轴测投影学

〔苏〕E. A. 格拉祖诺夫　H. Ф. 切特维鲁新 著

徐良佐　李汉卿 译

人民教育出版社

轴　测　投　影　学

E. A. 格拉祖诺夫
H. Ф. 切特维鲁新 著
徐良佐　李汉卿 译

人民教育出版社

重 印 说 明

本书系根据苏联国立技术理论书籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的格拉祖诺夫（Е. А. Глазунов）和切特维鲁新(Н. Ф. Четверухин）所著“轴测投影学”（Аксонометрия）1953年版译出，于1956年出版，由徐良佐和李汉卿翻译，并经武汉水利学院画法几何教研组校阅。今应工科制图教材编审委员会要求，重印本书，以满足教学需要。

本书以仿射变换以及图的完整性的理论为轴测投影的基础。全书分二篇，第一篇主要讨论轴测理论问题，第二篇介绍作图方法及其在工程技术问题上的应用。

本书可供高等学校工科各专业师生参考，也可供其他有关人员参考。

轴测投影学

Е. А. 格拉祖诺夫 著
Н. Ф. 切特维鲁新

徐良佐 李汉卿 译

*

人民教育出版社出版

四川省新华书店重庆发行所发行

重庆新华印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 15 字数 340,000

1956年12月第1版 1981年7月第3次印刷

印数 9,701—14,300

书号 15012·0314 定价 1.30元

目　錄

序

近年來，軸測圖在科学上、技術上和工業上的用途日益廣泛。这是由于軸測的方法能够成功地使一幅圖富有立体感，而同时又使它有优良的可量度性，可以用來精确地定出被描繪的物体的尺寸。

因此，相当全面地來闡明軸測投影学的基本理論以及軸測方法的实际应用，就成为值得重視而適当的工作了。

必須指出，在解决軸測投影学理論和实踐的問題方面，俄國和苏联的科学家和工程技術人員曾經有过重大的貢献。不过，其中用俄語所寫的画法几何学課本中只用个别的章節來研討軸測投影。

俄國画法几何学方面的优秀活动家們〔庫尔玖莫夫（Курдюмов）雷寧（Рынин）波波夫（Попов）等等〕所作关于軸測投影的論文，已經不能够反映这門学科的近况和它当前的問題了。因此，我們認为寫一下我們苏联及國外对平行軸測投影方面的主要成就是很適时的。

本書包括兩篇。第一篇是 Н. Ф. 切特維魯新所撰述的，主要是討論軸測投影学的理論問題及其中尙待解决的問題。这一篇分为下列各章：

一、平行投影及仿射对应。

二、投影圖的軸測化問題。

三、多維(測)軸測投影。

四、平行軸測投影的特性。

第二篇由 Е. А. 格拉祖諾夫所寫，介紹一些軸測圖的作圖方法幷說明这些方法对一些实例的应用。这一篇包括下列各章：

五、軸測投影中基本几何問題的解决方法。

六、变換軸測投影的方法。

七、多面体的軸測投影。

八、曲綫的軸測投影。

九、曲面的軸測投影。

十、軸測投影法在工程技術問題上的应用。

本書專供高等学校中画法几何及工程画教研組的教师、研究生以及学生的科学研究小組之用。幷適用于企業部門和設計局的工程技術工作人員。

作者应向雷日科夫（В. В. Рыжков），别斯金（Н. М. Бескин）及涅夫斯基（Б. А. Невский）致以衷心的感謝。他們曾为本書提供过許多宝貴的意見和指示。

Е. А. 格拉祖諾夫

Н. Ф. 切特維魯新

第一篇　軸測投影的一般性質

第一章　平行投影及仿射对应

§1. 在普通空間中（欧几里德空間中）的射影过程。以虛元素增补欧几里德空間

廣泛应用在科学上、工程上和日常生活中的投影圖就是用投影法作出的。

投影法概述如下。假設，要把某一个圖形，例如三角形 ABC，射影在投影平面 Π' 上。先取不在平面 Π' 上的任意点 S 作为射影中心，再从这射影中心引直綫至被描繪的圖形上各点。如圖 1 中的直綫 SA, SB, SC。这些直綫就称为射影直綫或射影光綫。其次求出这些射影直綫与投影面 Π' 的交点。这样，譬如要作出 C 点的投影，我們就求出射影綫 SC 与平面 Π' 的交点 C'。点 C' 就叫做点 C 的中心投影。点 C 叫做原形或眞形（眞正圖形）。从中心 S 把某一个几何圖形上各点射影到平面 Π' 上，就得到它的投影或圖像。

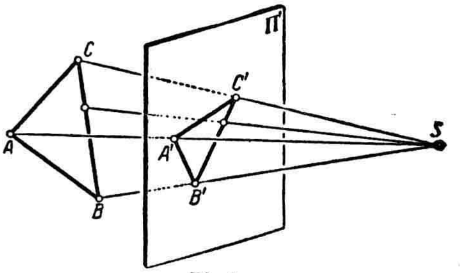

圖 1.

这样，譬如在圖 1 中。圖形 $A'B'C'$ 卽是眞正圖形 ABC 的中心投影。侭管原形可能是空間的三元形体，但它在平面 Π' 上的投影始終是平面圖形。

从上所述，可見中心投影法应具有原形(ABC)，射影中心(S)和投影平面(Π')。原形上每一个点都有一根对应的射影直綫或射影光綫。不难看出，对应于眞正直綫(例如直綫 AB)上任何一点的全部射影光綫都在同一个平面之內，該平面卽称为射影平面。因此，每条眞正直綫都有一个对应的射影平面。所有射影直綫及射影平面就組成以 S 点为中心的綫面束(或者簡称束 S)。

讓我們看看位于平面 Π 上的，亦卽位于眞正三角形 ABC 平面上的許多点和直綫(圖 2)。这許多点和直綫我們將称为在平面 Π 上的点綫場，或簡称之为場 Π。場 Π 的每点(A, B, C, ……)对应于束 S 中的一根射影直綫(a, b, c, ……)，場 Π 的每直綫(AB, BC, CA, ……)对应于束 S 中的一个射影平面(SAB, SBC, SCA, ……)。这样一來，射影的过程就在場 Π 的元素与束 S 的元素之間建立起对应的关系。必須指出，上述的对应仍保持元素間的从屬性質。假如場 Π 中一点(A)是在直綫(AB)上，則束 S 中射影直綫(SA)就在射影平面(SAB)內。

但是更仔細地分析一下束和場的元素之間的对应关系，立刻就發現內中还有些毛病：这

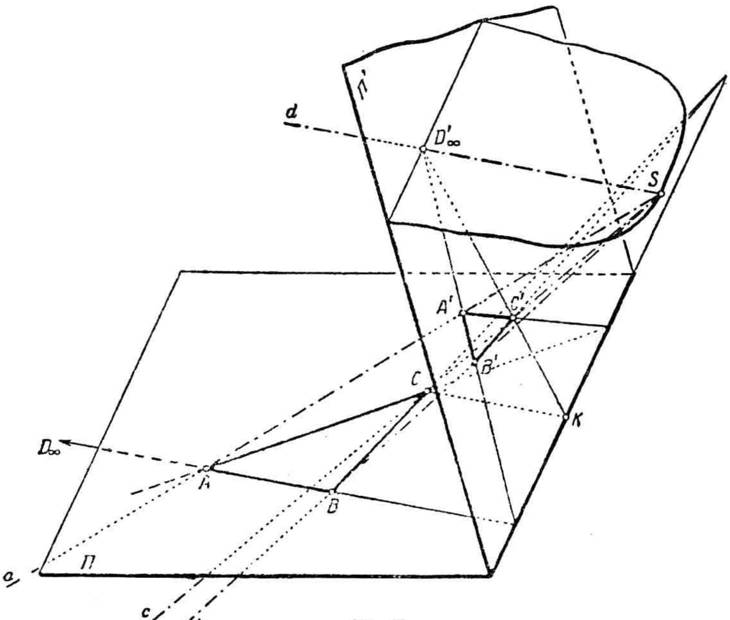

圖 2.

对应关系不是互相等价的。確切地說來，場的各个点对应于束的定直綫。但反过來說就不一定能成立。例如过中心点 S 引直綫 d，使平行于場 Π 上的直綫 AB，則直綫 d 就平行于平面 Π 的本身，因而，直綫 d 并非場 Π 上任何一点的射影直綫。

为了消除这一个毛病，我們同样地認为直綫 d 是与平面 Π 相交于一个点 D_∞，而直綫 d 就是点 D_∞ 的射影直綫。这一点 D_∞ 我們將称之为虛点或無窮远点，以別于平面 Π 上普通的或眞正的点。于是射影直綫 d 可以說是位于射影平面 SAB 上。这就使我們得到了把虛点 D_∞ 当作是直綫 AB 上的点的根据。这样一來，平面 Π 上的各直綫都被各虛点所增补。射影直綫 d 与平面 Π' 的交点 D'_∞ 就是虛点在平面 Π' 上的投影。

其次，自然要考慮到平面 Π 上各虛点的总合这个問題。由于把平面 Π 上各直綫的虛点射影至 Π' 上的那些射影直綫是平行于平面 Π 上各直綫的，因而也就平行于 Π 平面本身，故此所有这些直綫都在一个平面上，該平面通过射影中心 S 并平行于平面 Π。这个射影平面以可看作是把平面 Π 上各虛点射影到 Π' 上的那些射影直綫的軌跡。由于束 S 的每个平面对应于平面 Π 上的一根直綫，而該直綫卽各該平面在 Π 面上的跡綫，因此可得下面的結論：1) 最好把虛点的軌跡当作是 Π 平面上的一根直綫。2)兩平行的平面相交于一虛直綫。

我們做出所有这些結論，是想使点綫場(Π)与綫面束(S)之間能保持互相等价的对应。

从上所述，又可引出下面一些結論。

所有上述关于一直綫或一平面的說明，应推廣到空間的直綫及平面。因此，我們应該認定空間的每兩条平行直綫相交于一个虛点。在空間中各平行直綫的总合，構成一个以虛点为中心的直綫束。

同样，每兩个平行平面相交于一条虛直綫，相互平行的平面，总合起來構成一个有虛軸的平面簇。

最后，可以提出一个关于各虛点和各虛直綫的总合的問題。假如我們注意到每条直綫都与那个“虛軌跡”有一个交点，而每个平面都与那个“虛軌跡”有一条直綫的交綫，那么就得出一个結論，卽上面提及的“虛軌跡”应該解釋为虛平面。

現在，以虛元素增补欧几里德空間的作法是完成了。用这个方法我們就得出一个空間，

在这空間中射影过程可以毫無例外地被完成。这个空間的性質在射影几何教程中要詳細去研究的①。

我們在这里应当着重指出，在这样的空間中所有元素——眞正的元素与虛元素——对于相互从屬的性質來說是完全一致的。由于这个关于从屬性質的基本原理，就得出較为普遍的公式。例如这样的定語："每兩个不同的平面有一条公有的直綫"和"一平面和不在該平面上的一直綫有一个公共点"都是正确的（这些定語却不能用于欧几里德空間中）。但是欧几里德几何的量度概念②不適用于虛元素。

可以指出，中心投影法在以上所作出的空間中可以完全实現，幷使原場 Π 和投影場 Π′ 之間建立起相互等价的对应，这对我們是特別重要的（参看圖 2）。

此外，平行投影法可以看作是中心投影法的特殊情形，而以虛点为其射影中心。

§2. 德沙格(Дезарг)定理。透視共綫对应。在同一平面上兩場的調和对应

回來看前節所述中心投影的射影过程。假使从中心 S 把原平面 Π 射影至投影平面 Π′ 上（圖 2）。那么，正如前節所已經証明的，每个原点 A 对应于投影平面上的一点 A'。反过來說也可以，卽在平面 Π′ 上的每一个投影 C' 对应于它在平面 Π 上的原点 C。这样一來，射影的过程就使原平面場 Π 和投影平面場 Π′ 之間建立起互相等价的对应。在这样的对应中一場上的每个圖形可看作是点的軌跡，幷且对应于另一場上的某个圖形。

我們可以看出，在第一个場上是一条直綫，在第二場上所对应的同样是一条直綫。在一条直綫上的一些点所对应的同样是另一直綫上的一些点时，这样的互相等价的对应称为共綫对应，而在元素之間建立起共綫对应的兩个場，Π 和 Π′，称为共綫場。假如有这样的共綫对应，卽兩个共綫場上的对应点都在相交于投影中心 S 的一些射影直綫上，像在中心投影时的情形，則場 Π 和 Π′ 的对应关系称为透視共綫对应（圖 3），而这兩个場称为在透視位置的場。

必須指出，原平面 Π 与投影平面 Π′ 的交綫 p 是透視共綫中的特殊直綫。事实上，交綫 p 上的每个点 A_0 都是双重点，因为，如果把点 A_0 看作是屬于場 Π 的点，我們就可以看出，A_0 的投影重合于 A_0。

因此，直綫 p 是透視共綫对应中的双重綫（直綫的投影重合于直綫本身）同时直綫 p 上各点都是双重点。这样的直綫 p 也称为透視共綫軸。

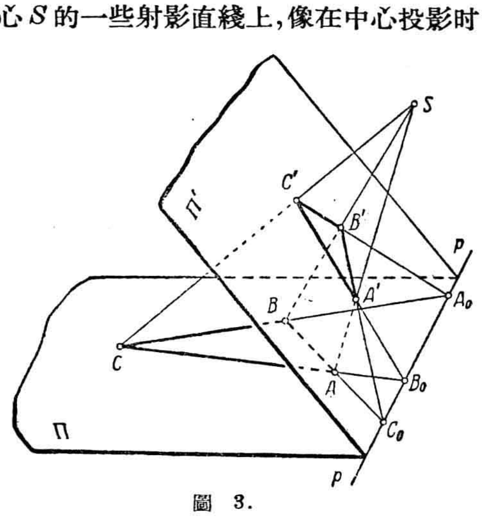

圖 3.

試看兩个透視共綫的对应圖形，三角形 ABC

① 参閱例如格拉哥列夫（Н. А. Глаголев）[6]，切特維晋新（Н. Ф. Четверухина）[25] 的書。
譯者按：姓名右上角所附 [ ] 符号內的数字，是指書末参考書目中的編号。

② 亦卽联系到長度、角度及面積的量度。

和 $A'B'C'$ (圖 3)，这就是說每对对应頂点——A 和 A'，B 和 B'，C 和 C'——都分别在三条匯交于投影中心 S 的射影直綫上。同时，三角形的对应边，例如 AB 和 $A'B'$，是在同一个射影平面 SAB 上，这个射影平面与透視共綫軸 p 相交于一点 C_0。由此可以作出結論：直綫 AB 和 $A'B'$ 通过 C_0 点。三角形另外兩对对应边——BC 和 $B'C'$，CA 和 $C'A'$——也可以作出同样的結論。这样一來，我們可以得出：

$$AB \times A'B' = C_0,\ BC \times B'C' = A_0,\ CA \times C'A' = B_0①。$$

所得的結論包含着射影几何中極重要的定理，卽著名的德沙格定理。这定理可表述如下：

德沙格定理(空間的) 兩三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 在空間中，如果联兩三角形对应頂点的那些直綫相交于同一点 (S)，那么：

1）兩三角形的三对对应边相交于三点 (A_0，B_0 和 C_0)；

2）这三点在同一直綫上(軸 p 上)。

逆定理亦眞。

如果兩三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 在同一个平面上，那么，在这样的情况之下虽然有別于上述形式，但德沙格定理仍然成立，不过現在定理的結論中就不包括第一条，因为兩三角形旣然在同一平面上，三角形的边就一定会相交的。

德沙格定理(平面的) 兩三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 在同一平面上，如果兩三角形对应頂点的联綫相交于同一点 P，則兩三角形三对对应边的三个交点在同一直綫 p 上 ($C_0 = AB \times A'B'$，$A^0 = BC \times B'C'$，$B_0 = CA \times C'A'$) (圖 4)。

逆定理亦眞。請讀者自己画出推証逆定理的圖。平面的德沙格定理的几何証明，要用到立体几何学的作圖法，而特別是这个定理也可以作为空間德沙格定理的推論而導出。至于德沙格定理的証明在任何一本射影几何的課本中都可以找到②。

使平面 Π 繞軸 p 迴轉了某一个角度后 (圖 3)，我們就改变了点場 Π 与点場 Π' 的相对位置。但是可以認为这兩場的对应关系是不变的，依然可以認为点 A'，B'，C' 对应着点 A，B，C。

同时使平面 Π 迴轉之后，兩三角形的每对对应边仍与共綫軸 p 相交于点 C_0，B_0 和 A_0，像未迴轉之前一样。这就使得德沙格的逆定理能应用到平面 Π 迴轉后的三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 中去。按逆定理，联兩三角形对应頂点的直綫 AA'，BB' 和 CC' 应相交于一点。用字母 S^* 表示这一点。这样，平面 Π 迴轉了某一个角度之后，共綫場 Π 和 Π' 同样成为兩个在透視位置的場。透視共綫軸不变 (直綫 p)，而共綫中心現在則变为新的位置 (点 S^*)。

以上所述使我們得出結論，卽代表兩个透視共綫場的兩平面，其中任一平面繞該兩平面交綫(共綫軸)迴轉时，并不破坏兩場的透視共綫对应。

使其中一个平面 (Π 或 Π') 繼續繞交綫迴轉，就可以把这兩个平面重合起來。这时候，

① 这里的“×”号表示相交的过程，而 $AB \times A'B' = C_0$ 的寫法意思是說直綫 AB 和直綫 $A'B'$ 相交于一点 C_0。

② 参閱：例如格拉哥列夫 (Н. А. Глаголев) 著[6] 第 50 頁或切特維魯新 (Н. Ф. Четверухин) 著[25] 第 75 頁。

三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 便在同一个平面中①。同时两三角形的对应边仍相交于直綫 p 上的点C_0, B_0 和 A_0。因此平面的德沙格逆定理就可以適用了。按这定理,兩三角形对应頂点的联綫 AA', BB' 和 CC' 应該通过同一个以字母 P 所表示的一点(圖 4)。由此,可以断定,平面 Π 与平面 Π' 重合时,在这兩平面上的点場的透視共綫对应不受破坏。

在同一个平面上,兩点場之間的透視共綫称为調和对应。調和对应場上,每对对应直綫之交点所在的直綫 p,称为調和对应軸。兩場上对应点联綫的交点 P 称为調和对应中心。

由于現在不可能把三角形 $A'B'C'$ 看作是三角形 ABC 的中心投影了,因此自然就發生了一个問題:如何來确定調和对应?

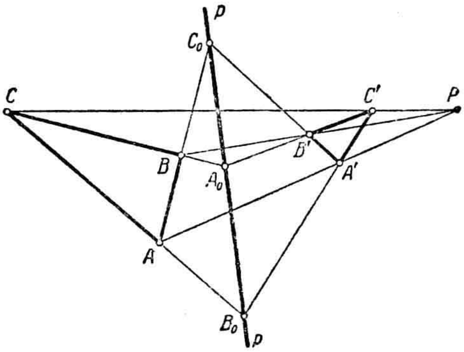

圖 4.

可以确信,若調和对应的中心、軸及一对对应点为已知时,点場的調和对应就可以完全确定。例如,假定在圖 4 中已知調和对应的中心 P,軸 p 和一对对应点 A, A'。这时,我們可以完全确定对应于任意点 B(場 Π)的点 B'(場 Π')。为此可引直綫 AB,使与軸 p 相交于一点 C_0。那么正如以上所述,对应的直綫 $A'B'$ 將通过同一个点 C_0。这样,点 B' 就应該在直綫 C_0A' 上。我們就可以在射影直綫 PB 和直綫 C_0A' 的交点处,求得 B' 点。同样,已知場 Π' 上的点 C',就可以作出場 Π 上的对应点 C。

最后指出,調和对应中心 P 是个双重点,亦卽在調和对应中自相对应的点,而作为射影直綫而通过这个中心 P 的所有直綫都是双重直綫。調和对应軸 p 也是一个双重直綫,并具有同样的性質(亦卽自相对应的)。同时,由于在軸上所有的点都是双重点,这就和射影直綫不同,在每条射影直綫上只有兩个双重点(卽射影直綫与調和对应軸 p 的交点及調和对应中心 P)。

§3. 平行投影。平面場的透視仿射对应(类屬对应)及其特性

当射影中心是个虛点或無窮远点的时候,这样的中心射影具有重大实用价值。設以 S_∞ 來表示射影中心。由于所有射影直綫都匯集于射影中心 S_∞,故所有射影直綫都互相平行。因此,射影本身就叫做平行射影,由于这样射影而作出的圖就叫做平行投影。而把中心点是眞点的中心射影得出的圖称为中心投影。

假設把平面 Π 上的点平行地射影在平面 Π' 上。射影方向以 l 來表示。場 Π 上的每一点对应于投影場 Π' 上的一个定点。这样点場 Π(原場)与 Π'(投影場)之間就建立起对应关系。这个对应关系称为透視仿射对应或称类屬对应。透視仿射对应是透視共綫对应中的特殊情形。所以透視仿射对应具有任何透視共綫对应中的一般性質。而且这样的对应是相互等价的。在这对应中的直綫仍对应于直綫,点和直綫的从屬关系被保存着。此外,平面 Π 和

① 可以指出,平面 Π 和 Π' 的重合,可能用兩种方式來做到。

Π′ 的交綫 p 是双重点的軌跡。直綫 p 称为透視仿射对应軸或称为类屬軸。

但是除这些一般性質之外，类屬对应尚具有某些特性，这就使它与其他透視共綫对应分別开來。这些特性如下：1)一場上的平行直綫，对应于另一場上的平行直綫。2)一場上三点的簡比①，等于另一場上三点的簡比。

这些类屬对应特性中的第一条很容易看得出來，只要我們來看看在平面 Π 上的某兩条平行直綫 a 和 b，并把 a 和 b 沿已知方向 l 射影至平面 Π′ 上（圖 5）。直綫 a 和 b 的射影平面是互相平行的，因为它們含有一对对应地平行的直綫($a \parallel b$; $AA' \parallel BB'$)。投影 a' 和 b' 是这兩个平行平面在平面 Π′ 上的跡綫，因而也互相平行。这样一來，一平面場上兩平行直綫就对应于另一平面場上的兩平行直綫了。

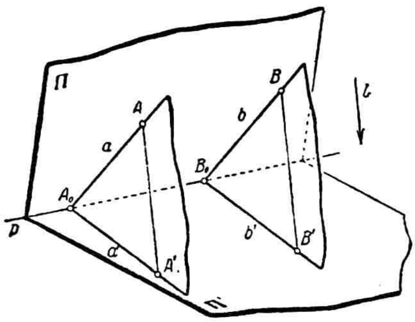

圖 5.

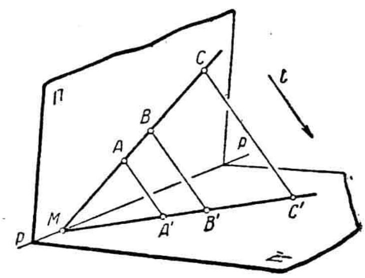

圖 6.

这特性还可以这样推出來：一平面場上的兩直綫如相交于虛点，則与之对应的兩直綫同样相交于虛点。由此，又可得出：一場上的虛直綫对应于另一場上的虛直綫。

由于透視仿射对应中平行性是不变量，于是大大簡化了对应圖形的作法。例如平行四边形就一定对应于平行四边形，而梯形就一定对应于梯形。

試看类屬对应的第二条特性。正如从圖 6 中所見，对应点 A'，B' 和 C' 在同一直綫上，这直綫与直綫 AB 相交于类屬軸 p。因此，在角 CMC' 的兩边上我們得到平行的射影直綫所截得的綫段。所以得出：

$$\frac{A'C'}{B'C'}=\frac{AC}{BC} \text{ 或 } (A'B'C')=(ABC)$$

上列公式也就表明：在类屬对应中三点的簡比是不变量的特性。

綜合这兩个特性，就得一个重要的綫段变形指数的概念，这个变形指数在繪圖理論上有重大的意义。如果我們來研究一下場 Π′ 的某綫段 $A'B'$ 与場 Π 上对应綫段 AB 的比例，就会知道，这个比例（它也称为变形指数）对于場 Π 上所有平行于 AB 的綫段來說，是个常数。实际上，我們假設在場 Π 上有兩个互相平行的綫段 AB 和 CD（圖 7,a）。設在場 Π′ 上的綫段 $A'B' \parallel C'D'$ 与 AB，CD 相对应（圖 7,$б$）。引直綫 BD 和 CF ($CF \parallel DB$)；那么在平面 Π

① 三点 A, B, C 在一直綫上，比例 $\frac{AC}{BC}$ 称为它們的簡比，这个比例通常以 (ABC) 表示。如果点 C 处于 A 和 B 之間，則 (ABC) 是負的。

上就得出平行四边形 $BDCF$。在平面 Π' 上与它对应的是平行四边形 $B'D'C'F'$。由于直綫上三点的簡比在类屬对应中是个不变量，故可寫成：

$$\frac{AB}{CD}=\frac{AB}{FB}=(AFB)=(A'F'B')=$$
$$=\frac{A'B'}{F'B'}=\frac{A'B'}{C'D'},$$

因而
$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'},$$

由此
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{C'D'}{CD}=u\ (\text{常数})。$$

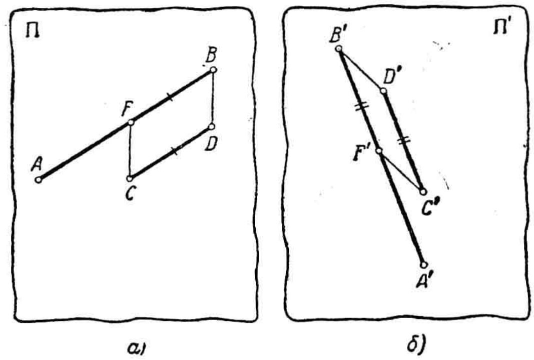

圖 7.

这結論也就証明平行綫段的变形指数是个常数。

附註：我們討論过平面 Π 上的平行綫段，并証明了它們的变形指数是个常数。不难指出，这个特性可以推廣到所有在空間的平行綫段，只要它們是平行地射影在同一个平面 Π' 上。其实，假設已知某兩个平行綫段 AB 和 CD。由于兩平行直綫一定在同一个平面之上，因此对这兩平行綫段來說，也可以采用上述关于在平面 Π 上平行綫段的結論。因此，空間平行綫段的变形指数相等。这样一來，我們就可以說，所有在空間相互平行的綫段的变形指数均相等。

从我們所討論的类屬对应的兩个特性中，可以得出对应的其他一系列特性。例如，其中一个是：

兩个对应点 A 和 A' 至类屬軸 p 的距离之比例是常数值，而与所取的一对对应点無关。

其实，假定在平面 Π 和 Π' 上取兩对对应点：A, A' 和 B, B'（圖 8）。从这些点引垂綫至类屬軸后，以字母 A_0, A'_0 和 B_0, B'_0 代表垂綫的垂足。那么，点 A 和 B 至軸 p 的距离卽以綫段 AA_0 和 BB_0 的長度來表示。对应点 A' 和 B' 至同一个軸的距离卽以綫段 $A'A'_0$ 和 $B'B'_0$ 的長度來表示。从圖 8 我們得 $\frac{AA_0}{BB_0}=\frac{MA}{MB}$ 和 $\frac{A'A'_0}{B'B'}=\frac{MA'}{MB'}$。另方面我們得 $\frac{MA}{MB}=\frac{MA'}{MB'}$，因而

$$\frac{AA_0}{BB_0}=\frac{A'A'_0}{B'B'_0}$$

或
$$\frac{AA_0}{A'A'_0}=\frac{BB_0}{B'B'_0}=\text{常数}。$$

在实踐中常常会碰到这样的情形，卽兩个类屬对应場位于同一平面上的情形。把平面 Π 繞类屬軸 p 迴轉，使平面 Π 重合于平面 Π'，就会达到上述的情形。不难理会到，平面 Π 虽然迴轉了任意角度，但兩場类屬对应的所有特性仍不变。

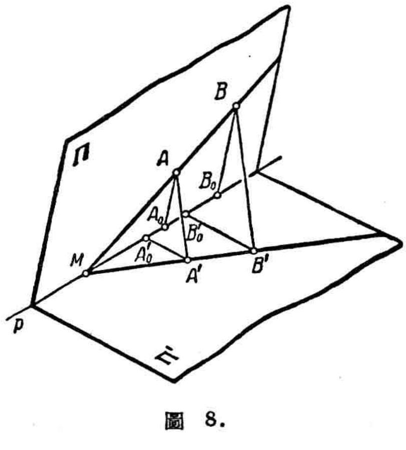

圖 8.

兩場所在的兩平面虽然互相重合，但兩場类屬对应的特性仍不变。还要注意，各对对应点的联綫 AA', BB', ……卽使在这样的情况之下，仍然是平行的。实

际上，等式$(MAB)=(MA'B')$不会被破坏$\left(\text{即}\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{MA'}{MB'}\text{不变}\right)$，因而，一个角度兩边上成比例的綫段的联綫 AA' 和 BB' 是互相平行的。

假使兩場的平面重合，亦即兩类屬場在同一个平面之上(圖 9)，就不能够在兩平面的交綫处來确定我們的类屬軸 p。于是要給类屬軸以另一个定义，即把类屬軸当作是类屬对应場上双重点的軌跡，亦即对应点与該点本身重合的点之軌跡。

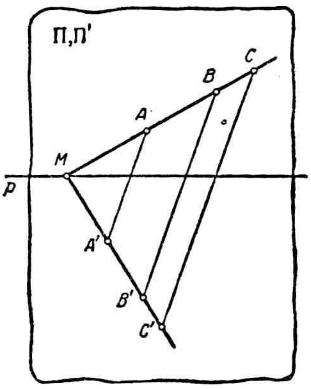

圖 9.

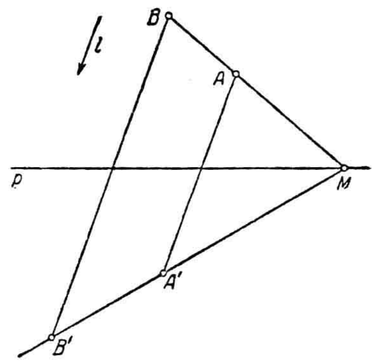

圖 10.

此外还有另一个問題，即关于給定在同一平面上兩場的类屬对应的問題。事实上，在这种情况之下，类屬对应就不能够作为一个平面場平行射影于另一个平面場而建立起來，因为这兩場的平面已經互相重合。但是，即使如此，对应还是可以建立起來的，只要已知对应軸，亦即类屬軸 p，又已知一对对应点 A, A' (圖 10)。从这些已知条件可以定出对应中心，它是 AA' 直綫上的無窮远点。所以，要想作出与点 B 对应的点 B'，可如下進行。与直綫 AB 相对应的直綫 $A'B'$ 应該通过 AB 的双重点 M。这就使我們有可能作出直綫 MA' (圖 10)。此外，所求的点 B' 应該在平行于 AA' 的射影直綫 BB' 上。这样一來，即得：

$$B'=MA'\times BB'。$$

無論已知的及所求的元素是处于怎样的位置，上述作法都可以使用。

被一对类屬点 A, A' 和一个类屬軸 p 所决定的兩場的类屬对应，我們表示它的方法是：$(A, A'; p)$。在一平面場上的兩个点場 Π 和 Π′ 的类屬对应，經常可以看作是由于一場射影在另一場上的結果。其实，假如將場 Π 所在的平面繞类屬軸 p 迴轉某一个角度，同时使場 Π′ 的平面保持不动，那么，就会重新得到兩場在空間中平行透視的位置。在这样的情况之下，每一个場都可以看作是另一个場的平行投影。这样一來，从一平面射影到另一平面上的平行射影过程总可以变換为位于同一平面上兩場的类屬对应，反之，同一平面上兩場的类屬对应也可以变換为一場射影于另一場上的平行投影。

試証下面的定理。

定理 若場 Π 类屬对应于場 Π′ $(A, A'; p_0)$，而場 Π′ 又类屬对应于場 Π″ $(A', A''; p_1)$，同时这兩个类屬对应的方向互相重合 $(AA' \parallel A'A'')$，則場 Π 和 Π″ 也以同一公共类屬方向

(l) 而互相类屬对应。所有三个对应的类屬軸相交于一点。

在第一个对应中，場 Π 上的点 A 对应于場 Π' 上的点 A' (圖 11)。因此，直綫 AB_0 对应于直綫 $A'B_0$。同样，直綫 AC_0 对应于直綫 $A'C_0$。同时，对应直綫相交于类屬軸 p_0 上，交点为 B_0 和 C_0。在第二个对应中，場 Π' 上的点 A' 对应于場 Π'' 上的点 A''。根据定理的已知条件，三点 A, A' 和 A'' 是在同一直綫 l 上，这直綫 l 即定出兩个对应中的公共类屬方向。

直綫 $A'B_1$ 对应于直綫 $A''B_1$；同样，直綫 $A'C_1$ 对应于直綫 $A''C_1$。

試以字母 B_2 代表直綫 AB_0 和直綫 $A''B_1$ 的交点 ($B_2=AB_0\times A''B_1$)。同样以字母 C_2 代表直綫 AC_0 和直綫 $A''C_1$ 的交点 ($C_2=AC_0\times A''C_1$)。最后，以字母 p_2 代表直綫 B_2C_2。現在把德沙格定理应用到三角形 $B_0B_1B_2$ 和三角形 $C_0C_1C_2$ 中。由于，这兩三角形的对应边分别相交于 A, A' 和 A'' 三点，三个交点在同一直綫 l 上，按德沙格定理，兩三角形对应頂点的联綫（亦即直綫 $B_0C_0\equiv p_0$, $B_1C_1\equiv p_1$ 和 $B_2C_2\equiv p_2$）应該相交于同一点，这点在圖 11 中以字母 P 來代表。

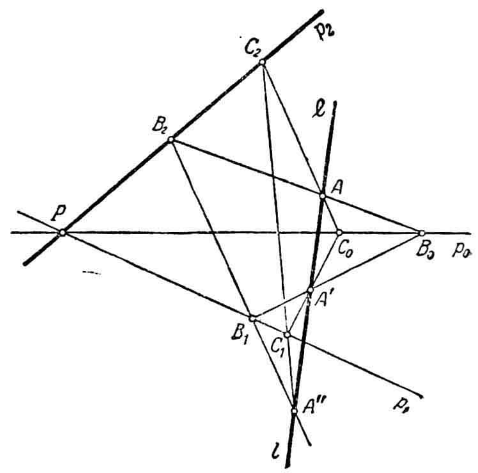

圖 11.

現在很容易看出來，場 Π 和 Π'' 之間相互等价的对应是类屬对应，在这对应中，点 A 对应于点 A''，直綫 AB_2 对应于直綫 $A''B_2$。在这对应中类屬方向以直綫 l 來决定，而直綫 p_2 为类屬軸。

§4. 橢圓是类屬对应于圓周的曲綫

待我們來看看位于同一平面上的兩个类屬对应場 Π 和 Π'。我們知道，一場上的每个点对应于另一場上的一个定点，一場上的每条直綫对应于另一場上的一条定直綫。一場上的一个圖形对应于另一場上的某个圖形。假設，在場 Π 中有一个圓周，这圓周我們用字母 k 來表示。这时候，k 就对应于場 Π' 中的某一曲綫 k'。这条对应于圓周的曲綫就叫做橢圓。肯定橢圓就是类屬对应于圓周的曲綫，我們就能先找出橢圓上的各个点來画出橢圓。

例如，在圖 12 中，假設已知圓周的圓心 O 和已知圓周上一个点 A。求作对应于該圓周的橢圓。

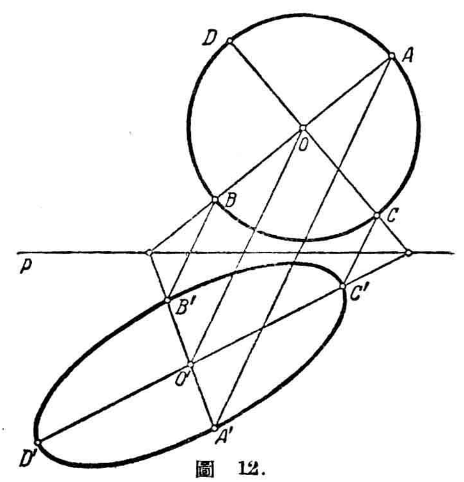

圖 12.

我們要注意，圓周的中心 O 是圓周的对称中心。这也就是說，圓周的所有直徑都在 O 点处被平分为二等份。由于这特性在类屬对应中是不变

量，故对椭圓來說，所有通过点 O' 的椭圓的弦都应在点 O' 处被平分为二等份，而点 O' 卽类屬对应于圓心 O 的点。由此可以断定，点 O' 是椭圓的对称中心，并簡称之为椭圓中心，而过椭圓中心的弦則称为椭圓直徑。这样，圓心 O 对应于椭圓中心 O'。要想作出随便多少个椭圓上的点，只要画出已知的圓周 (O, A)，再作出类屬对应于該圓周上各个点的椭圓点。圖 12 中就是用这样的方法來画出点 A, B 和 C。

必須指出，圓周上相等的各直徑，一般說來，对应于其类屬椭圓上大小不等的各直徑。这样，虽然椭圓和圓周都是中心的对称曲綫，但在类屬椭圓中，并不保存圓周直徑均相等的特性。

其次，假設場 Π 上的圓周对应于場 Π' 上的椭圓（圖 13，a 和 $б$）。如果我們在圓周中引一組平行的弦，則按已知的类屬对应特性，在椭圓中所对应的也是一組平行的弦。圓周中平行的弦的中点軌跡，顯然就是圓周的直徑。因此，椭圓中平行的弦的中点軌跡，也是椭圓的直徑，而且是一段直綫。对圓周以及椭圓來說，这样的直徑就称为某一个方向的弦的共軛直徑。我們要注意，圓周上共軛于某一方向的弦的直徑，一定垂直于这些弦。这个特性，一般來說，在类屬場 Π 和 Π' 中是不存在的，并且在椭圓中共軛于已知方向的弦的直徑，一般不垂直于那些弦。圓周上兩互相垂直的直徑 AB 和 CD 是共軛直徑，因为其中每条直徑都把平行于另一条直徑的弦平分成二等份。直徑的共軛性也保存于椭圓中。所以，直徑 $A'B'$ 和 $C'D'$ 也是共軛直徑，亦卽其中每条直徑都把平行于另一条直徑的弦平分为二等份。但是在一般情况之下椭圓的共軛直徑不是互相垂直的，因为在类屬对应中直綫的垂直性不能保存下來。

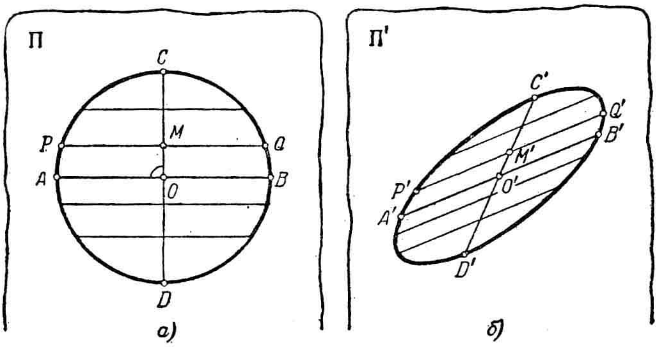

圖　13.

这里所引用的共軛直徑的概念，在繪圖理論中具有極其重大的意义。当圓周被平行射影在某平面上时，我們所得的圖像是椭圓形，而圓周上兩个互相垂直的直徑，則成为椭圓的共軛直徑。如果已把椭圓画出（参看，例如圖 13，$б$），那就很容易作出已知直徑 $A'B'$ 的共軛直徑 $C'D'$。为此，我們引任意的弦 $P'Q'$ 使平行于 $A'B'$，并把 $P'Q'$ 在点 M' 处等分为二，这时，直徑 $O'M' \equiv C'D'$，并且又是直徑 $A'B'$ 的共軛直徑。

在已知圓周上取一点 B_1 并引割綫 BB_1（圖 14，a）。我們把割綫 BB_1 繞点 B 迴轉，使点 B_1 移近点 B。在極限位置时，点 B_1 卽重合于点 B $(B_1 \equiv B)$，割綫就变为切圓周于 B 点的切綫 (t)。

現在待我們來研究一下，这在場 Π' 中將对应于什么呢（圖 14，$б$）？当割綫 $B'B'_1$ 繞 B' 点迴轉时，对应于圓周上点 B_1 的椭圓点 B'_1 將趋近于点 B'。在極限位置时兩点卽重合，割綫就变成切椭圓于点 B' 的切綫，这切綫仍然是一条和切圓周于点 B 的切綫相对应的直綫。