工业和信息化普通高等教育“十二五”规划教材
立项项目

21世纪高等院校通识教育规划教材

高等数学（上册）

刘宝炜 主编
艾素梅 张泽浩 副主编

$$\int \frac{1}{ax^2+b}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\sqrt{\dfrac{a}{b}}x+C & (b>0)\\ \dfrac{1}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{a}x-\sqrt{-b}}{\sqrt{a}x+\sqrt{-b}}\right|+C & (b<0)\end{cases}$$

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

■化普通高等教育“十二五”规划教材

21世纪高等院校通识教育规划教材

高等数学

（上册）

刘宝炜 主编

艾素梅 张泽浩 副主编

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册 / 刘宝炜主编. -- 北京 : 人民邮电出版社，2012.9
21世纪高等院校通识教育规划教材
ISBN 978-7-115-28760-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第186112号

内容提要

本教材是在面向21世纪数学系列课程教学内容与课程体系改革方针的指导下，编者根据多年的教学实践经验和研究成果，结合“高等数学课程教学基本要求”编写而成的.

本书分为上、下两册. 上册含函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程等内容. 下册含向量与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等内容. 每节均配有习题，书末附有习题参考答案，便于教与学.

21世纪高等院校通识教育规划教材
高等数学（上册）

◆ 主　　编　刘宝炜
副 主 编　艾素梅　张泽浩
责任编辑　贾　楠

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街14号
邮编　100061　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京艺辉印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：13.25　　2012年9月第1版
字数：338千字　　2012年9月北京第1次印刷

ISBN 978-7-115-28760-1

定价：29.80元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

前言

Preface

数学是一门重要而应用广泛的学科，被誉为锻炼思维的体操和人类智慧之冠上最明亮的宝石。不仅如此，数学还是各类学科和技术的基础，它的应用几乎涉及所有的学科领域，对于世界文化的发展有着深远的影响。高等学校作为培育人才的摇篮，其数学课程的开设也就具有特别重要的意义。

近年来，随着我国经济建设与科学技术的迅速发展，高等教育进入了一个飞速发展时期，已经突破了以前的精英式教育模式，发展成为一种在终身学习的大背景下极具创造性和再创性的基础学科教育。高等学校教育教学理念不断更新，教学改革不断深入，办学规模不断扩大，数学课程开设的专业覆盖面也不断增大。为了适应这一发展需要，根据多年的教学实践经验和研究成果，结合“高等数学课程教学基本要求”，我们编写了这套高质量的高等学校非数学类专业的数学教材。

本书是为普通高等学校非数学专业学生编写的，也可供各类需要提高数学素质和能力的人员使用。为适应分层次教学的需要，选修内容用*号标出。本书概念、定理及理论叙述准确、精炼，符号使用标准、规范，知识点突出，难点分散，证明和计算过程严谨，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性。

本书分为上、下两册。上册包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程等内容。下册包括向量与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等内容。每节和章末均配有习题，书末附有习题参考答案，便于教与学。

本书由刘宝炜任主编，由艾素梅、张泽浩任副主编，参加讨论和编写的人员有：王士新、张国胜、杨小力、高红志、江瑞霞、朱江红、贾庆兰、杨丽。

由于水平有限，书中难免有不妥之处，希望使用本书的教师和学生提出宝贵意见或建议。

编　者

2012年6月

目录

Contents

第1章　函数与极限 ……1

1.1　函数 ……2

1.1.1　集合 ……2

1.1.2　函数的概念 ……3

1.1.3　函数的几个特性 ……6

1.1.4　反函数与复合函数 ……7

1.1.5　初等函数 ……8

习题1.1 ……9

1.2　极限 ……9

1.2.1　数列的极限 ……9

1.2.2　函数的极限 ……11

1.2.3　函数极限的性质 ……14

习题1.2 ……14

1.3　无穷小与无穷大 ……15

1.3.1　无穷小与无穷大 ……15

1.3.2　无穷小的性质 ……16

习题1.3 ……16

1.4　极限的运算法则 ……17

1.4.1　极限的四则运算法则 ……17

1.4.2　复合函数的极限运算法则 ……19

习题1.4 ……20

1.5　极限存在的准则与两个重要极限 ……21

1.5.1　极限存在的两个准则 ……21

1.5.2　两个重要极限 ……21

习题1.5 ……25

1.6　无穷小的比较 ……25

习题1.6 ……27

1.7　函数的连续性 ……27

1.7.1　函数的连续性 ……27

1.7.2　初等函数的连续性 ……30

1.7.3　闭区间上连续函数的性质 ……31

习题1.7 ……33

1.8　常用经济学函数 ……33

1.8.1　成本函数、收入函数和利润函数 ……33

1.8.2　需求函数与供给函数 ……34

习题1.8 ……35

复习题1 ……35

第2章　导数与微分 ……37

2.1　导数概念 ……38

2.1.1　引例 ……38

2.1.2　导数的定义 ……39

2.1.3　导数的几何意义 ……41

2.1.4　函数的可导性与连续性的关系 ……42

习题2.1 ……42

2.2　函数的求导法则 ……43

2.2.1　导数的四则运算法则 ……43

2.2.2　反函数的求导法则 ……44

2.2.3　复合函数的求导法则 ……45

2.2.4　基本求导公式与求导法则 ……46

2.2.5　高阶导数 ……48

习题2.2 ……49

2.3 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数……50
2.3.1 隐函数的求导法则……50
2.3.2 由参数方程所确定的函数的导数……51
习题 2.3……52
2.4 函数的微分及其应用……52
2.4.1 微分的定义……52
2.4.2 微分的几何意义……53
2.4.3 基本微分公式与运算法则……54
2.4.4 微分在近似计算中的应用……56
习题 2.4……57
复习题 2……58

第 3 章 微分中值定理与导数的应用……60

3.1 微分中值定理……61
3.1.1 罗尔定理……61
3.1.2 拉格朗日中值定理……62
3.1.3 柯西中值定理……63
习题 3.1……63
3.2 洛必达法则……64
3.2.1 $\frac{0}{0}$与$\frac{\infty}{\infty}$型未定式……64
3.2.2 其他类型未定式……66
习题 3.2……67
3.3 泰勒公式……68
3.3.1 泰勒中值定理的引入……68
3.3.2 泰勒中值定理……69
习题 3.3……71
3.4 函数的单调性与曲线的凹凸性……71
3.4.1 函数的单调性……71
3.4.2 曲线的凹凸性……73
习题 3.4……76
3.5 函数的极值与最大值、最小值……76
3.5.1 函数的极值及其求法……76
3.5.2 函数的最大值、最小值……79
习题 3.5……80
3.6 函数图形的描绘……81
3.6.1 渐近线……81
3.6.2 函数图形的描绘……82
习题 3.6……84
3.7 *曲率……84
3.7.1 弧微分……84
3.7.2 曲率及其计算公式……85
3.7.3 曲率圆与曲率半径……87
习题 3.7……89
复习题 3……89

第 4 章 不定积分……91

4.1 不定积分的概念与性质……92
4.1.1 原函数的概念……92
4.1.2 不定积分的概念……92
4.1.3 基本积分表……94
4.1.4 不定积分的性质……95
习题 4.1……97
4.2 换元积分法……98
4.2.1 第一类换元法……98
4.2.2 第二类换元法……102
习题 4.2……105
4.3 分部积分法……106
习题 4.3……108
4.4 有理函数的积分……109
4.4.1 有理函数的积分……109
4.4.2 可化为有理函数的积分举例……112
习题 4.4……113
4.5 积分表的使用……113
4.5.1 在积分表中能直接查到的积分……114
4.5.2 先变量替换，再查表的积分……114
4.5.3 可用递推公式的积分……114
习题 4.5……115
复习题 4……115

第 5 章 定积分……117

5.1 定积分的概念与性质……118
5.1.1 几个引例……118
5.1.2 定积分的定义……120
5.1.3 定积分的几何意义……122
5.1.4 定积分的性质……123
习题 5.1……125
5.2 微积分基本公式……125
5.2.1 引例：变速直线运动中位置函数与速度函数的关系……125
5.2.2 积分上限函数及其导数……126
5.2.3 牛顿—莱布尼茨公式……127
习题 5.2……129
5.3 定积分的换元积分法与分部积分法……130
5.3.1 定积分的换元积分法……130
5.3.2 定积分的分部积分法……132
习题 5.3……133
5.4 反常积分……134
5.4.1 无穷限的反常积分……134
5.4.2 无界函数的反常积分……135
习题 5.4……137
复习题 5……137

第 6 章 定积分的应用……140

6.1 定积分的元素法……141
6.2 定积分的几何应用……142
6.2.1 平面图形的面积……142
6.2.2 体积……146
6.2.3 平面曲线的弧长……148
习题 6.2……149
6.3 定积分的物理应用……150
6.3.1 变力做功……150
6.3.2 液体压力……153
6.3.3 引力……154
习题 6.3……155
6.4 定积分在经济学中的应用……155
习题 6.4……157
复习题 6……157

第 7 章 微分方程……159

7.1 微分方程的基本概念……160
7.1.1 引例……160
7.1.2 微分方程的一般概念……161
习题 7.1……162
7.2 一阶微分方程……162
7.2.1 可分离变量的微分方程……162
7.2.2 齐次微分方程……164
7.2.3 一阶线性微分方程……167
7.2.4 伯努利方程……170
习题 7.2……171
7.3 高阶微分方程……172
7.3.1 右端仅含 x 的方程……172
7.3.2 右端不显含 y 的方程……172
7.3.3 右端不显含 x 的方程……173
7.3.4 线性微分方程解的结构……174
7.3.5 二阶常系数齐次线性微分方程……175
7.3.6 二阶常系数非齐次线性微分方程……177
习题 7.3……179
复习题 7……179

附录 A 积分公式……181

附录 B 习题答案……190

参考文献……205

第1章 函数与极限

Chapter 1

初等数学主要研究静止不变的量，所以也称为常量数学.16 世纪时，随着实践和科学发展的需要，对物体运动的研究成了自然科学的中心问题，在这类问题中出现了一些不断变化的量，即“变量”；而同一问题中的不同变量之间存在的依赖关系，即我们所熟悉的“函数”.这些问题的出现，促使数学的发展进入一个新的变量数学的时代.

极限理论是研究变量与函数的基本工具，也是整个高等数学的理论基础.本章主要介绍函数、极限及函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质.

1.1 函 数

本节介绍函数的一般概念、表示方法、性质以及最基本的函数类——初等函数.

1.1.1 集合

1. 集合

集合是现代数学中最基本的概念，它已经渗透到现代数学的各个分支，并且渗透到小学数学教学中.集合不能用更简单的概念来定义，但我们可以通过例子对这个概念加以说明.例如，自然数的全体，一个教室里的全体学生，某矩形内所有的点等，它们都是集合.一般地，具有某种确定性质的对象的全体称为**集合**或简称为**集**，其中的对象称为集合的**元素**，通常用大写拉丁字母 A,B,M 等表示集合，而用小写拉丁字母 a,b,m 等表示集合的元素.若 a 是 A 的元素，则记作 $a\in A$（读作 a 属于 A）；若 a 不是 A 的元素，记作 $a\notin A$（读作 a 不属于 A）.

集合的表示方法一般有两种，一种是**列举法**，就是按任意顺序不重复地列出集合的所有元素，并用花括号“{ }”括起来.

例如，12 的约数组成的集合 A，可表示为 $A=\{1,2,3,4,6,12\}$.

例如，方程 $x^2-1=0$ 的根所组成的集合 S，可表示为 $S=\{-1,1\}$.

还有一种是**描述法**，它的一般形式是

$$A=\left\{x\middle|x\text{具有性质}P\right\},$$

其中 P 是关于 x 的某个性质，意思是：$a\notin A$ 的充要条件是 x 不满足性质 P.

例如，全体偶数的集合 B，可表示为

$$B=\left\{x\middle|x=2n,\quad n\text{为整数}\right\}.$$

由某些数组成的集合称为**数集**，例如，全体自然数组成**自然数集**，常用符号 $\mathbf{N}$ 表示；全体正整数组成**正整数集**，常用符号 $\mathbf{N}_+$表示；全体整数组成**整数集**，常用符号 $\mathbf{Z}$ 表示；全体有理数组成**有理数集**，常用符号 $\mathbf{Q}$ 表示；全体实数组成**实数集**，常用符号 $\mathbf{R}$ 表示，等等.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $x\in A$，则有 $x\in B$，就说集合 A 是集合 B 的**子集**，记作 $A\subset B$（读作 A 包含于 B），或 $B\supset A$（读作 B 包含 A）.

如果 $A\subset B$，且 $B\subset A$，就说集合 A 与集合 B **相等**，记作 $A=B$.不包含任何元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$.例如，集合 $\left\{x\middle|x\in\mathbf{R},x^2=-1\right\}$ 是空集.

以后用到的集合主要是**数集**，即集合中的元素都是数，如果没有特别说明，以后用到的数均指实数.

2. 区间

高等数学中最常用的集合是区间，介于两个实数间的全体实数构成的集合称为**区间**.这两个实数称为区间的**端点**，两端点间的距离称为区间的**长度**.一般情况下有如下几种区间 $(a,b\in\mathbf{R},a<b)$.

区间符号	区间	区间名称	区间定义
(a,b)	有限	开区间	$\{x \mid a<x<b\}$
$[a,b]$		闭区间	$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$
$(a,b]$		半开区间	$\{x \mid a<x\leqslant b\}$
$[a,b)$		半开区间	$\{x \mid a\leqslant x<b\}$
$(a,+\infty)$	无限	无穷开区间	$\{x \mid a<x<+\infty\}$
$(-\infty,a)$		无穷开区间	$\{x \mid -\infty<x<a\}$
$[a,+\infty)$		无穷半闭区间	$\{x \mid a\leqslant x<+\infty\}$
$(-\infty,a]$		无穷半闭区间	$\{x \mid -\infty<x\leqslant a\}$
$(-\infty,+\infty)$		无穷区间	$\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$

3. 邻域

对于任意的正数δ，开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$表示点x_0的以δ为半径的**邻域**，简称为点x_0的δ**邻域**，记作$U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}.$$

数集$U(x_0,\delta)-\{x_0\}$表示在点x_0的δ邻域中去掉点x_0，称为点x_0的以δ为半径的**去心邻域**，记作$\mathring{U}(x_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)-\{x_0\}=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

当不需要注明邻域半径δ时，通常是对某个确定的邻域半径δ，常将它表为$\mathring{U}(x_0)$，简称**点x_0的去心邻域**.

1.1.2 函数的概念

1. 函数的定义

在研究问题时，为了描述某一变化过程中不同变量之间的依赖关系，给出函数的概念.先来看几个实际的例子.

例1 自由落体运动中，质点下落的距离s与下落时间t之间的关系由下式确定

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中$g\approx 9.8\ \mathrm{m/s^2}$为重力作用下自由落体的加速度.由这个关系式可知，对于任意大于零的t值，有唯一的s值与之对应.

例2 在几何中，圆的面积S由半径r唯一确定，它们之间的关系由下式给出

$$S=\pi r^2,$$

对于每个非负的r值，由此关系式都可以得到唯一的面积S与之对应.

以上两例虽然背景不同，但它们都表达了两个变量之间相互依赖的关系.这个关系由一个对应法则给出，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，根据这个对应法则，另一个变量有唯一确定的值与之对应.两个变量之间的这种对应关系就是函数的实质.

定义 1 设 D 是一个非空实数集，f 是一个对应法则.如果对于每个 $x\in D$，通过对应法则 f 都可以确定唯一的实数 y 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的一个**函数**，y 称为函数 f 在 x 点处的**函数值**，记作 $y=f(x)$.

函数 f 可以表示为

$$f:D\to R,\quad x\to y,$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**.自变量 x 取值的全体即数集 D 称为函数 f 的**定义域**，记作 $D(f)$ 或 D_f.函数值的全体称为 f 的**值域**，记作 $R(f)$ 或 R_f，也可记作 $f(D)$，即

$$R(f)=f(D)=\left\{f(x)\middle|x\in D\right\}.$$

由上述定义可以看出，严格意义上，f 和 $f(x)$ 的含义是不同的.f 表示由自变量 x 确定因变量 y 的对应法则即函数关系，而 $f(x)$ 则表示与自变量 x 对应的函数值.但是为了叙述方便，常将函数简单地表示为 $y=f(x)\,(x\in D)$.

通常用英文字母 f，g，h，…，F，G，…和希腊字母 φ，ψ，…，Φ，Ψ，…作为函数的记号.

确定函数的两个要素是定义域和对应法则.换言之，一个函数由定义域和对应法则完全确定，而与变量的记号无关.

例如 $s=\pi r^2$（$r>0$）与 $y=\pi x^2$（$x>0$）表达的是同一个函数关系；而 $y=\pi x^2$（$x>0$）与 $y=\pi x^2$（$x\in\mathbf{R}$）则是两个不同的函数，因为两者的定义域不同.

对于有实际意义的函数，其定义域由实际问题中自变量的意义所决定，如上述例 2 中的自变量 r 代表圆的半径，所以要求 $r>0$，即其定义域为 $(0,+\infty)$.对于用抽象的数学式表示的函数，由于没有实际意义，通常约定这种函数的定义域是使得数学表达式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域也称为函数的**自然定义域**.以数学式给出的函数，如果不特殊说明的话，均认为其定义域是自然定义域.例如，函数 $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的定义域是 $[-3,-1)\cup(1,3]$.

函数有 3 种表示方法：解析法、列表法、图形法.这 3 种方法各有优势，适用于不同的环境.但在我们的学习中，为了便于理论上的研究分析，一般采用解析法，即用数学式表示函数关系，同时，图形法因其直观性也常用作辅助.函数 $y=f(x)$ 的图形就是将定义域内任一自变量 x 的值作为横坐标，相应的函数值 $f(x)$ 作为纵坐标，在平面上做出所有对应的点后构成的图形，即坐标平面上的点集 $\left\{(x,y)\middle|y=f(x),x\in D\right\}$（见图 1-1）.

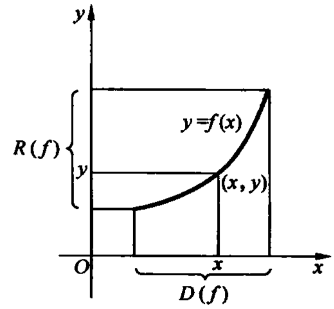

图 1-1

2. **分段函数**

在实际应用中，常遇到这样一类函数：在自变量的不同变化过程中，对应法则不同，因而函数表达式也不同，我们将这种函数称为**分段函数**.例如

绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0;\end{cases}$$

符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0;\end{cases}$$

它们的图形分别如图 1-2 和图 1-3 所示.

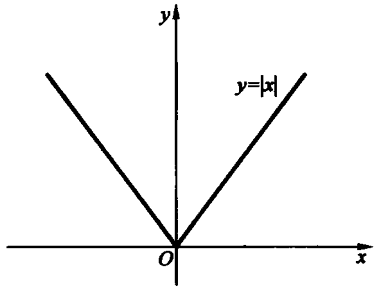

图 1-2

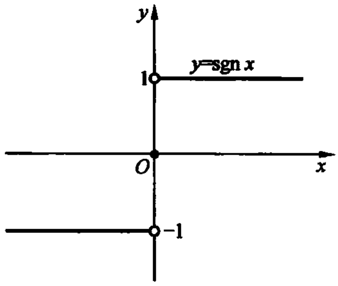

图 1-3

狄里克雷（Dirichlet）函数

$$y=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数},\end{cases}$$

其定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$，值域是 $\{0, 1\}$，因为数轴上有理点与无理点都是稠密的，所以它的图形不能在数轴上准确地描绘出来.

对于分段函数，应注意到：虽然在自变量的不同变化范围内，计算函数值的表达式不同，但这些表达式定义的是一个函数，这个函数的定义域是各个不同表达式所对应的 x 值的并集.在计算某个函数值时，要先判断自变量的值在哪个表达式所对应的范围内，然后再按该表达式求值.

例 3 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & 0<x<2,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & -2<x<0,\end{cases}$

写出它的定义域并求 $f(1)$ 和 $f(-1)$.

解 它的定义域 $D(f)=(-2,0)\cup\{0\}\cup(0,2)=(-2,2)$.

由于 $x=1\in(0,2)$，所以 $f(1)=1+1=2$；由于 $x=-1\in(-2,0)$，所以 $f(-1)=-1-1=-2$.此函数的图形如图 1-4 所示.

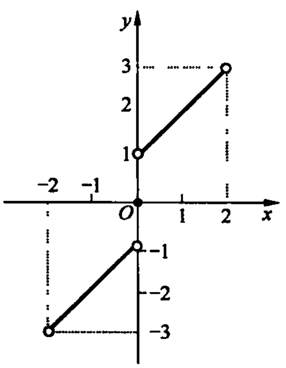

图 1-4

3. 函数的运算

函数作为一种数学元素，也可以作加减乘除四则运算.

设有函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，它们的定义域分别是 D_1、D_2，且 $D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$，我们可以定义这两个函数的下列运算.

- 和与差 $f\pm g$：$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$， $x\in D$.
- 积 $f\cdot g$：$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$， $x\in D$.
- 商 $\dfrac{f}{g}$：$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$， $x\in\{x\,|\,x\in D\text{且}g(x)\neq 0\}$.

1.1.3 函数的几个特性

研究函数时，常会用到以下几个特性.

1. 单调性

定义 2 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$.如果对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$（见图 1-5），则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) > f(x_2)$（见图 1-6），则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的.单调增加和单调减少的函数统称**单调函数**，使函数单调的区间称为函数的单调区间.

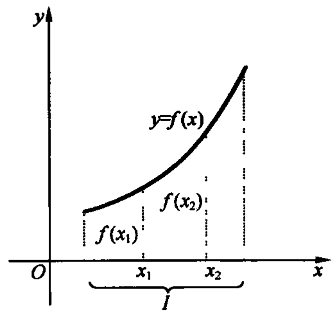

图 1-5

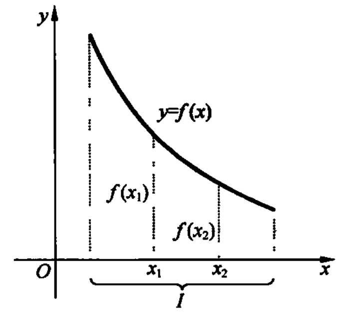

图 1-6

函数的单调性不仅和函数表达式有关，也和定义区间有关.一般地，如果函数在整个定义域内不单调，我们可以将定义域分成多个子区间，使函数在各个子区间内单调.例如，函数 $y = x^2$ 在整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调的，但是在定义域的子区间 $(-\infty,0)$ 上单调减少，而在 $(0,+\infty)$ 上是单调增加的.

2. 有界性

定义 3 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义.如果存在常数 $M > 0$，使得对任意的 $x \in D$ 恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 上有界；如果这样的 不存在，即对于任意的正数 ，无论它多大，总存在 $x \in D$ 使得 $|f(x)| > M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

如果存在常数 M（或 m），使得对任意的 $x \in D$，恒有 $f(x) < M$（或 $f(x) > m$），则函数 $f(x)$ 在 D 上**有上界**（或**有下界**）.

从几何上看，在区间 $[a,b]$ 上的有界函数的图形位于两条 x 轴的平行线 $y = M$ 和 $y = -M$ 之间（见图 1-7）.

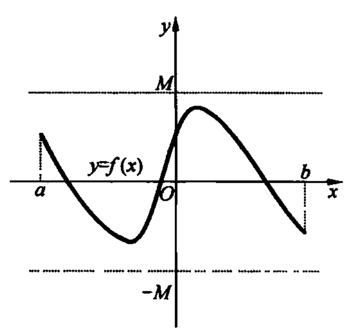

图 1-7

显然，在某区间上有界的函数在此区间上也必有上界和下界；反之，若函数在某区间上既有上界也有下界，那么它在此区间上一定是有界的.而无界函数也可能是只有上界而没有下界，或者只有下界而没有上界，或者既没有上界也没有下界.

例如，函数 $y = \sin x$ 在其定义域 $\mathbf{R}$ 上是有界的，这是因为对任意的 $x \in \mathbf{R}$，恒有 $|\sin x| \leqslant 1$.而函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在其定义域 $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ 上无界，但是如果我们的研究范围是区间 $[1,2]$，显然对任意的 $x \in [1,2]$，恒有 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$，这就是说 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上是有界的.由此可见，一个函数是否有界，与我们所讨论的区间有关.

3. 奇偶性

定义 4 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，其中 D 关于原点对称，即当 $x\in D$ 时，有 $-x\in D$.

如果对于任一 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

如果对于任一 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

例如，函数 $y=x^2$ 与 $y=x\sin x$ 都是偶函数，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 与函数 $y=x^3+x$ 都是奇函数，而函数 $y=x^2+x$ 是非奇非偶函数.

从定义中可以看出，只有定义域关于原点对称的函数才能讨论奇偶性.显然，偶函数的图形关于 y 轴对称（见图 1-8），而奇函数的图形关于原点对称（见图 1-9）.

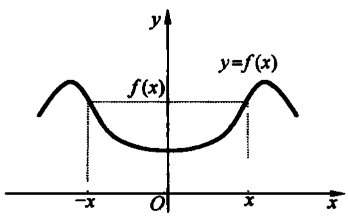

图 1-8

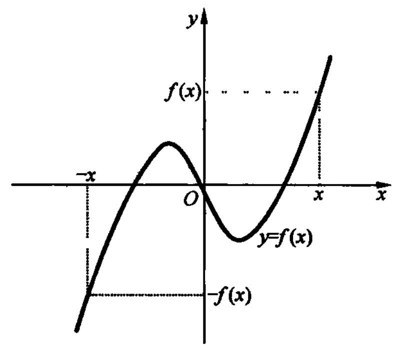

图 1-9

4. 周期性

定义 5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D.如果存在一个正数 l，使得对于任一 $x\in D$ 均有 $(x\pm l)\in D$，且恒有等式

$$f(x+l)=f(x)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，正数 l 称为函数 $f(x)$ 的**周期**.

可以看出，如果正数 l 是周期函数的周期，那么 l 的正整数倍也是这个函数的周期，即周期函数的周期不唯一.通常我们所说的周期是指函数的**最小正周期**，即满足上述等式的最小正数.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是周期为 2π 的周期函数，而 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.周期函数在每个长度为一个周期的区间上，都有相同的形状，自然地，也有相同的单调性等特性.

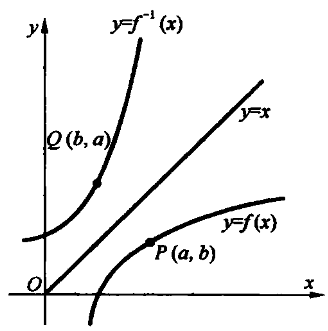

图 1-10

1.1.4 反函数与复合函数

1. 反函数

定义 6 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，值域为 $R(f)$.如果对任一 $y\in R(f)$，都有唯一确定的满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D(f)$ 与之对应，这时 x 是定义在 $R(f)$ 上以 y 为自变量的函数，我们称这个函数为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$ $(y\in R(f))$.将 $y=f(x)$ 称为 $x=f^{-1}(y)$ 的**原函数**.

由定义可知，反函数的对应法则完全由原函数的对应法则 f 所确定，另一方面，为了保证任一自变量 y 都有唯一确定的 x 与之对应，要求对应法则 f 是一一对应的.在这种情形下，$x=f^{-1}(y)$

与 $y=f(x)$ 互为反函数，而且 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域与值域正好是原函数的值域与定义域.

在反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 为自变量，x 为因变量.但习惯上，在保持定义域 $R(f)$ 与对应法则 f^{-1} 不变的情形下，我们仍以 x 记自变量，以 y 记因变量，将此反函数记为 $y=f^{-1}(x)$ $(x\in R(f))$. 所以函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称（见图 1-10）.

如果 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调，则其对应法则 f 是一一对应的，所以存在反函数，而且其反函数单调性与之一致.例如，指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加的，其值域为 $(0,1)$；而它的反函数是对数函数 $y=\ln x$，在其定义域 $(0,+\infty)$ 内也是单调增加的.

2. 复合函数

定义 7 已知函数 $y=f(u)(u\in D(f),\ y\in R(f))$ 与 $u=g(x)$ $(x\in D(g),\ u\in R(g))$.如果 $D(f)\cap R(g)\neq\varnothing$，则称函数

$$y=(f\circ g)(x)=f[g(x)],\quad x\in\{x|g(x)\in D(f)\}$$

是由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的**复合函数**.其中 x 为**自变量**，y 为**因变量**，u 称为**中间变量**，此复合函数的定义域为 $x\in\{x|g(x)\in D(f)\}$.

例 4 对于函数 $f(u)=\ln u, g(x)=\sin x$，由于 $D(f)=(0,+\infty)$，$R(g)=[-1,1]$，显然 $D(f)\cap R(g)=(0,1]\neq\varnothing$，所以这两个函数可以复合成新的函数，其表达式为 $y=\ln\sin x$，定义域为

$$D=\{x\mid\sin x\in(0,+\infty)\}=\{x\mid 2k\pi<x<(2k+1)\pi, k=0,\pm1,\pm2\cdots\}.$$

可以看出，两个函数要复合成新函数，往往要适当限制原来函数自变量的变化范围才可以.所以，并不是任何两个函数都可以复合成新函数的.例如，函数 $f(u)=\ln(u-2)$ 与 $g(x)=\sin x$，由于 $D(f)=(2,+\infty)$ 与 $R(g)=[-1,1]$ 没有公共部分，所以这两个函数不能复合成有意义的新函数.

两个以上的函数也可以复合成一个新函数.例如，由函数 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=(2x+1)$ 复合可构成函数 $y=\sin^2(2x+1)$.

1.1.5 初等函数

在中学，我们已经学过以下 5 类**基本初等函数**.

- **幂函数**：$y=x^\mu$（$\mu\in\mathbf{R}$ 是常数）.
- **指数函数**：$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）.
- **对数函数**：$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$），特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x$.
- **三角函数**：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 等.
- **反三角函数**：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$ 等.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的函数复合，且用一个解析式表示的函数，称为**初等函数**.

一般地，绝大多数分段函数都不是初等函数.而函数 $y=1+\sin 2x$，$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，$y=\mathrm{e}^{\tan(x+1)}$ 等都是初等函数.

例 5 函数 $y=\cos^2\sqrt{x^2+2x}$ 是由函数 $y=u^2$，$u=\cos v$，$v=\sqrt{w}$，$w=x^2+2x$ 复合而成的.

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域.

（1）$y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}+\sqrt{8+2x-x^2}$；　　（2）$y=\sqrt{\dfrac{(x-1)}{(x-2)(x-3)}}$；

（3）$y=\ln(1-2^x)$；　　（4）$y=\arcsin\dfrac{x+1}{2}$；

（5）$y=\sqrt{\ln\dfrac{x^2-9x}{10}}$；　　（6）$y=\arccos\ln\sqrt{1-x}$.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2}, & |x|\leqslant 3,\\ x+1, & |x|>3,\end{cases}$ 求 $f(2)$，$f(3)$，$f(-4)$，并作出函数的图形.

3. 讨论下列函数的单调性.

（1）$y=\sqrt{6x-x^2}$；　　（2）$y=\mathrm{e}^{x^2}$.

4. 若函数 $f(x)$ 的定义域是 $D=[0,1]$，求函数 $f(x^2)$ 和 $f(\sin x)$ 的定义域.

5. 求由下列函数复合而成的复合函数.

（1）$y=\mathrm{e}^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=\cos x$；　　（2）$y=u^2+2u$，$u=\cos x$；

（3）$y=\ln(1+u)$，$u=v^2$，$v=\sin x$.

6. 函数 $y=\ln^2\arctan\sqrt{x}$ 是由哪些基本初等函数复合而成的？

1.2 极　　限

极限的理论和方法是阐述微积分的概念（如导数、微分、积分和无穷级数等）和方法的重要工具，是整个微积分学的理论基础.

1.2.1 数列的极限

早在 2000 多年前，《庄子·天下篇》中就有这样的说法：“一尺之棰，日取其半，万世不竭.”用数学的语言来说，一尺长的木棍，“日取其半”，第一天剩余部分为 $y_1=\dfrac{1}{2}$，第二天剩余部分为 $y_2=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2^2}$，…，到第 n 天剩余部分为 $y_n=\dfrac{1}{2^n}$. n 越来越大时，剩余部分 y_n 越来越小，但永远不会等于零，即这个过程可以“万世不竭”.显然，随着 n 的无限增大，y_n 无限接近于零.事实上，这其中蕴含着朴素的极限思想.这里得到的一串数

$$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$$

就是一个数列.

一般地，按一定顺序排列的一列数

$$a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n,\cdots$$

称为**数列**，简记为 $\{a_n\}$.数列 $\{a_n\}$ 中的每个数称为数列的**项**，a_n 称为数列的**通项**或**一般项**，正整数 n 称为数列的**项数**.

例如，以下都是数列的例子.

（1）$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$，一般项 $a_n=\frac{1}{n}$.

（2）$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots,\frac{(-1)^{n+1}}{n},\cdots$，一般项 $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

（3）$\frac{0}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4},\frac{4}{5},\cdots,\frac{n+(-1)^n}{n},\cdots$，一般项 $a_n=\frac{n+(-1)^n}{n}$.

（4）$1,2,3,\cdots,n,\cdots$，一般项 $a_n=n$.

（5）$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$，一般项 $a_n=(-1)^{n-1}$.

（6）$1,-2,3,-4,\cdots,(-1)^{n-1}n,\cdots$，一般项 $a_n=(-1)^{n-1}n$.

容易看出，上述数列可以分为两类.

一类是，当 n 无限增大时，一般项无限趋近于某个常数，如式（1）与式（2）中的 a_n 无限趋近于0，式（3）中的 a_n 无限趋近于1；另一类，如上述的式（4）、式（5）、式（6），当 n 无限增大时，一般项并不趋近于一个固定的常数.这种对于无穷数列一般项的变化趋势的考查，反映了数列极限的思想.

定义 1 $\{a_n\}$ 是一个数列，如果当 n 无限增大时，a_n 无限接近（或趋近）于某一个确定的常数 a，则称常数 a 是数列 $\{a_n\}$ 的**极限**，或称数列 $\{a_n\}$ **收敛于** a.记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ 或 } a_n \to a(n\to\infty).$$

如果数列 $\{a_n\}$ 有极限，则称数列 $\{a_n\}$ **收敛**，或说"$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在"；如果数列 $\{a_n\}$ 没有极限，则称数列 $\{a_n\}$ 是**发散**的，或说"$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在".

由此定义，我们可以说数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 收敛于 0 或"$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$"；而数列 $\left\{(-1)^{n-1}\right\}$ 中各项无限多次在 1 和 -1 中来回取值，故不可能存在一个常数 a，使得当 n 无限增大时，一般项无限与之接近，所以是发散的，或说"$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}$ 不存在".

例 1 考查数列 $\{a_n\}$ 的极限，其中 $a_n=\begin{cases}\dfrac{n}{1+n}, & n\text{为奇数},\\[2mm] \dfrac{n}{1-n}, & n\text{为偶数}.\end{cases}$

解 因为 n 为奇数时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{1+n}=1$，$n$ 为偶数时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{1-n}=-1$，所以，当 $n\to\infty$，所给数列 $\{a_n\}$ 是发散的.

前面例子中对数列 $\{a_n\}$ 极限的讨论，靠的是观察或直觉，无法从理论上严格地说明数列的极限，例如数列 $\{a_n\}$：$a_n=\frac{n+(-1)^n}{n}$，它的极限为什么是 1 而不是别的什么数呢？为此，需要对数列的极限概念作更精确的说明.

两个数 a 与 b 之间的接近程度可以由它们在数轴上对应点之间的距离，也就是两者差的绝对值 $|a-b|$ 的大小来衡量，$|a-b|$ 越小，a 与 b 越接近.所以，"当 n 无限增大时，a_n 无限接近于 a"，等价于"只要 n 足够大，可以保证 $|a_n-a|$ 小于任何给定的很小的正数".例如，对于数列 $a_n=\frac{n+(-1)^n}{n}$，我们说它的极限是 1，即当 n 无限增大时，a_n 无限接近于 1，这就是说：只要 n 足