北大燕园

2013年 李永乐·李正元

考研数学 11

数学

数学二

全真模拟经典400题

（水平检测5套题）

主编 清华大学 李永乐
北京大学 李正元
北京大学 刘西垣

国家行政学院出版社

北大燕园

2013年李永乐·李正元考研数学⑪

数学

数学二

全真模拟经典400题

（水平检测5套题）

主　编　清　华　大　学　李永乐
北　京　大　学　李正元
北　京　大　学　刘西垣

编　者　（以姓氏笔画为序）
北　京　大　学　刘西垣
北　京　大　学　李正元
清　华　大　学　李永乐
北　京　大　学　范培华

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学全真模拟经典400题·水平检测5套题．数学．2/李正元，刘西垣，李永乐主编．
－北京：国家行政学院出版社，2012．6
ISBN 978-7-5150-0384-9

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①李…　②刘…　③李…　Ⅲ．①高等数学-研究生-入学考试-习题集
Ⅳ．①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第144044号

书　　名	数学全真模拟经典400题(水平检测5套题)：数学二
作　　者	李永乐　李正元　刘西垣
责任编辑	樊克克
出版发行	国家行政学院出版社
	(北京市海淀区长春桥路6号　100089)
电　　话	(010)82771887
经　　销	新华书店
印　　刷	北京市朝阳印刷厂
版　　次	2012年7月北京第1版
印　　次	2012年7月北京第1次印刷
开　　本	787毫米×1092毫米　16开
印　　张	6.5
字　　数	160千字
书　　号	ISBN 978-7-5150-0384-9/O·015
定　　价	12.00元

前　言

本套书（**李永乐、李正元考研数学系列——《数学复习全书》及《数学全真模拟经典 400 题》等，国家行政学院出版社**）出版、修订多年以来，深受全国广大考生的好评和厚爱，受到专家同行的肯定，认为本套书在编写体例和内容上有“自己的特色”和“较高的水准及较强的针对性、前瞻性”，较“适合考生的需要”，我们深感欣慰。《**2013 年考研数学全真模拟经典 400 题**》根据考试大纲的考试内容、考试要求及试卷结构重新编写，将以更高的质量和新的面貌呈现在广大考生的面前。

《经典 400 题》特点：

1. **每题均全新优化设计，综合性强**

为使考研同学考前多一些查漏补缺的机会，多见一些新题型，多一些针对性，考试中多一份把握，我们特优化设计了 10 套模拟试题。在内容设计上，每道题均涉及两个或两个以上知识点，这些题涵盖新大纲大部分重要考查知识点。通过这 10 套全新优化设计的试题训练，我们相信一定能提高您的数学的分析问题、解决问题的能力。

2. **注重归纳总结，力求一题多解，解答规范、详细**

我们在设计这 10 套试题时，无论是选择题、填空题，还是解答题（包括证明题），每道题设有：①分析——该题的解题思路和方法；②解答——该题的详细、规范解题过程；③评注——该题所考查的知识点（或命题意图）、解题思路归纳总结和延伸、常见错误和注意事项、涉及的重要结论。同时，在解题过程中，力求一题多解，扩展考生的视野和思路，比较各种解题方法的特点和适用范围，从而提高应试水平。

本书使用说明：

1. 本书是依据考研数学大纲为 2013 年考研读者全新优化设计的一本全真模拟训练套题，本书中的试题难度略高于 2012 年考研试题，解答题（包括证明题）体现了考试重点、难点内容，综合性比较强；选择题与填空题着重考查考生对基本概念、基本公式、基本定理的理解和运用，适用于第二、三阶段复习训练之用。

2. 本书中的每道题均有较透彻的分析、详细解答、归纳总结的评注，因此希望考生在做题时，如果遇到了困难，不要急于看分析与解答，一定要多思考，只有这样才能达到本书编写的目的，才能提高应试水平，才能取得好成绩。

3. 考生在使用本书之前，应仔细研读《2013 年考研数学复习全书》，弄清《考试大纲》中要求掌握的基本概念、基本定理和基本方法，掌握《2013 年考研数学复习全书》中所介绍的解题思路、方法和技巧。

特别提醒考生注意：①本书编撰者长期从事于清华大学、北京大学、中国人民大学等重点高校的相关教学，考研辅导经验丰富，并且是各自领域的专家学者，具有足够的专业素养。更重要的是，本书编撰者认真钻研考试大纲的考试内容和考试要求，归纳总结考生在学习中的不足及近年来考研数学考试的命题规律，尽力做到考研辅导和考研辅导资料的编写具有很强的针对性和有效性。

②为了提高考生数学分析和解决问题的能力，本书所编题目难度较大，有的题目涉及 3 个以上的考点，综合运用性比较高，概念运用性较强，如果考生在做本书试题感到棘手时，请不要着急，更不能泄气，应静下心来，仔细分析题目所考查的是哪些知识点，回忆《数学复习全书》所介绍的解题方法，然后再动手做题。

因此，我们希望考生认真对待本书中每道题，一定要动手做题，不要一看了事，建议考生对本书中的每套题至少要做二至三遍。我们相信在 2013 年考研数学考试中，您肯定会感到有些题“似曾相识”、甚至“一见如故”。

在本书的编写、编辑和成书过程中，由于时间紧、任务重，尽管我们认真对待和严格要求，仍难免有不尽如意的地方，诚请广大读者和同行批评指正。

说明：应广大考生的要求，并使本书更具针对性，我们将原《经典 400 题》（共 10 套题）分阶段即分成两本（各 5 套题）出版，但书名仍沿用《数学全真模拟经典 400 题》。

第一本即《**2013 年数学全真模拟经典 400 题**》（**水平检测 5 套题**）：该书于 7 月中旬出版，目的是帮助考生在夯实基础、强化提高的基础上检测前阶段的复习效果，查漏补缺，便于考生后阶段有针对性地加以提高。

第二本即《**2013 年数学全真模拟经典 400 题**》（**最后冲刺 5 套题**）：该书将于 10 月上旬出版，目的是帮助考生总结重要考试题型的解题思路、方法，扫清解题中相关知识点间的衔接与转换上的障碍，增长见识；同时帮助考生调整考试状态，提高数学成绩。

编　者

2012 年 7 月

目　录

水平检测　卷(一)

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 在当 $x \to 0$ 时的无穷小量 ①$\int_0^x \ln(1+t^{3/2})\,dt$,②$\int_0^{1-\cos x}(\sin t)^{3/2}\,dt$,③$\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\,dt$ 与 ④$\tan x - \sin x$ 当中,阶数最高的无穷小量是

(A) ①.　(B) ②.　(C) ③.　(D) ④.

(2) 定积分$\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin(x^2)\,dx$ 取值

(A) 为正.　(B) 为负.

(C) 为零.　(D) 的符号无法直接判定.

(3) 设$f(x) = \dfrac{36x}{(x+3)^2} + a$($a$ 为常数),则

(A) 当 $a < -3$ 或 $a > 0$ 时,$f(x)$ 不可能无零点.

(B) 当 $a = 0$ 时,$f(x)$ 不可能仅有一个零点.

(C) 当 $a = -3$ 时,$f(x)$ 不可能仅有一个零点.

(D) 当 $-3 < a < 0$ 时,$f(x)$ 不可能仅有两个零点.

(4) 设函数$f(x)$ 在区间$(-1,1)$ 内二次可导,已知$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$,且$f''(x) < 0$ 当$x \in (-1,1)$ 时成立,则

(A) 当 $x \in (-1,0)$ 时 $f(x) > x$,而当 $x \in (0,1)$ 时 $f(x) < x$.

(B) 当 $x \in (-1,0)$ 时 $f(x) < x$,而当 $x \in (0,1)$ 时 $f(x) > x$.

(C) 当 $x \in (-1,0)$ 与 $x \in (0,1)$ 时都有 $f(x) > x$.

(D) 当 $x \in (-1,0)$ 与 $x \in (0,1)$ 时都有 $f(x) < x$.

(5) 函数 $u = xyz^2$ 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 4(x > 0, y > 0, z > 0)$ 下的最大值是

(A) $\dfrac{1}{2}$.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.

(6) 若用代换 $y = z^m$ 可将微分方程 $y' = ax^\alpha + by^\beta(\alpha\beta \neq 0)$ 化为一阶齐次方程$\dfrac{dz}{dx} = f\left(\dfrac{z}{x}\right)$,则常数 α 与 β 应满足的条件是

(A) $\dfrac{1}{\beta} - \dfrac{1}{\alpha} = 1$.　(B) $\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{\beta} = 1$.　(C) $\dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\alpha} = 1$.　(D) $\dfrac{1}{\beta} - \dfrac{1}{\alpha} = 0$.

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵,且方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解,则

(A) 当 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解时,必有 $m = n$.

(B) 当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解时,必有 $r(\boldsymbol{A})=n$.

(C) 当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解时,必有 $m<n$.

(D) 当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解时,必有 $r(\boldsymbol{A})<m$.

(8) 下列矩阵中不能相似对角化的是

(A) $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&3\end{bmatrix}$.

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_n^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{x+\cos x}}\mathrm{d}x=$ ________.

(10) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 的某邻域内有定义,且满足 $3x\leqslant f(x)\leqslant x^2+x+1$,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=1$ 处的切线方程为________.

(11) 设函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数,且满足 $f'(0)=1$,则 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(0)}-\dfrac{1}{xf'(x)}\right]=$ ________.

(12) 反常积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{7/2}}=$ ________.

(13) 已知当 $x>0$ 与 $y>0$ 时 $f\left(\ln x,\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{x^2+x(\ln y-\ln x)}{y+x\ln x}$,则函数 $f(x,y)$ 在点 $(x,y)=(1,1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}f\big|_{(1,1)}=$ ________.

(14) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^5\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^4$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) **(本题满分 10 分)**

试证明当 $x>0$ 时,存在 $\theta(x)\in(0,1)$,使得 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$,并且 $\theta(x)$ 为满足 $\dfrac{1}{4}<\theta(x)<\dfrac{1}{2}$ 的单调增加函数.

(16) **(本题满分 10 分)**

设 $x>0$,试证:$2\sin x+e^{x}-e^{-x}>4x$.

(17) **(本题满分 11 分)**

试求椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 在点 $P_1(0,1)$ 与 $P_2(2,0)$ 处的曲率与曲率圆方程.

(18) **(本题满分 11 分)**

设对任意的 x 和 y,有 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=4$,用变量代换 $\begin{cases}x=uv,\\ y=\frac{1}{2}(u^2-v^2)\end{cases}$ 将 $f(x,y)$ 变换成 $g(u,v)$,试求满足 $a\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2-b\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2=u^2+v^2$ 中的常数 a 和 b.

(19) **(本题满分 10 分)**

设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_x^1 f(y)f(y-x)\mathrm{d}y$,求 $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(20) **(本题满分 10 分)**

设函数 $f(x)(x \geqslant 0)$ 连续可微,$f(0) = 1$,已知曲线 $y = f(x)$,x 轴,y 轴及过点 $(x,0)$ 且垂直于 x 轴的直线所围成的图形的面积与曲线 $y = f(x)$ 在 $[0,x]$ 上的弧长值相等,求 $f(x)$.

(21) **(本题满分 10 分)**

设函数 $f(x,y) = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x^2 + y^2 \geqslant 1 \text{ 且 } x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中平面区域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2y\}$.

(22) **(本题满分 11 分)**

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,5,-1)^{\mathrm T},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,a,4)^{\mathrm T},\boldsymbol{\alpha}_3=(5,17,-1,7)^{\mathrm T}$,

(Ⅰ) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,求 a 的值;

(Ⅱ) 当 $a=3$ 时,求与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都正交的非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_4$;

(Ⅲ) 当 $a=3$ 时,证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 可表示任一个 4 维列向量.

(23) **(本题满分 11 分)**

已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的 3 维列向量,满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=4\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=-2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;

(Ⅱ) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量;

(Ⅲ) 求矩阵 $\boldsymbol{A}^*-6\boldsymbol{E}$ 的秩.

水平检测　卷(二)

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 已知当 $x \to 0$ 时,$F(x) = \int_0^{x^3} \ln(1+t)\,dt$ 是 x^n 的同阶无穷小量,则 n 等于

(A) 3.　　(B) 4.　　(C) 5.　　(D) 6.

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2nx+x^2}{2n^2}\right)^{-n}, & x \neq 0, \\ \lim\limits_{n\to\infty} 2\left[\dfrac{n}{(n+1)^2}+\dfrac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{n}{(n+n)^2}\right], & x = 0, \end{cases}$ 则 $f'(0) =$

(A) -2.　　(B) -1.　　(C) 0.　　(D) 1.

(3) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,又 $F(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} f(|\sin t|)\,dt$,则

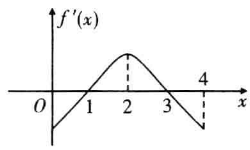
(A) $F(x+\pi) > F(x)\ (x \in (-\infty,+\infty))$.

(B) $F(x+\pi) < F(x)\ (x \in (-\infty,+\infty))$.

(C) $F(x+\pi) = F(x)\ (x \in (-\infty,+\infty))$.

(D) $x > 0$ 时 $F(x+\pi) > F(x)$,$x < 0$ 时 $F(x+\pi) < F(x)$.

(4) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[0,4]$ 上的导函数的图形如右图,则 $f(x)$



(A) 在 $(0,2)$ 单调上升且为凸的,在 $(2,4)$ 单调下降且为凹的.

(B) 在 $(0,1)$,$(3,4)$ 单调下降,在 $(1,3)$ 单调上升,在 $(0,2)$ 是凹的,在 $(2,4)$ 是凸的.

(C) 在 $(0,1)$,$(3,4)$ 单调下降,在 $(1,3)$ 单调上升,在 $(0,2)$ 是凸的,在 $(2,4)$ 是凹的.

(D) 在 $(0,2)$ 单调上升且是凹的,在 $(2,4)$ 单调下降且是凸的.

(5) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有连续导数,且 $f(0) = 0$,令 $M = \max\limits_{[0,1]} |f'(x)|$,则必有

(A) $\int_0^1 |f(x)|\,dx \leq \dfrac{M}{2}$.　　(B) $\dfrac{M}{2} \leq \int_0^1 |f(x)|\,dx \leq M$.

(C) $M \leq \int_0^1 |f(x)|\,dx \leq 2M$.　　(D) $\int_0^1 |f(x)|\,dx \geq 2M$.

(6) 设函数 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域有连续的二阶偏导数,且 $F(x_0,y_0) = F'_x(x_0,y_0) = 0$,$F'_y(x_0,y_0) > 0$,$F''_{xx}(x_0,y_0) < 0$.由方程 $F(x,y) = 0$ 在 x_0 的某邻域确定的隐函数 $y = y(x)$,它有连续的二阶导数,且 $y(x_0) = y_0$,则

(A) $y(x)$ 以 $x = x_0$ 为极大值点.　　(B) $y(x)$ 以 $x = x_0$ 为极小值点.

(C) $y(x)$ 在 $x = x_0$ 不取极值.　　(D) $(x_0, y(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(7) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是 n 阶矩阵,并满足 $\boldsymbol{ABAC}=\boldsymbol{E}$,则下列结论中不正确的是

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$.　　(B) $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{CAB}$.

(C) $\boldsymbol{BA}^2\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$.　　(D) $\boldsymbol{ACAB}=\boldsymbol{CABA}$.

(8) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{bmatrix}$,则下列矩阵中与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等价、合同但不相似的是

(A) $\begin{bmatrix}1&-2&1\\-2&4&-2\\1&-2&1\end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\sin x}}{\arctan\dfrac{x}{3}}, & x>0,\\ ae^{4x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ________.

(10) x 轴上方的星形线:$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 与 x 轴所围区域的面积 $S=$ ________.

(11) 设 $y=f(x)$ 二阶可导,$f'(x)\neq 0$,它的反函数是 $x=\varphi(y)$,又 $f(0)=1$,$f'(0)=\sqrt{3}$,$f''(0)=-1$,则 $\dfrac{|\varphi''(1)|}{[1+\varphi'^2(1)]^{3/2}}=$ ________.

(12) 设 $f(u)$ 连续,且 $\mathrm{d}u(x,y)=f(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$,则 $u(x,y)=$ ________.

(13) 设 $I(a)=\int_0^{2a}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}}e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x$,则 $\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{I(a)}{\ln(1+a^2)}=$ ________.

(14) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&a\\1&a&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}$ 是 3 阶非零矩阵,满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$,则矩阵 $\boldsymbol{B}=$ ________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) **(本题满分 10 分)**

求不定积分 $I=\int\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$.

(16) **(本题满分 10 分)**

一质量为 M、长为 l 的均匀杆 AB 吸引着一质量为 m 的质点 C,此质点 C 位于杆 AB 的中垂线上,且与 AB 的距离为 a. 试求:

(Ⅰ) 杆 AB 与质点 C 的相互吸引力;

(Ⅱ) 当质点 C 在杆 AB 的中垂线上从点 C 沿 y 轴移向无穷远处时,克服引力所做的功.

(17) **(本题满分 11 分)**

设 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}+e^{-\frac{1}{x}}, & x>0, \\ 1, & x=0, \end{cases}$

(Ⅰ) 求证: $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续;

(Ⅱ) 求 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 的单调性区间;

(Ⅲ) 求 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 的最大值与最小值.

(18) **（本题满分 10 分）**

已知 $y_1^*(x)=xe^{-x}+e^{-2x}$，$y_2^*(x)=xe^{-x}+xe^{-2x}$，$y_3^*(x)=xe^{-x}+e^{-2x}+xe^{-2x}$ 是某二阶线性常系数微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的三个特解．

（Ⅰ）求这个方程和它的通解；

（Ⅱ）设 $y=y(x)$ 是该方程满足 $y(0)=0$，$y'(0)=0$ 的特解，求 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$．

(19) **（本题满分 10 分）**

设 $u=u(x,y)$ 由方程组

$$\begin{cases}u=vx+y\varphi(v)+\psi(v),\\0=x+y\varphi'(v)+\psi'(v)\end{cases}$$

确定，其中 $\varphi(v)$，$\psi(v)$ 有连续的二阶导数且 $y\varphi''(v)+\psi''(v)\neq 0$，求证：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2.$$

（20） **（本题满分 11 分）**

设 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$,

（Ⅰ）将二重积分 $I = \iint\limits_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为定积分；

（Ⅱ）证明不等式 $\sin x > x - \dfrac{1}{6}x^3 \quad (x > 0)$；

（Ⅲ）证明不等式 $\dfrac{61}{165}\pi < \iint\limits_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \dfrac{2}{5}\pi$.

（21） **（本题满分 10 分）**

设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 内二阶可导且 $f''(x) < 0$,又 $b > a$, $f(a) = A > 0$, $f(b) = B > 0$, $f'(b) < 0$, 求证：

（Ⅰ）$f\left[b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}\right] < 0$;

（Ⅱ）方程 $f(x) = 0$ 在 $[a, +\infty)$ 内有且仅有一个实根.

(22) **(本题满分 11 分)**

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶反对称矩阵,

(Ⅰ) 证明:$\boldsymbol{A}$ 可逆的必要条件是 n 为偶数;当 n 为奇数时,$\boldsymbol{A}^*$ 是对称矩阵;

(Ⅱ) 举一个 4 阶不可逆的反对称矩阵的例子;

(Ⅲ) 证明:如果 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,那么 $-\lambda$ 也必是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(23) **(本题满分 11 分)**

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -a\\ 2 & a & -2\\ -a & -1 & 1\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量,并指出 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化的条件.