

全国十二大考研辅导机构指定用书



金榜® 考研数学系列

全国硕士研究生入学考试用书

数学全程预测 100题

数学三

SHUXUE QUANCHENG YUCE 100TI (SHUXUESAN)

主编 李永乐

2010

新华出版社

全国十二大考研辅导机构指定用书



金榜® 考研数学系列

全国硕士研究生入学考试用书

数学全程预测 100 题

数学三

SHUXUE QUANCHENG YUCE 100TI (SHUXUESAN)

主编 李永乐

编者：北京理工大学
北 京 大 学
北 京 大 学
清 华 大 学
北京交通大学
(按姓氏笔画排序)

王式安
刘西垣
李正元
李永乐
赵达夫

新 华 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

数学全程预测 100 题(数学三)/李永乐主编

北京:新华出版社,2007.8

全国硕士研究生入学考试用书

ISBN 978-7-5011-8059-2

I. 数… II. 李… III. 高等数学—研究生—入学考试—习题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 128637 号

敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,请读者注意识别。

数学全程预测 100 题(数学三)

责任编辑:孙红霞

装帧设计:金榜图文设计室

出版发行:新华出版社

网 址:<http://www.xinhupub.com>

地 址:北京石景山区京原路 8 号

邮 编:100040

经 销:新华书店

印 刷:北京云浩印刷有限责任公司

开 本:787mm×1092mm 1/16

印 张:8.25

字 数:195 千字

版 次:2007 年 8 月第 1 版

印 次:2009 年 8 月第 3 次印刷

书 号:ISBN 978-7-5011-8059-2

定 价:12.00 元

本社购书热线:(010)63077122 中国新闻书店电话:(010)63072012

图书如有印装质量问题,请与印刷厂联系调换 电话:(010)82570560

前 言

本书是硕士研究生入学考试强化训练阶段的复习用书。本书是针对考生在前一个阶段,对考研数学的常见题型、方法复习的基础上设计的重要练习题。它是《数学基础过关 660 题》的姊妹篇。旨在对考生在考前进行系统综合训练,以期巩固、提高复习成果,帮助考生查漏补缺,进而达到考试要求,增强应试能力,提高考试成绩。

我们在认真研究历年试题和新大纲的基础上,对考试的重点、难点以及对考生经常出现的错误加以剖析和归纳整理,用抓住基础、突出重点的方法,设计出不同解题思路层次的试题整合成书。本书“**解答**”——思路清晰、方法步骤详细、解题过程规范;“**评注**”——该题所考查的知识点(或命题意图),解题思路归纳总结和延伸,常见错误和注意事项。同时,在解题过程中,力求一题多解,注意扩展考生视野和思路。

数学离不开计算,硕士研究生入学考试也非常重视对计算能力的考查。因此,考生复习时要注意提高运算能力,要提高计算的准确性,不仅要动脑而且要动手,不能华而不实,眼高手低,丢三落四,犯“低级”错误。

硕士研究生入学考试科目从 2003 年调整之后,数学科的权重在原有基础上增加了 50%,因此数学成绩对总分将有更大的影响,数学科的地位愈显重要。同时由于数学科本身的特点,考生的数学成绩历年来差别较大,这说明数学科的考试选拔性质更突出。因此,希望考生要

根据考试大纲认真踏实、全面系统地复习,心态要平和,戒浮躁,要循序渐进,不断积累,步步提高,面对激烈的竞争,望有志者抓紧、抓细、抓早。

同学们在使用本书时,最好能先自己动手想与算,不要急于看解答。评注中的一些题外话亦值得细心揣摩。

本书也可供大专院校的学生在学习微积分、线性代数、概率论与数理统计时参考。

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,书中难免有错误和疏漏之处,恳请读者批评指正。

编 者

2009 年 8 月

目 录

微积分	(1)
线性代数.....	(9)
概率论与数理统计	(14)
答案及解析	(20)
微积分	(20)
线性代数	(70)
概率论与数理统计	(93)

微积分

1 求下列极限:

(I) $J = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]. \quad \frac{1}{2}$

(II) $J = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + 2^{\frac{1}{x}} \right)^x. \quad \frac{3}{2}$

2 设 a, b, p 为非零常数, 求 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a + be^{\frac{1}{x}}}{a - be^{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{\sin px}{|x|} \right).$ $-p$

3 设 $f(x)$ 有一阶连续导数, $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} f(t) dt}{\left(\int_0^x f(t) dt \right)^2}.$

4 设 $x_n = \frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$

5 求数列极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, 其中 $x_n = n \left(e \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} - 1 \right).$ $\frac{1}{2}$

6 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = 1 - \cos \sqrt{(1+x^3)^2 - 1}$, $g(x) = \int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin t^3} dt$, $h(x) = e^{-2x^2} - \cos 2x$ 都是无穷小量, 将它们按关于 x 的阶数从低到高的顺序排列.

7 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 + ax + b}{(x-1)(x+2)}, & (x \neq 1, x \neq -2), \\ 2, & (x = 1). \end{cases}$

(I) $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处连续, 求出参数 a, b 的值.

(II) 对求出的 a, b 值, 求 $f(x)$ 的间断点并判断类型.

8 设 $f(x)$ 是以 3 为周期的可导函数且 $f'(4) = 1$, 求

$$J = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) + f(1+2\sin x) - 2f(1-3\tan x)}{x}.$$

9 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 可导且 $f(0) = 1, f'(0) = 3$, 求数列极限

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{\frac{1}{n(1-\cos \frac{1}{n})}}.$$

10 (I) 设 $y = y(x)$ 由方程 $y + e^y = x$ 确定, 求 $y'(x)$ 与 $y''(x)$.

(II) 设 $f(x), \varphi(x)$ 均有二阶导数, 又 $u = f(\varphi(x) + y^2)$, 其中 x, y 满足方程 $y + e^y = x$, 求 $\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}$.

11 设 $f(x)$ 为连续函数, 求 $d\left(\int_a^b f(x^2 + t) dt\right)$.

12 $y = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$, 求 $y^{(100)}$.

13 由原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线, 求该切线方程与该切点处曲线 $y = \ln x$ 的法线方程.

14 设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有二阶导数且 $y' \neq 0, x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数.

(I) 试将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2} + (y + \cos x) \left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$ 变换为 $y = y(x)$ 所满足的微分方程;

(II) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0) = -\frac{1}{2}, y'(0) = 2$ 的解;

(III) 请验证, 对所求的 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 存在反函数.

$$15 \quad \text{设 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} & x < 0, \\ \frac{1}{2} & x = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x \sqrt[n]{1+x^n} + \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-t^2} dt & x > 0, \end{cases}$$

(I) 讨论 $f(x)$ 的连续性和可导性, 不可导时是否左右可导?

(II) 判断 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上是否有界, 并说明理由.

$$16 \quad \text{求反常积分 } I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx \text{ 的值.}$$

$$17 \quad \text{设 } f(x) = \begin{cases} \frac{4}{4+x^2}, & x \leq 0, \\ e^{-3x}, & x > 0 \end{cases}, \text{ 求 } \int f(x) dx.$$

18 求定积分及定积分的极限.

$$(I) J = \int_0^\pi x |\sin nx| dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$$(II) \text{ 数列极限 } J = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+a} x \sin \frac{1}{x} dx, \text{ 其中 } a \text{ 为常数.}$$

19 过坐标原点作曲线 $y = e^{\frac{1}{2}x}$ 的切线, 该切线与曲线 $y = e^{\frac{1}{2}x}$ 及 y 轴围成平面图形 D .

(I) 求 D 的面积 A ;

(II) 求 D 绕 y 轴旋转一圈所得旋转体体积 V .

$$20 \quad \text{设 } f(x) = \int_0^x \sqrt{x^2 - t^2} dt + \int_0^1 |x^2 - t^2| dt, x > 0,$$

(I) 求 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的最小值点;

(II) $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有无最大值? 为什么?

21 (I) 求曲线 $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$ 的拐点.

(II) 求曲线 $y = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ 的渐近线方程.

22 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续且

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x (x-2t)f(t)dt}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

求证:

(I) $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有连续的导数;

(II) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增, 则 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 单调递增, 在 $[0, +\infty)$ 单调递减;

(III) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是偶函数, 则 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是奇函数.

23 设 $x \in (0, 1)$, 证明不等式 $\frac{1-x}{1+x} < e^{-2x}$.

24 设 $a > 0$, 证明不等式

$$\int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{1 + e^x} dx > \int_0^a \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{1 + e^x} dx.$$

25 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 二阶可导, $f''(x) > 0 (x \in (-\infty, +\infty))$, 求证:

(I) 若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1} = 5$, 则 $f(x) > 5x - 2 (\forall x \neq 1)$.

(II) 若 $f(0) = 0$, 对 $\forall a > 0$, 则 $\int_0^a xf(x)dx > \frac{2}{3}a \int_0^a f(x)dx$.

26 讨论函数零点存在性与个数.

(I) 试证方程 $\int_0^x \sqrt{1+t^4}dt + \int_{\cos x}^0 e^{-t^2}dt = 0$, 有且只有一个根.

(II) 设 $f(x) = x^4 - 4x + 1$, 试讨论方程 $f(x) = 0$ 有几个根.

27 设 $0 < a < b$, $g(x)$ 在 $[a, a+b]$ 上连续, 在 $(a, a+b)$ 内可导, 且 $f(a) = b$, $f(b) = a$, $f(a+b) = a+b$, 证明存在一点 $\xi \in (a, a+b)$ 使得 $f'(\xi) + g'(\xi)[f(\xi) - \xi] = 1$.

28 设 $f''(0)$ 存在, $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - xf(x)}{x^3} = \frac{2}{3}$, 求出 $f(0)$, $f'(0)$ 及 $f''(0)$ 的值.

29 设需求函数和总成本函数分别为 $P = a - bQ$, $C = \frac{1}{2}Q^2 + 53Q + 20$, 当需求 Q 对价格 P 的弹性 $\eta = -\frac{73}{11}$, 收益 R 对产量 Q 的边际 $\frac{dR}{dQ} = 62$ 时, 其利润最大.

(I) 求利润最大时的产量;

(II) 确定 a, b 的值.

30 设某产品总产量 $Q(t)$ 的变化率为

$$\frac{30}{t^2} e^{-\frac{3}{t}} + 2 (\text{万吨/年})$$

(I) 投产后多少年可使平均产量达到最大值? 并求此最大值;

(II) 在达到平均年产量最大值后, 求再生产 3 年的平均年产量.

31 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续, 在 $(0, +\infty)$ 有连续导数. 求解下列方程:

(I) 若 $f(x)$ 满足方程 $x \int_0^1 f(tx) dt + 2 \int_0^x f(t) dt = xf(x) + x^3 (x \geq 0)$, 求 $f(x)$ 的表达式.

(II) 若 $f(x)$ 满足方程 $f(x) - 1 = \int_1^x \left[\frac{f^2(t)}{t^2} - \frac{f(t)}{t} \right] dt, (x > 0)$, 求 $f(x)$.

32 以 $y = (c_1 + c_2 x + x^2) e^{-2x}$ (其中 c_1, c_2 为任意常数) 为通解的二阶线性常系数微分方程是?

33 求一曲线通过 $(2, 3)$, 它在两坐标轴间的任意切线段均被切点平分, 求此曲线方程 $y = y(x)$.

34 设 $f(x, y) = \int_{\arctan \frac{y}{x}}^{x^2+y^2} g(t) dt$, 其中 $g(t)$ 连续, 求 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

35 已知 $(y^2 + ay^2 \sin x) dx + (bxy - 2y \cos x) dy$ 是某二元函数 $u(x, y)$ 的全微分, 则常数 a, b 的值为多少.

36 设 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 连续, 给定

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} f(x, y), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

讨论 $F(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点的可微性, 若可微请求出 $F(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的全微分.

37 设 $u = u(x, y)$ 由方程组 $u = f(x, y, z, t), g(y, z, t) = 0, h(z, t) = 0$ 确定, 其中 f, g, h 有连续偏导数且 $g'_z h'_t - g'_t h'_z \neq 0$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$.

38 设函数 $u = f(\ln \sqrt{x^2 + y^2})$ 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$, 求 $f(t)$ 的表达式.

39 设某产品的产量 Q 与两种原料的投入量 x, y 的函数关系为 $Q = 20[\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}y^{-\frac{1}{4}}]^{-4}$, 该产品的成本函数为 $C = 4x + 3y$.

(I) 若限定成本预算为 80, 计算使产量达到最高的原料投入量 x 和 y ;

(II) 若限定产量为 120, 计算使成本最低的原料投入量 x 和 y .

40 设有二重积分

$$I_1 = \iint_{D_1} x^2 y dx dy, I_2 = \iint_{D_2} \sqrt{3 - x^2 - y^2} dx dy, I_3 = \iint_{D_3} \ln(x^2 + y^2 + \frac{1}{2}) dx dy$$

其中

$$D_1 = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\},$$

$$D_3 = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq \frac{1}{2}\},$$

请将这三个二重积分按大小排序.

41 求二重积分:

(I) $J = \iint_D (|x| + |y|) d\sigma$, 其中 D 由曲线 $xy = 2, y = x + 1, y = x - 1$ 围成.

(II) $J = \iint_D (x+y) dx dy$, 其中 D 由直线 $x=a, x=0, y=a, y=-a$ 及曲线 $x^2 + y^2 = ax, (a > 0)$ 所围.

42 设 D 由 x 轴, y 轴及直线 $x+y=\pi$ 所围成平面区域, 计算 $\iint_D |\cos(x+y)| dx dy$.

43 求累次积分:

$$(I) J = \int_0^1 dy \int_{\frac{1}{y^3}}^1 \sqrt{1-x^4} dx.$$

$$(II) J = \int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^x \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2} \sqrt{4-(x^2+y^2)}}.$$

44 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 二重积分 $I = \iint_D f(x, y) d\sigma$ 在极坐标系下的二次积分为 $I = \int_{\arctan \frac{1}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}}^{\frac{2}{\cos\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$, 请将它化为直角坐标系下的二次积分.

45 讨论级数的敛散性:

(I) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 是它的部分和, 求证: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 收敛.

(II) 设常数 $a > 0$, 求证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{1+\frac{a}{n}}}$ 条件收敛.

(III) 求证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1)$ 收敛.

46 求下列幂级数的收敛区间及收敛域:

$$(I) x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}.$$

$$(II) \sum_{n=0}^{\infty} 4^{n^2} x^{n^2}.$$

47 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$,

(I) 求证: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} \quad (|x| < +\infty)$;

(II) 求 $f^{(n)}(0)$.

48 级数求和:

(I) 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数 $S(x)$.

(II) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ 的和函数 $S(x)$.

49 设曲线 $y = \frac{1}{x^3}$ 与直线 $y = \frac{x}{n^4}, y = \frac{x}{(n+1)^4}$ 在第一象限围成图形的面积为 $I(n)$, 其中 n 为自然数.

(I) 求证: $I(n) = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

(II) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} I(n)$ 的和.

50 求解下列差分方程.

(I) 设 $y_0 = 6$, 求差分方程 $2y_{t+1} - y_t = 5 \sin \frac{\pi}{2} t$ 的解 y_t .

(II) 求差分方程 $y_{t+1} - y_t = 2^t - 1$ 的通解 y_t .

线性代数

51 设 n 阶矩阵 A 和 B 满足 $A + 2B = AB$

(I) 证明: $A - 2E$ 为可逆矩阵, 其中 E 为 n 阶单位矩阵;

(II) 证明: $AB = BA$;

(III) 已知 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 求矩阵 A .

52 设 A, B 均为 n 阶反对称矩阵

(I) 证明: 对任何 n 维列向量 α , 恒有 $\alpha^T A \alpha = 0$;

(II) 证明: 对任何非零实数 k , 恒有 $A - kE$ 是可逆矩阵;

(III) 证明: 若 $AB - BA$ 是可逆矩阵, n 必是偶数.

53 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & a & 3 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 等价

(I) 求 a 的值; $a = b$

(II) 求可逆矩阵 P 和 Q , 使 $PAQ = B$.

54 已知两个向量组

(I) $\alpha_1 = (1, 3, 0, 5)^T, \alpha_2 = (1, 2, 1, 4)^T, \alpha_3 = (1, 1, 2, 3)^T$;

(II) $\beta_1 = (1, -3, 6, -1)^T, \beta_2 = (a, 0, b, 2)^T$

等价, 求 a, b 的值, 并写出等价时的线性表达式.

55 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 0, 2)^T, \alpha_2 = (-1, 0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (2, 3, a, 7)^T, \alpha_4 = (-1, 5, 3, a+11)^T$ 线性相关, 而且向量 $\beta = (1, 0, 2, b)^T$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 试将 β 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出;

(Ⅲ) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组. 并将向量组中其余向量用该极大线性无关组线性表出.

56 设 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 均是三维向量, 且 α_1, α_2 线性无关, β_1, β_2 线性无关, 证明存在非零向量 γ , 使得 γ 既可由 α_1, α_2 线性表出, 又可由 β_1, β_2 线性表出.

当 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 时, 求出所有的向量 γ .

57 设 n 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, A 为 $m \times n$ 矩阵, 试讨论向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 的线性相关性.

58 已知 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, β 是任意一个 n 维向量.

(I) 证明存在不全为 0 的 k_1, k_2, k_3 使得向量组 $k_1\beta + \alpha_1, k_2\beta + \alpha_2, k_3\beta + \alpha_3$ 仍线性相关;

(II) 当 $\alpha_1 = (1, 3, 5, -1)^T, \alpha_2 = (2, -1, -3, 4)^T, \alpha_3 = (5, 1, -1, 7)^T$ 时, 求出所需要的 k_1, k_2, k_3 .

59 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是三阶矩阵, 其中 $\alpha_1 \neq 0$, 矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$ (k 为常数)

且满足 $AB = 0$, 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大线性无关组, 并将其余向量用这个极大线性无关组线性表示.

60 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 + 3x_4 = b+5 \\ 4x_1 + 4x_3 + (a+6)x_4 = 16 \end{cases}$$

讨论参数 a, b 取何值时, 方程组无解、有解; 当方程组有解时求出其所有的解.

61 已知方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + ax_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + (a+3)x_3 = b+8 \end{cases}$$

有两个不同的解

(I) 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$.

(II) 求 a, b 的值, 并求方程组的通解.

62 已知 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是四阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是四维列向量, 若方程组 $Ax = \beta$ 的通解是 $(1, 2, 2, 1)^T + k(1, -2, 4, 0)^T$, 又 $B = (\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta - \alpha_4)$, 求方程组 $Bx = 3\alpha_1 + 5\alpha_2 - \alpha_3$ 的通解.

63 已知方程组 (1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + ax_3 - ax_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$ 与 (2) $\begin{cases} x_1 + bx_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + cx_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$ 同

解.

(I) 求 a, b, c 的值;

(II) 求方程组满足 $x_1 = x_2$ 的全部解.

64 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, A^T 是 A 的转置, β 是 n 维列向量

证明: (I) 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 与 $A^T Ax = 0$ 同解;

(II) 秩 $r(A^T A, A^T \beta) = r(A)$.

65 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(I) 求矩阵 A 的特征值, 特征向量;

(II) 求 A^{10} .

66 已知 $A = E + \alpha\beta^T$, 其中 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\beta = (b_1, b_2, b_3)^T$, 且 $\alpha^T \beta = 2$

(I) 求矩阵 A 的特征值与特征向量;

(II) 证明: A 可逆, 并求 A^{-1} ;