

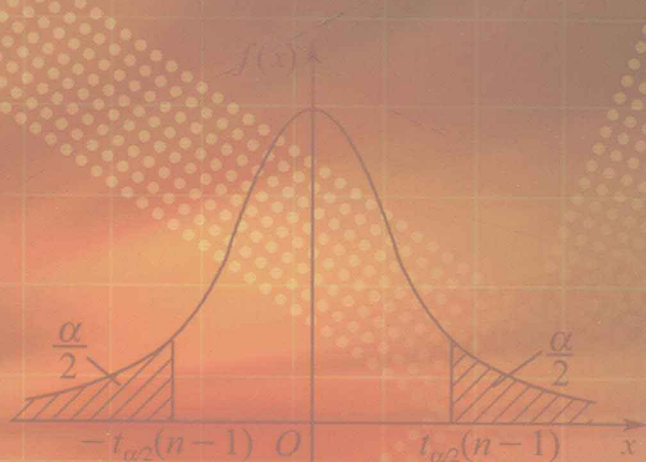


现代远程教育系列教材

应用统计

主 编 金正国

副主编 董玲玲



$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) \right)$$



大连理工大学出版社

应用统计

主 编 金正国

副主编 董玲玲

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用统计 / 金正国主编. — 大连 : 大连理工大学出版社, 2012.3

现代远程教育系列教材

ISBN 978-7-5611-6800-4

I. ①应… II. ①金… III. ①应用统计学—远程教育—教材 IV. ①C8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 040896 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84706041 传真:0411-84707403 邮购:0411-84706041

E-mail:dutp@dutp.cn URL:<http://www.dutp.cn>

大连美跃彩色印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm	印张:16.25	字数:365 千字
2012 年 3 月第 1 版	2012 年 3 月第 1 次印刷	

责任编辑:王晓玲

责任校对:葛 梅

封面设计:戴筱冬

ISBN 978-7-5611-6800-4

定 价:38.00 元

出版说明

基于计算机网络条件下的远程教育,即网络教育,亦称现代远程教育,已经成为当今推进我国高等教育大众化的新途径。经批准,大连理工大学于2002年2月成为全国68所现代远程教育试点高校之一,并已在网络高等学历教育方面取得了显著成绩。为贯彻教育部关于网络教育要“积极发展,规范管理,强化服务,提高质量,改革创新”的指导思想,在教学方面要继续做好网络教育平台建设、网络教育资源及视听教材建设、开展好网上学习的支持服务的同时,积极组织编好具有远程教育特色的高水平纸介教材十分重要。为此,大连理工大学决定将网络教育系列纸介教材的编辑出版工作列入《现代远程教育类教学改革基金项目》加以实施。

按照教改立项的要求,要配合网络课件、视听教材的建设,制订相应的网络教育纸介教材建设计划,有组织、有步骤地开展好这项工作。

按照教改立项的要求,网络教育纸介教材必须以网络课件的教学大纲为基础进行编写,并努力凸现远程教育的特色,为培养应用型人才服务。

按照教改立项的要求,网络教育纸介教材的内容取舍、理论深度、文字处理,既要力求适合大多数网络教育学生的实际接受能力,适应网络教育学生自主学习的需要,又要确保达到网络高等教育的基本要求,为高等教育大众化服务。

按照教改立项的要求,网络教育纸介教材的编著者应有丰富的教学经验,在本学科有较厚的基础,了解本门课程发展动态,有较高的学术水平,有较好的文字功底,并且优先选聘本课程网络课件的主讲教师担任编写工作。

现在,经过不断的努力,现代远程教育系列教材将陆续出版问世,特向各位编著者及审稿专家表示感谢,同时敬请社会各界同行对不足之处给予批评指正。

大连理工大学网络教育学院

2008年12月

前 言

本书按照教育部关于网络教育要“积极发展,规范管理,强化服务,提高质量,改革创新”的指导方针,遵照大连理工大学网络教育学院《关于加强现代远程教育文字教材建设的意见》而编写的。其中的基本要求是:

(1)网络教育文字教材必须以网络课件的教学大纲为基础编写,并努力凸显远程教育的特色,为培养应用型人才服务。

(2)网络教育文字教材的内容取舍、理论深度、文字处理,既要力求适合大多数网络教育学生的接受能力,适应网络教育学生自主学习的需要,又要确保达到网络高等教育的基本要求,为高等教育大众化服务。

在对成人教育和网络教育多年的教学实践经验和教学改革基础上,结合上述基本要求,编写了理工科数学类系列规划教材《应用统计》。与同类教材相比,本书具有以下特色:

(1)在注意保持数学学科本身的科学性、系统性、严谨性的同时,力求做到由浅入深、深入浅出、叙述详细、通俗易懂、重点突出、简明扼要。既便于教师教学,又便于学生自学。

(2)贯彻问题教学法的基本思想,对许多数学概念,先从提出实际问题入手,再引入数学概念,介绍数学工具,最后解决所提出的问题。使学生了解应用背景,提高学习的积极性。

(3)在例题和习题的选取上,力求做到典型性、应用性和现代性,以期注重对学生学习兴趣的培养,适应网络教育学生自主学习的要求,达到提高学生综合运用数学知识的能力。

(4)详细介绍相应的数学软件,穿插了数学建模的基本思想,引导学生学以致用、学用结合,为学生将来的研究工作和就业奠定基础。

(5)注意吸取当前教材改革中一些成功的改革举措,使得本教材能够更适合远程教育教学的需要,成为适应时代要求、符合改革精神又继承传统优点的教材。

学习本书内容只需微积分和线性代数的相关知识。本书共8章,包括两部分内容,前4章是概率论部分,包括概率论的基本概念、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征;后4章是数理统计部分,包括数理统计基础、参数估计、假设检验、

方差分析与回归分析。

本书适用于成人教育、网络教育的理工科学生,同时也可供高等院校理工科各专业师生使用。

本书在编写过程中得到了大连理工大学教务处、大连理工大学网络教育学院的大力支持,在此表示衷心的感谢,同时向本书的主审冯敬海教授表示感谢。

限于编者的水平,书中难免有不足之处,诚恳希望广大读者与同行提出宝贵意见。

编 者

2012 年 1 月

目 录

第 1 章 随机事件与概率	1
1.1 随机试验、随机事件及样本空间	1
1.1.1 随机现象与统计规律性	1
1.1.2 随机试验	2
1.1.3 样本点和样本空间	2
1.1.4 随机事件、基本事件、必然事件和不可能事件	3
1.1.5 事件的关系及运算	3
习题 1.1	6
1.2 事件的频率与概率	8
1.2.1 概率的统计定义	8
1.2.2 概率的古典定义	10
1.2.3 概率的几何定义	16
1.2.4 概率的公理化定义和性质	20
习题 1.2	22
1.3 条件概率	23
1.3.1 条件概率的定义及性质	23
1.3.2 概率乘法公式	25
1.3.3 全概率公式与贝叶斯公式	27
习题 1.3	30
1.4 事件的独立性	31
1.4.1 两事件的独立性	31
1.4.2 多个事件的独立性	32
习题 1.4	35
第 2 章 随机变量及其分布	37
2.1 随机变量及其分布函数	37
2.1.1 随机变量的定义	37
2.1.2 随机变量的分布函数	38
习题 2.1	41
2.2 离散型随机变量及其分布	42
2.2.1 离散型随机变量及其分布	42
2.2.2 三种重要离散型随机变量的分布	44
习题 2.2	48

2.3 连续型随机变量及其分布	49
2.3.1 连续型随机变量及其概率密度	49
2.3.2 三种重要的连续型随机变量	52
习题 2.3	59
2.4 随机变量函数的分布	61
2.4.1 离散型随机变量函数的分布	61
2.4.2 连续型随机变量函数的分布	62
习题 2.4	65
第3章 多维随机变量及其分布	67
3.1 多维随机变量及其分布	67
3.1.1 二维随机变量及其分布函数	67
3.1.2 二维离散型随机变量及其分布律	68
3.1.3 二维连续型随机变量及其概率密度	71
习题 3.1	74
3.2 边缘分布	75
3.2.1 边缘分布函数	75
3.2.2 边缘分布律	76
3.2.3 边缘概率密度	78
习题 3.2	80
3.3 条件分布	81
3.3.1 条件分布函数	81
3.3.2 离散型随机变量的条件分布律	83
3.3.3 连续型随机变量的条件概率密度	84
习题 3.3	86
3.4 随机变量的独立性	87
3.4.1 二维离散型随机变量的相互独立性	87
3.4.2 二维连续型随机变量的独立性	90
习题 3.4	92
3.5 两个随机变量的函数的分布	93
3.5.1 两个离散型随机变量的函数的分布	93
3.5.2 二维连续型随机变量的函数的分布	94
习题 3.5	100
第4章 随机变量的数字特征	102
4.1 随机变量的数学期望	102
4.1.1 离散型随机变量的数学期望	102
4.1.2 连续型随机变量的数学期望	105
4.1.3 随机变量函数的数学期望	107
4.1.4 数学期望的性质	110
习题 4.1	112

4.2 随机变量的方差	113
4.2.1 方差的实际意义和定义	113
4.2.2 几种重要分布的方差	115
4.2.3 方差的性质	118
习题 4.2	119
4.3 协方差与相关系数	120
4.3.1 协方差与相关系数的定义	121
4.3.2 协方差的性质	122
4.3.3 相关系数的性质及意义	124
* 4.3.2 矩与协方差矩阵	127
习题 4.3	128
4.4 大数定律和中心极限定理简介	129
4.4.1 大数定律	129
4.4.2 中心极限定理	133
习题 4.4	136
第 5 章 数理统计的基础知识	138
5.1 总体、样本及统计量	138
5.1.1 总体和样本	138
5.1.2 统计量	140
5.1.3 常用的统计量	141
习题 5.1	143
5.2 常用的统计分布与分位点	144
5.2.1 三个常用的统计分布	144
5.2.2 四种常见分布的上 α 分位点	147
习题 5.2	150
5.3 抽样分布定理	150
习题 5.3	154
第 6 章 参数估计	155
6.1 参数的点估计	155
6.1.1 矩估计法	155
6.1.2 最大似然估计法	158
习题 6.1	162
6.2 估计量的评选标准	162
6.2.1 无偏性	163
6.2.2 有效性	164
6.2.3 一致性	165
习题 6.2	165
6.3 区间估计	166
6.3.1 单个正态总体参数的区间估计	167

6.3.2 两个正态总体参数的区间估计	171
6.3.3 单侧置信区间	174
习题 6.3	175
第 7 章 假设检验	177
7.1 假设检验的基本概念	177
7.1.1 问题的提出	177
7.1.2 假设检验的基本思想	178
7.1.3 假设检验的基本步骤	179
7.1.4 假设检验可能犯的两类错误	179
习题 7.1	180
7.2 单个正态总体参数的假设检验	180
7.2.1 单个正态总体均值 μ 的假设检验	181
7.2.2 单个正态总体方差 σ^2 的假设检验	184
习题 7.2	185
7.3 两个正态总体参数的假设检验	186
7.3.1 关于两个正态总体均值的检验	187
7.3.2 关于两个正态总体方差的检验	191
习题 7.3	194
第 8 章 方差分析与回归分析	196
8.1 单因素方差分析	196
8.1.1 问题的提出	196
8.1.2 单因素方差分析模型	197
8.1.3 平方和的分解	198
8.1.4 F 检验	199
习题 8.1	203
8.2 双因素方差分析	204
8.2.1 无重复试验的双因素方差分析	204
8.2.2 等重复试验的双因素方差分析	208
习题 8.2	212
8.3 一元线性回归	212
8.3.1 引 例	213
8.3.2 一元线性回归模型	213
8.3.3 参数 a, b 的最小二乘估计	214
8.3.4 回归方程的显著性检验	216
习题 8.3	218
附 录	219
附录 1	219
附录 2	235

第 1 章 随机事件与概率

第 1 章是本课程最基础的部分. 本章我们介绍概率论与数理统计中用到的基本概念和术语: 随机事件之间的关系与运算、概率的定义及其运算法则、条件概率及与条件概率有关的三个重要公式、事件的独立性, 再介绍应用非常广泛的两类概率问题: 等可能概型与 n 重伯努利(Bernoulli) 概型.

1.1 随机试验、随机事件及样本空间

1.1.1 随机现象与统计规律性

当我们对自然界和社会实践活动进行考察时, 会遇到两类不同性质的现象. 其中一类是在一定的条件之下, 完全可以预言什么结果一定出现, 什么结果一定不出现, 这类现象称为**确定现象**(或**必然现象**); 另一类是在一定的条件之下, 可能出现这样的结果, 也可能出现那样的结果, 并且在每次观察之前不能准确预料其是否出现, 这类现象称为**随机现象**(或**偶然现象**).

确定现象的例子非常多. 例如, 在标准大气压下, 液态水的温度超过 100°C 时就会汽化; 竖直向上抛一重物, 由于地心引力的作用, 重物上升到一定高度后必定会落下来; 在没有任何外力作用的条件下, 物体必定保持其原有的静止或匀速运动状态; 带异性电荷的小球必然相互吸引等, 都是确定现象.

随机现象也是广泛存在的. 例如, 在基本条件相同的前提下抛同一枚硬币, 结果可能是正面朝上, 也可能是反面朝上, 在硬币落地之前不能预知究竟哪一面朝上; 用同一测量工具测量同一物体的长度, 每次测量的结果会有一定的差异, 在测量结果出来之前不能预知确切的测量值; 用同一门火炮向同一目标进行射击, 各次弹落点不尽相同, 在一枚炮弹落地前不能预知确切的落点等, 都是随机现象.

由于随机现象具有多种可能的结果, 而且事先不知道究竟会出现哪一种结果, 因此随机现象似乎是难以捉摸的. 但是, 进一步更仔细地观察和研究, 你又会发现, 这些无法准确预料的现象, 它们并非是杂乱无章的, 而是存在某种宏观的规律. 也就是说, 当我们在相同的条件下多次重复某一个试验时, 其各种结果会呈现出某种固有规律性. 随机现象在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性, 称为**随机现象的统计规律性**. 以抛一枚均匀硬币为例, 历史上多位数学家做过抛硬币的试验. 发现随着抛掷次数的增多, 正面朝上的次数 n_1 与抛掷次数 n 的比值 $\frac{n_1}{n}$ (称为**频率**) 越来越接近 $\frac{1}{2}$.

随机现象的统计规律是客观存在的. 数学家和统计学家通过对各种随机现象进行深

人研究,取得了极其丰富的重要成果.概率论与数理统计就是用以研究随机现象统计规律性的一门学科,它不仅是近代数学的重要组成部分,而且在自然科学、社会科学、工程技术乃至人们的日常生活中都有着广泛而重要的作用.

1.1.2 随机试验

在概率论中,我们把对随机现象进行的试验或观察统称为**随机试验**,简称**试验**,用字母 E 表示.下面举一些随机试验的例子.

E_1 : 掷一枚硬币,观察正面 H 、反面 T 出现的情况.

E_2 : 掷一颗骰子,观察出现的点数.

E_3 : 记录某城市 120 急救电话台一昼夜接到的呼唤次数.

E_4 : 从一批电脑中任取一台,观察它无故障运行的时间.

E_5 : 在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命.

E_6 : 记录某地区一昼夜的最高温度和最低温度.

上面列举了六个随机试验的例子,它们有着共同的特点.例如,试验 E_1 有两种可能的结果,出现 H 或者出现 T ,但在抛掷之前不能确定出现 H 还是出现 T ,这个试验可以在相同的条件下重复地进行.又如试验 E_5 ,我们知道灯泡的寿命(以小时计) $t \geq 0$,但在测试之前不能确定它的寿命有多长,这一试验也可以在相同的条件下重复地进行.概括起来,随机试验具有以下的特点:

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行,即**重复性**.

(2) 每次试验结果具有多种可能性,但是在试验之前可以明确所有可能出现的基本结果,即**明确性**.

(3) 在一次试验中,某种结果出现与否是不确定的,在试验之前不能准确地预言该次试验会出现哪一种结果,即**随机性**.

1.1.3 样本点和样本空间

为了用现代数学方法描述和研究随机现象,奥地利数学家米译斯(Richard Von Mises)于 1928 年引进了样本空间的概念.

定义 随机试验 E 的每一个可能的结果,称为 E 的**样本点**,记作 $\omega_1, \omega_2, \dots$. 随机试验 E 的所有样本点组成的集合,称为 E 的**样本空间**,记作 Ω ,即

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}.$$

【例 1】 在随机试验中, E 表示“抛一枚硬币观察其朝上的面”,可能出现的结果是正面或反面,样本空间 $\Omega = \{\text{正}, \text{反}\}$.

【例 2】 设随机试验 E 为“掷一颗骰子,观察出现的点数”,样本空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

【例 3】 E : “观察一只灯泡的使用寿命”,可能出现的结果是任一非负整数,样本空间 $\Omega = \{t | t \geq 0\}$.

【例 4】 设随机试验 E 为“观测某市每日的最高气温和最低气温”,以 x, y 分别表示某日的最高气温和最低气温,人们总可以确定此地气温的上界 T_2 和下界 T_1 ,可能出现的

结果(即样本空间)是坐标平面中的三角形区域: $\Omega=\{(x,y)|T_1\leq y\leq x\leq T_2\}$.

不难看出,样本空间 Ω 可以是数集,也可以是任何抽象的集合;可以是有限集,也可以是无穷集合;可以是一维的集合,也可以是多维的集合.我们指出,正确地确定不同随机试验的样本点与样本空间是极为重要的.

1.1.4 随机事件、基本事件、必然事件和不可能事件

对随机试验 E ,在一次试验中可能出现也可能不出现的事件,即样本空间 Ω 的任意一个子集,称为 E 的**随机事件**,简称**事件**,常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示.

如果事件中只包含一个样本点,则称该事件为**基本事件**.

做试验 E 时,若试验结果属于 A ,则称事件 A 发生,否则称事件 A 不发生.

【例5】 掷一颗骰子,随机试验的样本空间 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 指出下述集合表示什么事件? 并指出哪些是基本事件.

事件 $A=\{1, 3, 5\}$;事件 $B=\{4, 5, 6\}$;事件 $C=\{3\}$.

解 事件 $A=\{1, 3, 5\}$ 表示“出现奇数点”,是非基本事件;

事件 $B=\{4, 5, 6\}$ 表示“出现点数不小于4点”,是非基本事件;

事件 $C=\{3\}$ 表示“出现3点”,是基本事件.

由于样本空间 Ω 包含了试验的全部可能结果,且其也是自身的子集,故在每次试验中 Ω 一定发生,因此,称 Ω 为**必然事件**.

例如,例5中,事件“出现的点数小于7点”是必然事件.

空集 $\emptyset$ 不包含任何样本点,但它也是样本空间 Ω 的一个子集,由于它在每次试验中肯定不发生,所以称 $\emptyset$ 为**不可能事件**.

例如,例5中,事件“出现的点数大于6点”就是不可能事件.

1.1.5 事件的关系及运算

事件是一个集合,因而事件的关系和事件的运算自然可按照集合论中集合之间的关系和集合运算来处理.

设试验 E 的样本空间为 Ω ,而 $A, B, A_n (n=1, 2, \dots)$ 是 E 的事件.

1. 事件之间的关系

(1) 事件的包含与相等

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,即 A 为 B 的子集,则称**事件 B 包含事件 A** ,记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$. 显然,对于任何事件 A ,有

$$\emptyset\subset A\subset\Omega.$$

如果事件 B 包含事件 A ,而且事件 A 也包含事件 B ,则称**事件 A 与事件 B 相等**,记作 $A=B$.

【例6】 在掷一颗骰子的随机试验 E 中,令事件 A 表示“掷得的点数不超过2点”,则 $A=\{1, 2\}$;令事件 B 表示“掷得的点数不超过3点”,则 $B=\{1, 2, 3\}$. 显然,有 $A\subset B$.

【例7】 在例6的试验中,令 A 表示“掷得偶数点”,则 $A=\{2, 4, 6\}$; B 表示“掷得的点数可被2整除”,则 $B=\{2, 4, 6\}$. 显然有 $A=B$.

(2) 事件的和(并)

设 A 与 B 为两个事件, 称事件“ A, B 中至少有一个发生”(“ A 发生或者 B 发生”)为事件 A 与事件 B 的和(并), 记作 $A \cup B$ 或 $A + B$.

n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和事件表示为 $\bigcup_{i=1}^n A_i$, 其含义就是事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个发生.

【例 8】 袋中有 5 个白球和 3 个黑球, 从其中任取 3 个球. 令 A 表示“取出的全是白球”, B 表示“取出的全是黑球”, C 表示“取出的球颜色相同”, 则 $C = A \cup B$.

若令 $A_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 表示“取出的 5 个球中恰有 i 个白球”, D 表示“取出的 5 个球中至少有一个白球”, 则 $D = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$.

(3) 事件的积(交)

设 A 与 B 为两个事件, 称事件“ A, B 同时发生”(“ A 发生而且 B 发生”)为事件 A 与事件 B 的积(交), 记作 $A \cap B$ 或 AB .

n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的积事件表示为 $\bigcap_{i=1}^n A_i$, 其含义就是事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时发生.

【例 9】 在掷一颗骰子的随机试验中, 令 A 表示“出现的点数小于 5 点”, B 表示“出现偶数点”, 则 $A \cap B = \{2, 4\}$.

(4) 事件的差

设 A 与 B 为两个事件, 称事件“ A 发生而 B 不发生”为事件 A 与事件 B 的差, 记作 $A - B$.

【例 10】 在记录某无线电公司在上午 9:00~11:00 接到的寻呼次数试验中, 令 A 表示“寻呼次数不超过 20 次”, 则 $A = \{0, 1, 2, \dots, 20\}$; B 表示“寻呼次数超过 10 次”, 则 $B = \{11, 12, 13, \dots\}$; C 表示“寻呼次数不超过 10 次”, 则 $C = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$, 显然 $C = A - B$.

(5) 互不相容事件

如果事件 A 与 B 不可能同时出现, 即 $AB = \emptyset$, 则称事件 A 与事件 B 互不相容(或称事件 A 与事件 B 互斥).

类似地, 称 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 互不相容, 则它们中的任何两个事件 A_i 与 $A_j (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n)$ 都互不相容.

【例 11】 在观察电视机寿命的试验中, 令 A 表示“寿命小于一万小时”, B 表示“寿命大于一万小时”, 则事件 A 与事件 B 是两个互不相容的事件, 因为它们不可能同时发生.

(6) 对立事件

设 A 为一事件, 称事件“ A 不发生”为 A 的对立事件(或余事件), 记作 $\bar{A}$.

显然, $\bar{\bar{A}} = A$, 因而称 A 与 $\bar{A}$ 互为对立事件或者相互对立. 实际上, 如果两个事件 A, B 满足

$$A \cup B = \Omega \text{ 且 } A \cap B = \emptyset,$$

则 $A = \bar{B}, B = \bar{A}$, A, B 互为对立事件. 也就是说, 在一次试验中, A, B 必有一个发生而且只发生一个, 则 A, B 互为对立事件.

【例 12】 在例 11 中,令 A 表示“任取一台电视机寿命不超过一万小时”; B 表示“任取一台电视机寿命大于一万小时”,则事件 A 与事件 B 互为对立事件.

值得注意的是,若 A, B 互为对立事件,则 A, B 互不相容,但反过来是不成立的,即 A, B 互不相容,未必有 A, B 相互对立.这是因为若 $A \cap B = \emptyset$,但未必有 $A \cup B = \Omega$,所以 A, B 不一定是相互对立的.

【例 13】 在掷一颗骰子观察出现点数的试验中,令事件 A 表示“掷得的点数为 1 点和 2 点”;事件 B 表示“掷得的点数为 3 点和 4 点”,则 $A \cap B = \emptyset$,但 $B \neq \bar{A}$.

维恩(John Venn)图(图 1-1)能更直观地将事件间的关系表示出来,用一矩形表示样本空间 Ω ,矩形内的点表示样本点,矩形区域内的子集 A, B 表示事件 A, B .

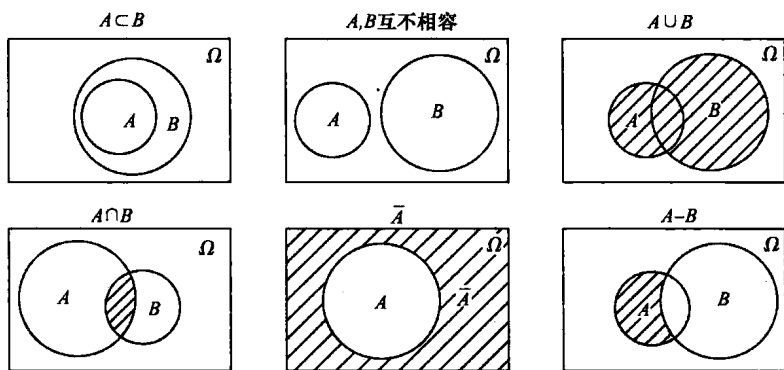


图 1-1

2. 事件的运算律

(1) 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

(2) 结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

(3) 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

(4) 德·摩根(De Morgan)律(或对偶原理):

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B},$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

德·摩根律可以推广到有限个的情形,即有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i.$$

【例 14】 证明 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

证明 $\forall \omega \in \overline{A \cup B}$, 有 $\omega \in \Omega - (A \cup B)$, 即 $\omega \in \Omega - A$ 且 $\omega \in \Omega - B$, 所以 $\omega \in \bar{A}$ 且 $\omega \in \bar{B}$, 即 $\omega \in \bar{A} \cap \bar{B}$, 亦即

$$\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}.$$

反之, $\forall \omega \in \bar{A} \cap \bar{B}$, 有 $\omega \in \bar{A}$ 且 $\omega \in \bar{B}$, 即

$$\omega \in \Omega - A \text{ 且 } \omega \in \Omega - B,$$

于是, $\omega \in \Omega - (A \cup B)$, 即 $\omega \in \overline{A \cup B}$, 所以

$$\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

因此

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

【例 15】 小杨下班后开车回家,途经 4 个交通信号灯. A_i 表示第 i 个路口遇到红灯 ($i=1,2,3,4$),试用 A_i 表示下列事件:

- (1) 一路绿灯;
- (2) 只遇到一次红灯;
- (3) 至少遇到一次红灯;
- (4) 至少遇到 3 次红灯;
- (5) 至多遇到 3 次红灯.

解 (1) $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$;

(2) $A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} + \overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} + \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cap \overline{A_4} + \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap A_4$;

(3) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$;

(4) $\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 + A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cap A_4 + A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap A_4 + A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A_4} + A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$;

(5) $\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \overline{A_4}$.

【例 16】 甲、乙、丙三人各进行一次试验,事件 A_1, A_2, A_3 分别表示甲、乙、丙试验成功,说明下列事件所表示的试验结果:

- (1) $\overline{A_1}$;
- (2) $A_1 \cup A_2$;
- (3) $\overline{A_2 \cap A_3}$;
- (4) $\overline{A_2} \cup \overline{A_3}$;
- (5) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$;
- (6) $A_1 \cap A_2 + A_2 \cap A_3 + A_1 \cap A_3$.

解 $\overline{A_1}$ 表示“甲试验失败”;

$A_1 \cup A_2$ 表示“甲、乙两人中至少有一人试验成功”;

$\overline{A_2 \cap A_3}$ 表示 $\overline{A_2} \cup \overline{A_3}$ 表示“乙、丙两人最多有一人试验成功”,即“乙、丙两人至少有一人试验失败”;

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$ 表示“甲、乙、丙三人都试验成功”;

$A_1 \cap A_2 + A_2 \cap A_3 + A_1 \cap A_3$ 表示“甲、乙、丙三人中至少有两人试验成功”.

习题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间:

- (1) 把一枚硬币连续抛两次;
- (2) 同时掷三颗骰子,记录三颗骰子的点数之和;
- (3) 一学习小组有甲、乙、丙、丁、戊共五个人,要选正、副组长各一人(一个人不得兼两

个职务),记录选择的结果;

(4)甲、乙两人下棋一局,观察下棋的结果;

(5)有 A, B, C 三个盒子, a, b, c 三个球,将三个球放入三个盒子中,使每个盒子放入一个球,观察放球的结果.

2. 掷一颗骰子的试验,观察其出现的点数,事件 A 表示“偶数点”, B 表示“奇数点”, C 表示“点数小于 5 点”, D 表示“点数小于 5 的偶数点”,讨论上述各事件间的关系.

3. 事件 A_i 表示某个生产单位第 i 车间完成生产任务 ($i=1, 2, 3$), B 表示至少有两个车间完成生产任务, C 表示最多只有两个车间完成生产任务. 试说明事件 $\bar{B}$ 及 $B-C$ 的含义,并用 $A_i (i=1, 2, 3)$ 表示出来.

4. 设 A, B, C 为三个随机事件,试用 A, B, C 表示下列事件:

(1)仅 A 发生;

(2) A, B 都发生而 C 不发生;

(3) A, B 至少一个发生而 C 不发生;

(4) A, B, C 中至少有两个发生;

(5) A, B, C 中恰有两个发生;

(6) A, B, C 中至少有一个发生.

5. 从某图书馆里任意选取一本书,事件 A 表示“取到数学类图书”, B 表示“取到中文版图书”, C 表示“取到平装图书”.

(1)说明事件 $AB\bar{C}$ 的实际含义;

(2) $C \subset B$ 成立意味着什么?

(3) $\bar{A}=B$ 是否意味着馆中的数学类图书都不是中文版的?

6. 写出如下各试验的样本空间及指定事件所含样本点.

(1)将一枚硬币抛三次, $A=\{\text{第一次为正面}\}$, $B=\{\text{三次出现同一面}\}$, $C=\{\text{有正面}\}$;

(2)将一枚骰子掷两次, $A=\{\text{点数相同}\}$, $B=\{\text{其中一枚点数是另一枚的两倍}\}$, $C=\{\text{点数之和为 6}\}$;

(3)将一红球与一黑球任意放入编号为 1, 2, 3 的三个盒子中, $A=\{\text{1 号盒不空}\}$, $B=\{\text{1 号盒与 2 号盒各一球}\}$, $C=\{\text{每盒至多一球}\}$.

7. 指出下列关系中哪些成立,哪些不成立?

(1) $A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup B$;

(2) $\bar{A} \cap B = A \cup B$;

(3) $\bar{A} \cup \bar{B} \cap C = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$;

(4) $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset$.

8. 下列命题哪些成立,哪些不成立?

(1)若 $A \subset B$, 则 $A = A \cap B$;

(2)若 $A \subset B$, 则 $\bar{B} \subset \bar{A}$;

(3)若 $A \subset B = \emptyset$ 且 $C \subset A$, 则 $C \cap B = \emptyset$;

(4)若 $B \subset A$, 则 $A \cup B = A$.