需求函数；同时，把求解得到的马歇尔需求函数代入目标函数可以得到优化问题的值函数，也就是间接效用函数。显然，上述优化问题是否有解，以及马歇尔需求函数和间接效用函数的性质都取决于直接效用函数的性质。关于消费者问题中的其他一些性质，如斯卢茨基方程、罗伊恒等式，以及其他有关价格和收入对需求函数和个人福利水平影响的一些比较静态性质，也都同优化问题的一阶条件有关。就生产者理论来看，厂商的问题也是一个在给定生产函数和市场条件下，如何选择要素组合和产出水平，以使得利润最大化的优化问题，或者是一个如何选择要素组合来生产既定的产量，以使得成本最小化的优化问题。利润最大化问题的求解决定了供给函数和要素需求函数，成本最小化问题的求解则决定了厂商的条件要素需求函数、成本函数以及厂商的生产组合情况。综上所述，

无论生产者行为理论还是消费者行为理论，它们实质上都是一个静态优化问题

$$\max_x(\min_x):f(x,a),\quad \text{s.t.}:g(x,a)\leqslant(\geqslant)m \tag{1}$$

求解形如式(1)的静态优化问题，将构成本书第一部分和第二部分的内容。

从数学技术来讲，同微观经济学相比，现代宏观经济学考虑的问题要更复杂一些。因为除了要有微观基础——优化问题之外，宏观经济学还要考虑时间维度。因此，在宏观经济学中，个人的优化问题必须要考虑时间。从这一方面来看，宏观经济学中的个人选择在很多时候都表现为一个动态优化问题。以拉姆齐模型(Ramsey,1927)为例，该模型其实就是一个研究个人在面临其一生收入约束的情况下，通过选择最优的消费路径来最大化其一生效用的问题。在连续时间下，拉姆齐模型可以简单表述为

$$\max_{c(t)}:\int_0^{+\infty}u(c)\mathrm{e}^{-\rho t}\mathrm{d}t,\quad \text{s.t.}:\dot{a}=ar+wL-c \tag{2}$$

其中 t 表示时间，c 表示消费，$u(\cdot)$表示效用函数，ρ 表示个人主观时间偏好率，a 表示财富水平，$\dot{a}$ 表示财富的增加即储蓄，L 表示劳动力，r 表示利率，w 表示工资。式(2)是一个连续时间的动态优化问题，其求解方法要用到变分法或者最优控制原理。在离散时间下，拉姆齐模型可以表示为

$$\max_{c(t)}:\sum_{t=0}^{+\infty}\rho^t u(c_t),\quad \text{s.t.}:a_{t+1}=a_t(r_t+1)+w_tL_t-c_t \tag{3}$$

这时优化问题是一个离散时间的动态优化问题，其求解方法就要用到动态规划原理。通过对式(2)或式(3)的求解，可以得到个人最优消费路径，个人跨期替代选择的条件，以及整个经济系统的动态方程。

同宏观经济学相比，金融学理论的数学技术又要更复杂一些。由于金融学所涉及的主要问题是收益和风险问题，收益问题决定了金融学必须要涉及时间问题，风险问题又要求金融学必须要处理不确定性问题。因此，金融学中要处理的问题是一个随机优化问题，而且至少是一个涉及两期的随机优化问题。当然，有些最简单的金融模型可以通过各种假设转化为一个静态优化问题，如马柯维茨的最优证券组合的均值—方差理论和两期的消费者 CAPM 模型，都可以转化为静态优化问题。但是，对于另外一些金融模型，如动态资产定价理论中的两个非常著名的模型——Lucas 苹果树模型(1978)和 Merton 资产定价模型(1969)，就都无法转化为静态优化问题，它们都是两个随机动态优化问题。通过对这些随机优化问题的求解，可以获得个人在不确定性下的选择原理以及不同资产的定价规律。

从所列举的一些例子可以看出，由于理性经济人假设和微观基础在经济学中的重要性，几乎所有的经济理论其实都可以表现为一个个优化问题。这些优化问题的求解方法归纳起来大概有以下几种：①静态优化，其求解方法为线性规划和非线性规划；②确定情况下的连续时间的动态优化问题，其求解方法包括变分法、最优控制原理和动态规划；③确定情况下的离散时间的动态优化问题，其求解方法包括拉格朗日方法(有限时期)和动态规划方法；④确定情况下连续时间的优化问题和离散时间的不确定性优化问题，其求解方法为动态规划。这些优化问题的求解方法，将构成本书的主要内容。具体来说，本书将分 4 个部分来介绍这些方法。第一部分是线性规划，主要讲述线性优化问题的求解

方法和对偶理论；第二部分是非线性规划，主要讲述无约束优化问题、等式约束优化问题和不等式约束优化问题；第三部分讲述连续时间优化问题的古典求解方法——变分法；第四部分讲述连续时间优化问题的另一种求解方法——最优控制原理。对于不确定情况下连续时间的优化问题和离散时间的优化问题的求解方法，即动态规划原理，本书没有具体介绍。不过，本书附录中给出了离散时间下动态规划问题的求解方法。我们希望在未来的版本中，能够更详细地给出动态规划的求解方法。

任何一本书都需要一定的准备知识，阅读本书所需要的准备知识包括：微积分、线性代数和概率论的一些知识；关于函数、集合的一些基本概念；微分方程和差分方程以及动力系统的有关知识。对于后两部分的知识，考虑到我国经济学的学生并没有涉及正式的课程，所以，本书将在附录或者脚注中给出这些知识。

当然，由于本人能力的限制，本书还有很多错误和不足，希望读者能够谅解。本人非常希望和欢迎读者能指出本书中的错误和不足，同时本人也希望就本书中存在的一些不足和需要补充的地方同读者进行交流。

作　者

2012年2月

目录

第一部分　线性规划

第二部分 非线性规划

第三部分 变 分 法

第一部分

线性规划

主要内容：线性规划的代数理论、几何理论和对偶理论。

第一章

什么是线性规划：实例、概念和形式

第一节　两个线性规划的例子

一、最优资源配置问题

假设经济中存在三种商品 X、Y 和 Z，这三种商品在国际商场上的价格分别为 P_x、P_y 和 P_z。生产这三种产品都需要资本 K、劳动力 L 和土地 G 三种要素。假设这三种商品的技术都是里昂剔夫形式的生产函数，即固定比率要素的生产，用 a_{ij}（其中 $i=X,Y,Z$ 表示产品种类，$j=K,L,G$ 表示要素种类）表示生产一单位第 i 种产品所需要的 j 要素量。现在的问题是，在给定一国资源固定的情况下，如何配置生产才是最优的，即如何配置资源才能使得该国的国民总产值最大。显然，这一问题可以很容易地归结为以下优化问题。

$$
\begin{aligned}
\max_{x,y,z}:\ & \Pi = xP_x + yP_y + zP_z \\
\text{s.t.}:\ & xa_{xK} + ya_{yK} + za_{zK} \leqslant \overline{K} \\
& xa_{xL} + ya_{yL} + za_{zL} \leqslant \overline{L} \\
& xa_{xG} + ya_{yG} + za_{zG} \leqslant \overline{G} \\
& x \geqslant 0,\quad y \geqslant 0,\quad z \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

式中函数 Π 表示国民总产值，它等于三种商品的市场价值总和，称之为目标函数；x、y 和 z 分别表示 X、Y 和 Z 三种商品的生产量，它们是优化问题中所要求解的变量，称之为优化变量；$\overline{K}$、$\overline{L}$ 和 $\overline{G}$ 分别表示该国所拥有的资本存量、劳动力数量和土地数量。接下去的三个不等式表示资源约束，称之为约束条件。第一个约束条件的左边表示三种产品所需要的总资本量，右边是国内现有的资本存量，因此，第一个约束条件是资本要素对生产的约束条件，它表示生产三种产品所需要的资本数量之和不能超过国内的资本总量。同理，第二个约束条件和第三个约束条件分别表示生产过程中劳动力和土地对生产的约束条件。最后，因为任何产品的数量不可能是负数，所以，还需要有一个对 x、y 和 z 为非负约束条件。最后一行的这三个不等式是关于优化变量的非负约束条件。

二、最低生活费用问题

我们知道，为了保持健康，一个人每天摄入的各种营养成分都必须要达到一定量的水平。为简单起见，只考虑 4 种营养成分：钙、蛋白质、葡萄糖和维生素 A。假设个人消费的食品主要由三种食物构成：食品Ⅰ、食品Ⅱ和食品Ⅲ。这三种食品的市场价格、三种食品中各种营养成分的含量以及人们每天对各种营养成分的最低需要量分别如表 1.1 所示。

表 1.1 食品的价格及其营养成分

	食品Ⅰ	食品Ⅱ	食品Ⅲ	各种营养成分的最低需求量
价格	P_1	P_2	P_3	
钙	a_{11}	a_{21}	a_{31}	b_1
蛋白质	a_{12}	a_{22}	a_{32}	b_2
葡萄糖	a_{13}	a_{23}	a_{33}	b_3
维生素 A	a_{14}	a_{24}	a_{34}	b_4

现在的问题是，为了维持人的正常健康水平，一个人在现有的市场价格水平下，其最低生活费用是多少。假设每个人对食品Ⅰ、食品Ⅱ和食品Ⅲ的消费量分别用 x_1、x_2 和 x_3 表示，显然，最低的个人生活费用问题可以很容易地表示为

$$\begin{aligned}
\min_{x_1,x_2,x_3}:\ & C = x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 \\
\text{s.t.}:\ & x_1a_{11} + x_2a_{21} + x_3a_{31} \geqslant b_1 \\
& x_1a_{12} + x_2a_{22} + x_3a_{32} \geqslant b_2 \\
& x_1a_{13} + x_2a_{23} + x_3a_{33} \geqslant b_3 \\
& x_1a_{14} + x_2a_{24} + x_3a_{34} \geqslant b_4 \\
& x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0,\quad x_3 \geqslant 0
\end{aligned} \tag{1.2}$$

式中函数 C 表示消费 x_1 的食品Ⅰ、x_2 的食品Ⅱ和 x_3 的食品Ⅲ所花费的总成本，称之为目标函数；x_1、x_2 和 x_3 是优化问题中所要求解的变量，称之为优化变量；接下去的 4 个不等式表示资源约束，称之为约束条件。这 4 个约束条件分别表示消费组合所带来的 4 种营养成分至少不低于个人维持正常健康水平所必需的最低水平；最后一行的三个不等式表示个人对食品Ⅰ、食品Ⅱ和食品Ⅲ的消费水平都必须不小于 0。

综合上面两个例子可以看出，这两个现实问题都具有以下特征：第一，都有一个求解最优的目标，它在数学上表现为最大化或者最小化某一个函数，这个函数被称为目标函数；第二，求解问题的目标函数都是线性的；第三，所要求解的问题都必须满足一组不等式，这一组不等式被称为优化问题的约束条件，而且约束条件方程也都是线性的；第四，优化问题的求解变量都必须是非负的，这些求解变量被称为优化变量。正是由于以上两个问题中的目标函数和约束条件都是线性的，所以，这两个优化问题都是线性规划问题。目标函数由线性函数给出和约束条件由线性等式或者线性不等式给出的优化问题被称为线性规划问题。当然，优化变量是否必须满足非负约束，这是由变量的实际经济意义决定的，它不是线性规划问题必须满足的条件。

第二节　线性规划问题的一般表示形式和标准形式

第一节的结尾总结了线性规划问题的一般特征，而且给出了线性规划问题的定义。这一节将给出具有 n 个选择变量和 m 个约束方程的线性规划问题数学表达式的一般表示形式，以及为了研究方便所设定的标准形式，并说明这两种形式之间的关系。

一、线性规划问题的一般表示形式

1. 普通写法

含有 n 个选择变量和 m 个约束方程的最大化线性规划问题的数学形式的普通写法可以表示如下。

$$
\begin{aligned}
&\max_{x_1,x_2,\cdots,x_n}: \pi(x_1,x_2,\cdots,x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&\text{s.t.}: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\
&\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\
&\qquad \cdots \\
&\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\
&\text{且}: \quad x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,\cdots,n
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

在式(1.3)最大化线性优化问题中，$x_j(j=1,2,\cdots,n)$是优化问题的选择变量，共有 n 个选择变量，$\pi(x_1,x_2,\cdots,x_m)$称为目标函数，它是选择变量的线性函数。每一个不等式都称为优化问题的约束条件，共有 m 个约束条件，它们也都是选择变量的线性形式，并且把它们都写成“$\leqslant$”的形式，即选择变量的某种线性函数小于一个给定的常数。在约束不等式方程中，选择变量的系数用 a_{ij} 表示，这里的双下标注明每个系数的特定位置。因为一共有 m 个含有 n 个变量的约束条件，所以全体系数 a_{ij} 表示构成一个 $m\times n$ 维的矩阵。$x_j\geqslant 0$ $(j=1,2,\cdots,n)$称为选择变量的非负约束。满足 m 个约束条件和选择变量非负约束条件的全体$(x_1,x_2,\cdots,x_m)$称为可行集。在可行集中，使得目标函数 $\pi(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 取得最大值的$(x_1,x_2,\cdots,x_m)$称为最大化线性优化问题式(1.3)的最优解。

为了方便从经济学意义上来理解式(1.3)中的最大化线性优化问题，可以把选择变量 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$理解为第 j 种商品的产量，把 c_j 理解为第 j 种商品的价格，由此，可以把目标函数理解为利润函数，并用生产函数中的利润符号 π 作为极大值函数的一般性符号。进一步把 a_{ij} 理解为生产一单位第 j 种产品所需要的第 i 种要素的数量，把 b_i 理解为第 i 种要素的现有总量。因此，第 i 个约束不等式就表示生产中所需要的第 i 种要素的总和不能超过 b_i。由此，以上问题就可以被理解为，在给定 m 种资源或者 m 种要素约束$(b_1,b_2,\cdots,b_m)$和 n 种产品的价格 $c_j(j=1,2,\cdots,n)$的情况下，如何决定 n 种产品的产量 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$，以使得这 n 种产品的市场价值总和最大。由此，极大值线性规划问题就可以被理解为经济学中的利润最大化问题。

需要注意的是，在现实问题中，如果实际问题中的某个约束不等式方程出现的约束符号是“$\geqslant$”，则只需要在该不等式两边同时乘以“-1”，那么，就可以把这个约束不等式方程变形为“$\leqslant$”的形式。另外还需要注意的一点是，如果所有的约束方程都是等式方程，则要求 m 不能超过 n。否则，满足约束条件的 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$可能不存在，或者说可行集可能是空集。

类似地，含有 n 个选择变量和 m 个约束方程的最小化规划问题的数学形式的普通写法可以表示如下：

$$\min_{x_1,x_2,\cdots,x_n}: C(x_1,x_2,\cdots,x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$\begin{aligned} \text{s. t.}: & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant b_2 \\ & \cdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \\ \text{且}: & x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,\cdots,n \end{aligned} \tag{1.4}$$

同样，在最小化线性优化问题式(1.4)中，目标函数 $C(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 是选择变量的线性函数；优化问题共有 n 个选择变量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$，有 m 个选择变量的线性约束条件，此处都把它写成"$\geqslant$"的形式，即选择变量的某种线性函数大于一个给定的常数；另外，还有选择变量的非负约束 $x_i \geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$。全体系数 a_{ij} 构成一个 $m\times n$ 维的矩阵。满足 m 个约束条件和选择变量非负约束条件的全体 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 称为可行集。在可行集中，使得目标函数 $C(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 取得最小值的 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 称为最大化线性优化问题式(1.4)的最优解。

同理，为了方便从经济学意义上来理解式(1.4)中的最小化线性优化问题，可以把选择变量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 理解为第 i 种商品的需求量，把 c_i 理解为第 i 种商品的价格，由此，可以把目标函数理解为购买 n 种商品量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 所需要的市场成本函数，并用符号 C 作为极小值函数的一般性符号。假设一种商品能够同时含有 m 种必要元素(也可以理解为能同时带来 m 种效用)，a_{ij} 被理解为一单位第 j 种商品所能含有的第 i 种必要元素的数量，b_i 可以理解为第 j 种必要元素的最低要求。因此，第 j 个约束不等式就表示购买 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 的 n 种商品所含有的第 j 种必要元素之和不能低于 b_j。因此，以上问题就可以被理解为，在给定 n 种商品的价格 $c_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的情况下，如何购买 n 种商品的需求量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$，以使得这 n 种商品所含有的第 j 种必要要素都不小于 b_j，同时 n 种商品的购买成本最小。由此，就可以把极小值线性规划问题理解为经济学中的成本最小化问题。

与最大化问题类似，第一，如果实际问题的某个约束不等式方程出现的约束符号是"$\leqslant$"，可以通过在该不等式两边同时乘以"-1"，把它变成"$\geqslant$"的形式。第二，全体系数 a_{ij} 构成一个 $m\times n$ 维的矩阵。第三，如果所有的约束方程都是等式方程，还要求 m 不能超过 n，否则，可行集可能是空集。

2. 矩阵写法

线性规划问题式(1.3)和式(1.4)也可以写成矩阵的形式。定义

$$\boldsymbol{c}_{n\times 1} = (c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{x}_{n\times 1} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{b}_{m\times 1} = (b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{A}_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

其中，T 表示该矩阵或者向量的转置，所以，三个向量都是列向量：$\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 都是 $n\times 1$ 维的列向量，$\boldsymbol{b}$ 是 $m\times 1$ 维的列向量，$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 维的矩阵。利用这些向量符号，极大化线性规

划问题式(1.3)可以写成

$$\max_{x}: \pi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \quad \text{s.t.}: \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geqslant 0 \tag{1.5}$$

极小化线性规划问题式(1.4)可以写成

$$\min_{x}: C(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \quad \text{s.t.}: \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geqslant 0 \tag{1.6}$$

二、线性规划的标准形式

为了方便研究线性规划问题的求解，下面采用线性规划的标准型。

定义 1.1 线性规划问题的标准型为

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1,x_2,\cdots,x_n}: C(x_1,x_2,\cdots,x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&\text{s.t.}: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\qquad \cdots \\
&\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
&\text{且}: \quad x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n
\end{aligned} \tag{1.7}$$

写成矩阵形式为

$$\min_{x}: C(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \quad \text{s.t.}: \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geqslant 0 \tag{1.8}$$

记以上标准型线性规划问题式(1.7)和式(1.8)问题为(LP)问题，在这一(LP)问题中，目标函数为 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} c_ix_i$，约束条件为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，它们都是等式约束条件，选择变量的非负约束为 $\boldsymbol{x}\geqslant 0$。另外，还假设 $\text{Rank}(\boldsymbol{A})=\text{Rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{b})<n$，否则，可行解可能是空集。

以上定义的标准型线性规划问题(LP)具有广泛的代表性，线性规划的一般表现形式可以通过以下变换化成标准型。

(1) 如果目标函数是极大化问题，那么，可以通过在目标函数前面加上一个负号“－”将其转化为极小化问题，即

$$\max_{x}: \pi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \min_{x}: C(\boldsymbol{x}) = -\pi(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

(2) 如果约束条件是由不等式构成，则可以通过增加松弛变量和剩余变量的方法将其转换为等式约束条件，即

① 如果约束条件为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{b}$，那么，可以增加 m 个非负剩余变量 $\boldsymbol{y}\geqslant 0$，使得约束方程转换为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$。

② 如果约束条件为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}$，那么，可以增加 m 个非负松弛变量 $\boldsymbol{y}\geqslant 0$，使得约束方程转换为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$。

(3) 如果变量不符合标准型的非负约束条件，即没有 $\boldsymbol{x}\geqslant 0$ 的约束条件($\boldsymbol{x}$ 为自由变量)，那么，可以通过引进变量 $\boldsymbol{y}\geqslant 0$ 和 $\boldsymbol{z}\geqslant 0$，同时使得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}$。

下面通过几个例题来说明如何把一般形式的线性规划问题转换为线性规划问题的标准型。

例 1.1 通过增加松弛变量 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$，把上面的极大化优化问题式(1.5)变形为如下标准型