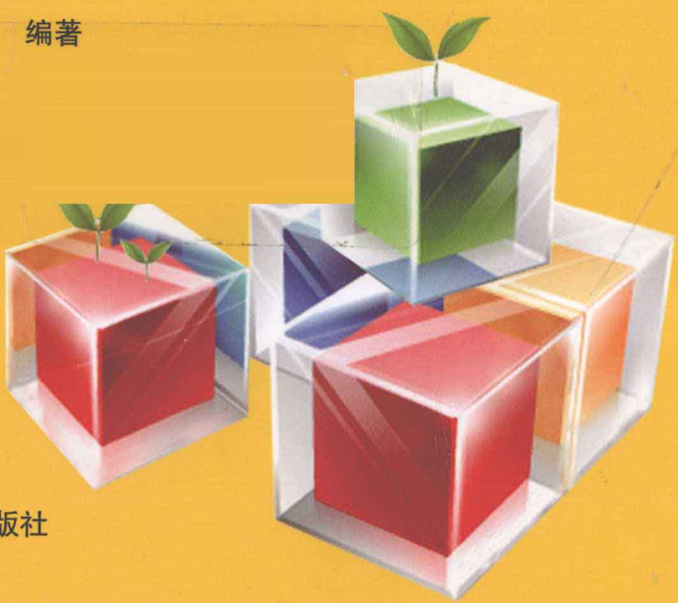
Shuxue Aosai Fudao Congshu

数学奥赛辅导丛书

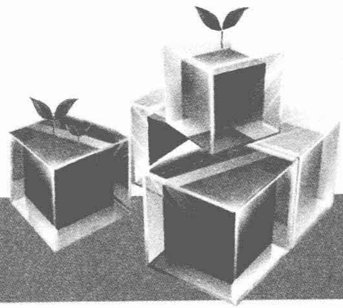
同中学生谈排列组合

Tong Zhongxuesheng Tan Pailie Zuhe

苏 淳 编著



中国科学技术大学出版社



数学奥赛辅导丛书

同中学生谈排列组合

苏　淳　编著

中国科学技术大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

同中学生谈排列组合/苏淳编著. —合肥:中国科学技术大学出版社,2010.7
(数学奥赛辅导丛书)
ISBN 978-7-312-02698-0

Ⅰ.同… Ⅱ.苏… Ⅲ.①排列—高中—教学参考资料②组合—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 091294 号

中国科学技术大学出版社出版发行
地址:安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
网址:http://press.ustc.edu.cn
合肥学苑印务有限公司印刷
全国新华书店经销
*
开本:880×1230/32 印张:3.625 字数:72 千
2010 年 7 月第 1 版 2010 年 7 月第 1 次印刷
定价:8.00 元

序

目前,有关中学生复习资料、课外辅导读物已经出版得很多了,甚至使一些中学生感到不堪负担,所以再出版这类读物一定要注重质量,否则"天下文章一大抄",又无创新之见,未免有误人子弟之嫌.写这类读物如何才能确保质量呢?我想华罗庚老师的两名名言:"居高才能临下,深入才能浅出",应该成为写这类读物的指导思想,他本人生前写的一系列科普读物,包括为中学生写的一些书,也堪称是这方面的范本.

中国科学技术大学数学系的老师们,在从事繁重的教学与科研工作的同时,一向对中学数学的活动十分关注,无论对数学竞赛,还是为中学生及中学教师开设讲座、出版中学读物都十分热心,这也许是受华罗庚老师的亲炙,耳濡目染的缘故,所以至今这仍然是中国科学技术大学数学系的一个传统和特色.

我看了几本他们编写的"数学奥赛辅导丛书"原稿,感到他们是按照华罗庚老师的教诲认真写作的,所以乐之为序.

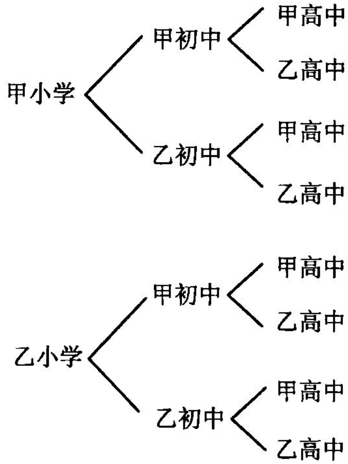
龚　昇

目　　次

1 乘法原理

乘法原理和加法原理是两个最基本的计数原理，人们在历史上很早就认识了它们. 其重要性不仅在于它们是推导排列、组合计数公式的基础，而且在于它们反映出了日常生活中最基本的计数规律，还可直接运用它们去解决许多计数问题.

乘法原理是讨论分阶段办事过程中的计数问题. 大家知道，生活中的许多事情都是分阶段进行的：一个读到高中毕业的学生要经历小学、初中和高中三个阶段；早晨起床要经历穿衣、穿裤、穿袜、穿鞋几个阶段；到食堂吃饭也有买饭、买菜两个阶段. 阶段和阶段之间可能有一定的顺序关系，例如上完小学才能上初中、上高中；也可能有一定的先后顺序，例如可以先买饭后买菜，也可以先买菜后买饭，等等. 每一个阶段的进行方式可能是唯一的，也可能不唯一，例如食堂里只有米饭出售，那么选取主食的方式就是唯一的，但如果既有米饭，又有馒头，那么选取主食的方式就不是唯一的了. 假如各个阶段的进行方式不全是唯一的，那么完成一件事情就有着多种不同的方式. 例如，如果某人在进小学、初中和高中时，都分别有两所学校可以任他选择，那么他就有着多种不同的由小学读到高中的方式：



上面的顺序列出了所有可供选择的 8 种不同方式. 如果我们注意到在升学的 3 个阶段中，每个阶段都有两种不同的选取方式，那么对一共有 8 种不同的读完高中的方式就不会感到奇怪了，这里面有规律 $2\times2\times2=8$.

人们很早就认识了这一规律，并把这种认识总结成为如下的计数原理.

乘法原理：*一件事情如果要分为两个阶段进行，在甲阶段中有 m 种不同进行方式，而在乙阶段中有 n 种不同进行方式，那么完成这件事情就一共有 mn 种不同的方式.*

例如某人到食堂吃饭，如果主食有米饭和馒头两种，他只选其中一种，菜肴有五种，他也只选择其中一种，那么他可以有 $2\times5=10$ 种不同吃法.

如果一件事情不止分为两个阶段进行，那么乘法原理同样适用，完成这件事情的方式数等于各个不同阶段的方式数

的乘积.例如上面的自小学读至高中的例子就是如此.

近来也有人用集合论的观点解释乘法原理.他们把分阶段进行的事情看成是一种多重选取过程,每一个过程都是自某个集合中挑选一个元素,然后考虑一共有多少种不同的挑选方式.例如一件分为两个阶段进行的事情,就是一个二重选取过程,它的第一阶段要在某个指定的集合 A_1 中挑选一个元素,它的第二阶段也要在某个指定的集合 A_2 中挑选一个元素,如果这两个集合中的元素个数分别是 $|A_1|=n_1$, $|A_2|=n_2$,那么就一共有 n_1n_2 种不同的挑选方式.

例如在食堂吃饭的例子中,A_1 中的元素就是米饭和馒头,所以 $|A_1|=2$,A_2 中的元素就是 5 种不同的菜肴,所以 $|A_2|=5$,于是一共就有 $|A_1|\cdot|A_2|=2\times5=10$ 种不同的挑选方式,所以也就有 10 种不同的吃法.

采用集合的观点解释乘法原理会给问题的讨论带来很多方便.我们今后将会看到,重复排列、排列等计数问题都可以看成是多重选取问题.应当努力使自己掌握这种观点.

显然,对于一个 k 重选取问题,只要能够确定出每一阶段上供作选取的集合 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 的内容或其中的元素个数 $|A_1|, |A_2|, \cdots, |A_k|$,那么这个问题的答案 $|A_1|\cdot|A_2|\cdot\cdots\cdot|A_k|$ 也就能够求得了.

我们来看一些基本的例子.

【例 1】 多项式乘积

$$(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3+b_4)$$
$$\cdot(c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6)(d_1+d_2)$$

的展开式中有多少种不同的项?

解 展开式中的每一项都具有 $a_ib_jc_kd_l$ 的形式,其中,$i\in A_1=\{1,2,3\}$,$j\in A_2=\{1,2,3,4\}$,$k\in A_3=\{1,2,3,4,5,6\}$,$l\in A_4=\{1,2\}$,所以这是一个 4 重选取问题. 由乘法原理,展开式中一共有

$$|A_1|\cdot|A_2|\cdot|A_3|\cdot|A_4|=3\times4\times6\times2=144$$

种不同的项.

由上面的解答,可以清楚地看出,通过多重选取观点解释计数问题具有多么简洁明了的优越性.

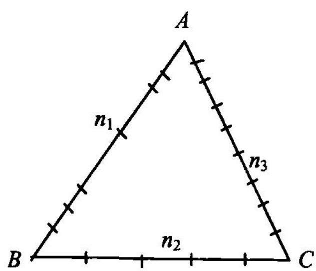


图 1

【例 2】 如图 1,$\triangle ABC$ 的边上分别有 n_1,n_2,n_3 个点(不包括 A、B、C 三点在内). 在三边上的点中各取一个作为三角形的顶点,可以得到多少个不同的三角形?

解 由于分别需在位于 AB 边上的 n_1 个点、位于 BC 边上的 n_2 个点、位于 AC 边上的 n_3 个点中各取一个点作为三角形的顶点,所以这是一个 3 重选取问题. 由乘法原理知:可构成 $n_1n_2n_3$ 个不同的三角形.

乘法原理还在数的整除、因数分解问题中经常用到. 下面来看几个例子.

【例 3】 2 160 能被多少个正整数整除? 能被多少个正偶数整除?

分析 我们知道,如果正整数 n 能被正整数 k 整除,那

么 k 就叫做 n 的一个正约数. 所以本题也就是要求出 2 160 的正约数的个数和它的正偶约数的个数.

解 对 2 160 作素因数分解,得

$$2\ 160 = 2^4 \times 3^3 \times 5$$

所以它的每一个正约数都应该具有形式

$$2^i \cdot 3^j \cdot 5^k$$

其中,i,j,k 都是整数,而且 $0\leqslant i\leqslant 4,0\leqslant j\leqslant 3,0\leqslant k\leqslant 1$. 所以如果要确定 2 160 的一个正约数,就需要分别对 i,j,k 在各自的范围内进行一次选取,因而是一个 3 重选取问题,由乘法原理知其共有

$$5\times 4\times 2 = 40$$

个不同的正约数. 又因为 2 160 的正偶约数一定含有约数 2,所以 $1\leqslant i\leqslant 4,0\leqslant j\leqslant 3,0\leqslant k\leqslant 1$,故知其有

$$4\times 4\times 2 = 32$$

个正偶约数.

【例 4】 每个完全平方数都有奇数个正约数.

证 设 $n=m^2$ 是一个完全平方数,且 m 的素因数分解式为 $m=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$,那么就有

$$n = p_1^{2r_1}p_2^{2r_2}\cdots p_k^{2r_k}$$

记 $A_1=\{0,1,\cdots,2r_1\},A_2=\{0,1,\cdots,2r_2\},\cdots,A_k=\{0,1,\cdots,2r_k\}$,那么 n 的每一个正约数就都具有形式

$$p_1^{j_1}p_2^{j_2}\cdots p_k^{j_k}$$

其中,$j_1\in A_1,j_2\in A_2,\cdots,j_k\in A_k$. 所以由乘法原理可知,$n$ 一共有

$$|A_1|\cdot|A_2|\cdot\cdots\cdot|A_k|=(2r_1+1)(2r_2+1)\cdots(2r_k+1)$$

个正约数，故为奇数个.

例 4 的结论十分有趣，我们再来看两个与这个结论有关的有趣的问题.

【例 5】 有 12 个茶杯，分别编为 1～12 号，杯口全部朝下. 现在按下述规则来翻动它们：第一次把所有杯子都翻过来；第二次只翻动编号是偶数的杯子；第三次只翻动编号是 3 的倍数的杯子；……；第十二次只翻动编号是 12 的倍数的杯子. 证明，经过这样十二次翻动之后，凡编号是完全平方数的杯子的杯口全都朝上.

证 如果一个杯子被翻动了奇数次，杯口就会朝上. 所以本题就是要证明：每个编号是完全平方数的杯子都被翻动了奇数次. 根据翻动规则，一个杯子在第 k 次是否被翻动，取决于它的编号是不是 k 的倍数，或者说 k 是不是它的编号的正约数. 因此，一个杯子的编号有多少个不同的正约数，就被翻动了多少次. 既然每个完全平方数都有奇数个正约数，所以相应的杯子就都被翻动了奇数次，因而杯口朝上.

为了进行下面的讨论，我们引入有序数对和无序数对的概念. 设 u 和 v 是两个实数，并称 (u,v) 为一个数对. 当然 u 和 v 可以相同也可以不同. 在 u 和 v 不同时，就存在着一个是否把 (u,v) 和 (v,u) 看成相同的数对的问题. 如果把它们看成不同的数对，也就是在 u 和 v 之间要考虑先后顺序，这样的数对就叫做有序数对；如果对 (u,v) 和 (v,u) 不加区分，或者说把它们看成是同一回事，也就是在 u 和 v 之间不考虑先后

顺序,这样的数对就叫做无序数列.对 3 个甚至更多的实数 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 也可以相应地引入有序数组和无序数组的概念,关于这些我们以后再作详细介绍.现在我们来看一个与有序数对有关的例题.在这个例题的解答中,我们还可以学到处理计数问题的一些基本方法.

【例 6】 设 u,v 为正整数,如果它们的最小公倍数是 n,就记成$[u,v]=n$,并且说有序正数对(u,v)的最小公倍数是 n(当然有序正整数对(v,u)的最小公倍数也是 n).证明,以 n 作为最小公倍数的有序正整数对的数目恰好与 n^2 的正约数的个数相等.

证 设 n 的素因数分解式为 $n=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$,而$[u,v]=n$.则 u,v 的素因数分解式只能为

$$u=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k},\ v=p_1^{b_1}p_2^{b_2}\cdots p_k^{b_k}$$

其中,$a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_k,b_k$ 都是非负整数,而且 $\max(a_1,b_1)=r_1,\max(a_2,b_2)=r_2,\cdots,\max(a_k,b_k)=r_k$.这里 $\max(a,b)$表示 a 与 b 中较大的一个.

下面来考虑 a_1,b_1 的取值情况.由于 $\max(a_1,b_1)=r_1$,且二者都为非负整数,所以只可能有如下几类情况:(1) $a_1=b_1=r_1$,这时仅有一种情况;(2) $a_1=r_1,b_1<r_1$,这时 b_1 可能为 $0,1,\cdots,r_1-1$ 中任何一个,故可有 r_1 种不同情况;(3) $b_1=r_1,a_1<r_1$,这时与(2)类似,可有 r_1 种不同情况.所以 a_1,b_1 的取值可能有 $2r_1+1$ 种不同情况;……;a_k,b_k 的取值可能有 $2r_k+1$ 种不同情况.于是由乘法原理知 $a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_k,b_k$ 的取值一共有

$$(2r_1+1)(2r_2+1)\cdots(2r_k+1)=t$$

种不同情况.每一种取值情况都对应了一个以 n 作为最小公倍数的有序正整数对(u,v),所以知这样的数对共有 t 对.另一方面,由例 4 的证明可知,n^2 也恰有 t 个不同的正约数.所以两者的数目相等.

由以上几个例题可以看出,乘法原理在帮助我们解决一些与约数、倍数有关的问题时相当有力.而解决各类组数问题则更是乘法原理的用武之处,尤其对各种有限制条件的组数问题更是如此.逐个考虑各个数位上的取数可能情况,是解决这一类计数的常用手法,这在本质上就是一种多重选取过程.下面我们就来看一个组数问题中的典型例子,今后我们还将会多次遇到组数问题.

【例 7】 有多少个能被 3 整除而又含有数字 6 的五位数?其中个位数是 6 的有多少个?

解 由 10 000 至 99 999 共有 90 000 个五位数,其中 30 000个能被 3 整除.为了求出其中含有数字 6 的个数,我们先来考虑不含 数字 6 的个数.采用逐位考虑的办法:

这些数的最高位不能取 0 和 6,而只能为 1,2,3,4,5,7,8,9,故有 8 种选取可能;在千位、百位和十位上,除了不能取 6 之外,其余均可选取,所以各有 9 种选取可能;而最末一位必须取得能使五位数字之和被 3 整除,所以与前四位数字之和被 3 除的余数有关:当余数为 2 时,最末一位数字可以取 1,4,7 中的一个;当余数为 1 时,可以取 2,5,8 中的一个;当余数为 0 时,可以取 0,3,9 中的一个.总之都有 3 种选取可

能. 综合上述分析再利用乘法原理便可求得这类五位数的个数是

$$8 \times 9 \times 9 \times 9 \times 3 = 17\,496$$

除掉这类五位数,剩下的便都含有数字 6. 所以能被 3 整除而又含数字 6 的五位数共有

$$30\,000 - 17\,496 = 12\,504(\text{个})$$

其中个位数是 6 的个数有多少呢? 这还要回到刚才的分析中去. 因为要使这样的五位数能被 3 整除,其充分必要条件是它的前四位数能被 3 整除. 由于这样的四位数共有 3 000个,所以相应的五位数也有 3 000 个.

以上我们只是看到了运用乘法原理进行计数的一些例子. 这些例子中有些是具有一定的综合程度的,它们除了要利用乘法原理外,还用到了加法原理和一些其他技巧,关于这些原理和技巧,我们还要在后面陆续介绍. 在这里我们要强调指出的是:乘法原理和加法原理在计数问题中的作用是极为突出的,在学习排列组合的过程,只是注意了一些具体的计数公式,而忽略了对这两个基本原理的深入掌握,那就是极大的失策.

我们再来看一个综合程度较高的例子.

【例 8】 一种单向行驶的汽车,满载为 25 人,全程共设 14 个车站,中途的每个车站均可上下乘客. 由不同起点到达不同终点的乘客各应购买不同的车票. 在一次单程行驶中,车上最多可卖出多少种不同的车票?

解 车上应准备由每一个车站到达它后面每一个车站

的车票，所以一共应准备

$$13+12+\cdots+2+1=91$$

种不同车票.但它们不可能在一次单程行驶中都卖得出去.我们来考虑其中以前面 7 个车站中的某一个作为起点，而以后面 7 个车站中的某一个作为终点的车票，就应当有 $7\times7=49$ 种之多，凡持有这类车票的乘客都需要乘车通过 7 号车站与 8 号车站之间的路程，但由于汽车满载量为 25 人，所以此类车票中至少会有 $49-25=24$ 种卖不出去.这样一来，车上最多只能卖出 $91-25=67$ 种车票.下面我们来指出，确实存在卖出 67 种车票的可能情况：

站 1→站 2～7 各 1 人； 站 2→站 3～8 各 1 人；

站 3→站 4～12 各 1 人； 站 4→站 5～12 各 1 人；

站 5→站 6～11 各 1 人； 站 6→站 7～11 各 1 人；

站 7→站 8～13 各 1 人； 站 8→站 9～14 各 1 人；

站 9→站 10～14 各 1 人； 站 10→站 11～14 各 1 人；

站 11→站 12～14 各 1 人； 站 12→站 13～14 各 1 人；

站 13→站 14 各 1 人.

其中经过各段路程时车上的乘客人数分别为：

站 1 $\xrightarrow{6人}$ 站 2 $\xrightarrow{11人}$ 站 3 $\xrightarrow{18人}$ 站 4 $\xrightarrow{23人}$ 站 5 $\xrightarrow{25人}$ 站 6 $\xrightarrow{25人}$ 站 7 $\xrightarrow{25人}$ 站 8 $\xrightarrow{25人}$ 站 9 $\xrightarrow{24人}$ 站 10 $\xrightarrow{21人}$ 站 11 $\xrightarrow{16人}$ 站 12 $\xrightarrow{11人}$ 站 13 $\xrightarrow{6人}$ 站 14.

2 重复排列

高中课本未对重复排列作出介绍,其实它是排列组合的最基本类型,是对乘法原理的最直接应用.

重复排列的最简单例子是电话号码.某市的电话号码是7位数,每一个数位上的数码都无非是0,1,2,3,4,5,6,7,8,9;而且不同数位上的数码可能是相同的,例如:7337566,6330011,5357710,7522633,等.如果我们把0000000也算成一个号码的话,那么该市目前最多可容纳多少部电话机(不包括分机)呢?这个问题由乘法原理是不难解决的,因为我们只要算出这个市可以列出多少个不同的号码就行了.由于每一个电话号码都是一个7位数,而每一个数位上的数码又都有10种不同可能,所以一共有 $10\times10\times10\times10\times10\times10\times10=10^7$ 即1 000万个不同的电话号码.

从上述的例子可以看出,一个重复排列问题无非就是一个依次进行的多重选取过程,并且每一重选取都在同一个集合中进行,已经选过的元素还可以再选.

当然这里所说的"依次"进行,完全是一种约定,因为究竟先决定哪一个数位的数码是没有关系的.但是这种约定却是免不了的,因为电话号码是一种有序数组,6330011与3361100代表着两个不同的电话号码,如果事先未曾约定选

取顺序，那么对于选出的两个0，两个3，两个1和一个6，究竟该代表哪一个电话号码呢？

下面我们再来看一些重复排列的例子.

【例1】 我国是世界上最早讨论重复排列的国家，《易经》中所收集的资料可以追溯到公元前七世纪.《易经》中有两个符号，叫做“阳爻”和“阴爻”，《易经》中讨论了由这样两个符号形成的3字符和6字符的所有可能情况，其中的3字符是：

阳阳阳、阳阳阴、阳阴阳、阴阳阳、

阳阴阴、阴阳阴、阴阴阳、阴阴阴.

这刚好就是对集合{阳，阴}依次进行的3重选取过程的所有可能的结果，或者叫做由阳、阴二者中每次选取3个的重复排列的所有可能情况. 由于其情况数共有 $2\times2\times2=2^3=8$ 个，所以《易经》将它称为“八卦”. 相应地，6字符一共有 $2^6=64$ 种不同情况，称为“六十四卦”.

【例2】 公元8世纪时，我国流传过这样一个问题，据说是一个和尚提出的：

围棋棋盘上有361个位置，既可放黑子或白子，又可空着，共有多少种不同的可能情况？

显然这是一个重复排列问题，它要从集合{黑子，白子，空着}中依次进行361次选取，所以知有 3^{361} 种可能情况.

通过上述讨论，我们可对重复排列总结出一个计数公式：

如果在同一个 n 阶集合中依次进行 k 次选取，而且选过