MAGIC MATH

魔法数学

特别合作 搜狐教育 中学生学习报

魔力！高效！经典！权威！

总主编·蔡上鹤

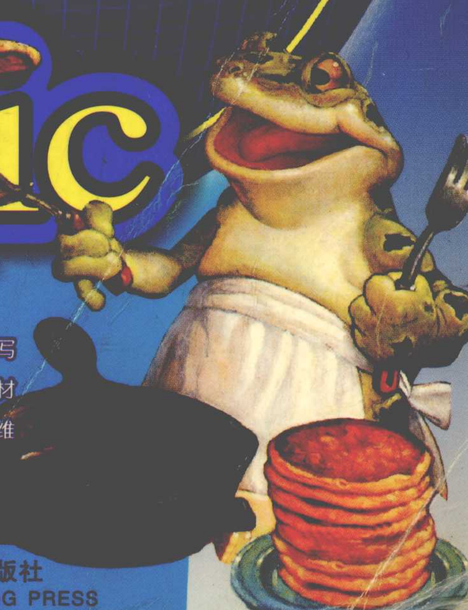
魔法数学

体验征服学习考试精彩感觉

超级讲解

高二上 ·人教版·

Magic



丛书主编／黄 新

- 专家领衔，名校参与，名师撰写
- 全面、详细、透彻解析最新教材
- 情景设置，自主探究，启迪思维

著名节目主持人
魔法教辅品牌代言人 何炅

长征出版社
CHANGZHENG PRESS

魔法数学

Magic

总主编·蔡上鹤

魔力！高效！经典！权威！

魔法数学 超级讲解

高二上 ◆人教版◆

丛书主编：黄　新
本册主编：田祥高
编　　委：蔡琼芳　曹和荣　程万里　方志芳　冯军民
耿绍清　管一新　郭[illegible]
胡冠群　胡玲丹　胡[illegible]
李秀[illegible]　刘杰峰　罗[illegible]
饶水平　石胜书　宋[illegible]　[illegible]　[illegible]
汪正龙　王长法　王永怀　吴支明　伍新红
姚金枝　张[illegible]志　张亚良　郑金华

长征出版社
CHANGZHENG PRESS

图书在版编目（CIP）数据

魔法数学超级讲解/魔法教学与研究中心主编. —北京：长征出版社，2004
ISBN 7-80204-033-7

Ⅰ. 魔…　Ⅱ. 魔…　Ⅲ. 数学课—中学—教学参考资料
Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 109129 号

魔法数学超级讲解高二上

主创设计 / 魔法教育发展研究中心
电　　话 / 010－80602977
网　　址 / http://www.magic365.com

出　　版 / 长征出版社
（北京市西城区阜外大街 34 号　邮编：100832）
行销企划 / 北京九恒世纪文化有限公司
（服务热线：010－80602977）
经　　销 / 全国新华书店
印　　刷 / 北京泰山兴业印务有限公司
开　　本 / 880×1230　　1/32
字　　数 / 11000 千字
印　　张 / 311 印张
版　　次 / 2005 年 6 月第 1 版
印　　次 / 2005 年 6 月第 1 次印刷
书　　号 / ISBN 7-80204-033-7/G·339
全套定价 / 450.00 元

Magic

魔法系列丛书

前　言

Preface

这是一套完全以新课程改革为理念的超越式全解类教辅，系魔法教育发展研究中心的专项研究成果。与同类教辅图书相比，具有以下鲜明特点：

权威——丛书在我国基础教育界权威、国内顶级教材专家精心指导下，在国内百余所重点中学的鼎力协助下，由多年在一线从事教学和研究的特、高级教师编写而成。

全面——知识点分布全面，涵盖了中学教学全部课程及教与学的全部过程；吸收了全国各重点中学在教学和备考当中的先进理念、经验；融会了当前考试和教材改革的最新内容。

详细——对教材内容讲解透彻详细，尤其注重对思维方法、理解过程和记忆方法的详细讲解；解题不仅有详细的思路和过程，还对“一题多解”的题有详细的解答。

新颖——以最新教改精神为依据，突出学生主体学习，强调“感受、观察、体验、参与社会生活的能力”，注重构建“情景化”“生活化”的教学氛围，创造“自主性”“探究性”“趣味性”的学习模式。

透彻——对新课标教材、现行教材、教纲、考纲及新课改下的教学模式研究透彻；对问题讲解透彻，一题多问，多处提醒，随处警示，培养发散思维、多向思维、创新思维的能力。

科学——体例设置科学，对知识点各个击破，根据同步学习的需要，真正体现“围绕知识点，突破重点、难点，引发思考，启迪思维”，实现由知识到能力的过渡。

丛书设置了【问题探知】【教材全解】【疑难解析】【拓展探究】【自我测评】等公共栏目，为了充分体现学科和学段的不同，还设置了【考试技巧】【思维整合】等个性化栏目。

丛书是经过多年从事教学研究的专家多次多方研讨、论证后立项，由教学经验丰富的老师编写而成的。但由于时间仓促，难免会有纰漏，恳请各位专家、老师和同学批评指正。

编　者

Magic

附耳细说——阅读导航

亲爱的同学们，欢迎来到这个学习和成长的乐园，请初到者先注意以下提示，以免迷路。

问题探知

引导你从亲身经历的生活中探索发现新知识。

教材全解

对教材中的重点、难点、疑点、易错点、易混淆点、考点进行逐词、逐句、逐图、逐表、逐段透彻解读，对每道例题、习题解题的关键点、技巧点和思维的延伸点、发散点进行详细剖析。

疑难解析

详细解答教材中的疑难问题和你在解题过程中遇到的疑难问题。

拓展探究

引导你学会思维拓展、延伸、发散的方法、技巧和探究方案的设计，自主进行实验或实践活动，培养你独立研究、发现问题、解决问题的能力和创新思维能力。

思维整合

对每节讲解的内容和例题进行一对一的归纳总结，指导你进行思维整合。

自我测评

精选精编名题新题，让你自测自评。

Magic

目 录

Contents

Magic

目　　录

Contents

第六章 不等式

6.1 不等式的性质

问题探知

探究 1：

今有边长为 $a,b(a>b)$ 的长方形铁板，现要用它围成一个底面是正方形的长方体贮水箱的侧面，以长边为底边所围成的长方体贮水箱比以宽为底边所围成的长方体贮水箱贮水多吗？

探究 2：

早年，有一唱片公司老板交给学徒 30 张老式唱片，一元钱 2 张；30 张新式唱片，一元钱 3 张，当天售完，共得 15＋10＝25 元. 第二天，老板又拿出新老唱片各 30 张交给学徒，学徒心想：何必自找麻烦分开卖，干脆 2 元钱 5 张唱片，当天全部售完后，到结账时发现只得了 $(60\div5)\times2=24$ 元，怎么少了一元钱？这一元哪去了？

教材全解

温故知新

1. 用＿＿不等号＿＿连接起来的式子叫做不等式.

思维链接

不等号（>、<、≥、≤）

2. 若两个不等式的________,则这两个不等式叫做同向不等式.

3. 若两个不等式的________,则这两个不等式叫做异向不等式.

不等号的方向相同

不等号的方向相反

新知识点导学

▲知识点1 不等式的基本性质

$a>b\Leftrightarrow a-b>0$;$a=b\Leftrightarrow a-b=0$;$a<b\Leftrightarrow a-b<0$.

提醒

不等式的基本性质的作用在于:

(1)化归:不等式的基本性质是把两个实数的大小关系转化为两个实数的差的符号的确定,而利用实数的四则运算的符号法则、非负实数的有关性质等有关知识可以帮助我们顺利地确定其符号,因而不等式的基本性质起到了化生为熟的作用.

(2)依据:不等式的基本性质是比较大小、不等式性质的证明、不等式的证明、解不等式的主要依据.

【例1】已知 $a>b>0$,比较$\dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$与$\dfrac{a-b}{a+b}$的大小.

【分析】由不等式的基本性质可知,先作差,作差后其符号还不能确定,怎么办?这就需要对代数式进行恒等变形,使它能利用符号法则来确定其符号.

【解答】$\dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}-\dfrac{a-b}{a+b}=(a-b)\left(\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^3+b^3}-\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^3+b^3}\right)=\dfrac{2ab(a-b)}{a^3+b^3}$.

$\because a>b>0$,$\therefore a-b>0$,$\therefore \dfrac{2ab(a-b)}{a^3+b^3}>0$,

$\therefore \dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}-\dfrac{a-b}{a+b}>0$,即$\dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}>\dfrac{a-b}{a+b}$.

特别提示:

作差后,化为积商有利于符号的确定.

解题规律

1. 利用不等式的基本性质比较两个代数式的大小的程序是:作差$\longrightarrow$变形$\longrightarrow$判断符号$\longrightarrow$下结论.

2. 变形的方向是向有利于差式符号的确定的方向变形,例如变形为积商的形式、非负实数之和(其和仍为非负实数)等,它的实质是将差式符号的确定分解为若干个代数式的符号的确定.

$-2(m^2-mx)$

3. 常用的变形方法有:因式分解、配方、拆(拆项)、凑(拼凑)、有理化、取倒数等.

【同类变式1】已知 $x\in\mathbf{R}$,$m\in\mathbf{R}$,比较 x^2+x+1 与 $-2m^2+2mx$ 的大小.

【分析】在这里,作差后,无法进行因式分解,转化为积的形式,怎么办?注意到在这里有两个字母 x 和 m,因此我们只有对它们进行配方,把它转化为非负实数之和,从而确定其符号.

【解答】$\because x^2+x+1-(-2m^2+2mx)=x^2-(2m-1)x+2m^2+1$

$=\left(x-\frac{2m-1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(2m-1)^2+2m^2+1=\left(x-m+\frac{1}{2}\right)^2+m^2+m+\frac{3}{4}$

$=\left(x-m+\frac{1}{2}\right)^2+\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$,

$\therefore\ x^2+x+1>-2m^2+2mx$.

【同类变式 2】若 $a\neq-1$ 且 $a\in\mathbf{R}$,试比较$\frac{1}{1+a}$与 $1-a$ 的大小.

【解答】$\because\ \frac{1}{1+a}-(1-a)=\frac{a^2}{1+a}$,

$\therefore$ ①当 $a>-1$ 且 $a\neq0$ 时,$\frac{1}{1+a}>1-a$.

②当 $a<-1$ 时,$\frac{1}{1+a}<1-a$.

③当 $a=0$ 时,$\frac{1}{1+a}=1-a$.

特别提示:

当差式符号不能确定之时,分类讨论即可.

【例 2】已知 x、y 是正实数,比较 $\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ 的大小.

【分析】在这里,直接作差,显然无法变形,怎么办?可以对它们分别六次方,从而把根式转为整式,再作差即可.

【解答】$(\sqrt{x^2+y^2})^6-(\sqrt[3]{x^3+y^3})^6=(x^2+y^2)^3-(x^3+y^3)^2=x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6-x^6-2x^3y^3-y^6=x^2y^2(3x^2-2xy+3y^2)=x^2y^2\left[3\left(x-\frac{1}{3}y\right)^2+\frac{8}{3}y^2\right]$,

$\because$ x、y 是正实数,$\therefore\ x^2y^2>0$. 且 $3\left(x-\frac{1}{3}y\right)^2+\frac{8}{3}y^2>0$,

$\therefore\ (\sqrt{x^2+y^2})^6>(\sqrt[3]{x^3+y^3})^6$,$\therefore\ \sqrt{x^2+y^2}>\sqrt[3]{x^3+y^3}$.

解题规律

对于有的大小比较问题,如果直接作差,无法(或比较困难)向有利于差式符号的确定的方向变形,这时可考虑先对这两个代数式进行恒等变形,再用作差比较法来比较大小.

【同类变式 1】当 $x_1<x_2<0$ 时,试比较 $\sqrt{1+x_1^2}$ 与 $\sqrt{1+x_2^2}$ 的大小.

【解答】$\because\ (\sqrt{1+x_1^2})^2-(\sqrt{1+x_2^2})^2=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)$,

而 $x_1<x_2<0$,$\therefore\ x_1-x_2<0, x_1+x_2<0$,

$\therefore\ (x_1-x_2)(x_1+x_2)>0$,即$(\sqrt{1+x_1^2})^2>(\sqrt{1+x_2^2})^2$.

故 $\sqrt{1+x_1^2}>\sqrt{1+x_2^2}$.

【同类变式 2】若 $0<a<\frac{1}{2}$,$A=1-a^2$,$B=1+a^2$,$C=\frac{1}{1-a}$,$D=\frac{1}{1+a}$,试比较 A、B、C、D 的大小.

【分析】若逐一作差，则计算量较大，可以先用特例探求其方向，如取 $a=\frac{1}{3}$，则 $A=\frac{8}{9}$，$B=\frac{10}{9}$，$C=\frac{3}{2}$，$D=\frac{3}{4}$，可以推断 $D<A<B<C$，再证明即可. 注意到这里 B、C 均大于 1，A、D 均小于 1，因而先确定其范围，再作差即可。

【解答】$\because A=1-a^2<1, B=1+a^2>1$.

又 $0<a<\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{1}{2}<1-a<1$，$1+a>1$，

$\therefore C=\frac{1}{1-a}>1, D=\frac{1}{1+a}<1$.

① $\because A-D=(1-a^2)-\frac{1}{1+a}=-\frac{a(a^2+a-1)}{1+a}$，

又 $0<a<\frac{1}{2}$，$\therefore 0<a^2+a<\frac{3}{4}$，$\therefore a^2+a-1<0$，

$\therefore A-D>0$，即 $A>D$.

② $\because C-B=\frac{1}{1-a}-(1+a^2)=\frac{a(a^2-a+1)}{1-a}$

$=\frac{a[a^2+(1-a)]}{1-a}>0$，

$\therefore C>B$.

故 $D<A<B<C$.

探究：

本题要比较四个数的大小，如果逐一作差，则需要比较六次，太繁. 在这里用特例探明了方向，再根据它们与“1”的大小，从而减少了比较的次数，没有浪费一点笔墨，使运算量大大减小，提高了解题效率.

▲知识点 2 不等式的性质

1. **对称性** 定理 1：$a>b \Rightarrow b<a$；$a<b \Rightarrow b>a$.

2. **传递性** 定理 2：若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$.

提醒

1. 定理 1 说明，把不等式左边与右边交换，所得的不等式与原不等式异向.

2. 不等式的传递性提供了两个实数 a、c 的大小比较时的间接法——媒介法(即通过中间值作媒介来比较大小)，同时它也是对不等关系作适当放缩的依据.

3. 定理 2 的逆命题不成立.

4. 由教材上对这两个性质的证明可知：证明不等式时，应先把条件中的不等关系转化为某些代数式的符号规律；再对待证的不等式作差变形，使之利用已知的代数式的符号，从而确定作差变形后的代数式的符号，进而完成证明. 这种证明不等式的方法我们称为比差法.

【例 3】已知 $x\in\mathbf{R}$，试比较 $2x^2-3x+3$ 与 $\frac{2}{2^x+2^{-x}}$ 的大小.

【分析】如果作差变形，由于“x”既在底数上，又在指数上，因而无法进行因式分解，那么如何进行才好呢？我们应该想办法找到一个中间数，以它作媒介来

传递，因而分别求出两个函数 $y=2x^2-3x+3$ 与 $y=\frac{2}{2^x+2^{-x}}$ 的最值就是自然而然的事了.

警示误区：

只有同向不等式才具有传递性.

【解答】$\because 2x^2-3x+3=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{8}\geqslant\frac{15}{8}$，

而 $2^x+2^{-x}=\left(\sqrt{2^x}-\sqrt{2^{-x}}\right)^2+2\geqslant 2$，

$\therefore \frac{2}{2^x+2^{-x}}\leqslant 1$.

又 $\frac{15}{8}>1$，$\therefore 2x^2-3x+3>\frac{2}{2^x+2^{-x}}$.

解题规律

利用媒介法来比较大小的关键在于寻找每个代数式的"界值"(即不大于或不小于的某一个值)，通过它们的有界性来寻找中间值作媒介，以达到"传递"的目的.

【同类变式】设实数 a、b、c 满足 $b+c=6-4a+3a^2$，$c-b=4-4a+a^2$，则 a、b、c 的大小关系是______.

【分析】由题设的第二个等式可以比较 b 与 c 的大小. 因而只需要比较 a 与 b、a 与 c 的大小，我们只要由题设两个等式分别消去 c 和 b，则可以比较出大小来.

【解答】$\because c-b=4-4a+a^2=(a-2)^2\geqslant 0$，$\therefore c\geqslant b$.

又 $b=\frac{1}{2}[(b+c)-(c-b)]=\frac{1}{2}[(6-4a+3a^2)-(4-4a+a^2)]=a^2+1$，

$\therefore b-a=a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，$\therefore b>a$.

$\therefore c\geqslant b>a$.

▲知识点 3 加法的单调性

定理 3：$a>b\Rightarrow a+c>b+c$.

推论：若 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$.

提醒

1. 有了不等式的加法单调性，不等式的移项法则(即若 $a+b>c$，则 $a>c-b$)也就有了理论依据，因而不等式就可以像方程一样地变形、化简.

2. 这里的推论还可以推广到任意有限个同向不等式两边可以分别相加，也就是说，多个同向不等式两边分别相加，所得的不等式与原不等式同向.

【例 4】命题"若 $a>b$，$c<d$，则 $a-c>b-d$."及其逆命题是否为真命题？若为真命题，则证明它；若为假命题，请举一反例.

【解答】命题"若 $a>b$，$c<d$，则 $a-c>b-d$"为真命题，其证明如下：

$\because a>b$，$c<d$，$\therefore a-b>0$，$d-c>0$，

$\therefore (a-c)-(b-d)=(a-b)+(d-c)>0$,

$\therefore a-c>b-d$.

其逆命题“若 $a-c>b-d$,则 $a>b,c<d$”为假命题.如:$6-4>4-3$,但 $6>4$ 而 $4>3$.

特别提示: 只有同向不等式才具有相加性,而异向不等式只具有相减性.

误区警示 不等式的性质及其推论有的具有双向性(互逆性),有的只具有单向性,因此在运用它们解决问题时要特别注意其逆命题是否成立.

【同类变式】命题“若 $a>b>0$,则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$”是否为真命题?并证明你的结论.它的逆命题是否为真命题?如果不为真命题,则由“$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$”可得到 a 与 b 的大小关系如何?

【分析】对于原命题由特例可知它为真命题,因而考虑用比差法进行证明.对于逆命题,由特例可知它不一定成立.

【解答】命题“若 $a>b>0$,则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$”是真命题,其证明如下:

$\because a>b>0$,$\therefore a-b>0$,$ab>0$,$\therefore \frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}>0$,$\therefore \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

令 $a=-2$,$b=-3$,则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,但 $b<a<0$.故它的逆命题不成立.

由 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}>0$ 知:

当 $a-b>0$ 时,则 $ab>0$,即 a 与 b 同号,$\therefore a>b>0$ 或 $b<a<0$;

当 $a-b<0$ 时,则 $ab<0$,即 a 与 b 异号,$\therefore a<0<b$.

故 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}\Rightarrow a>b>0$ 或 $b<a<0$ 或 $a<0<b$.

▲知识点 4 乘法的单调性

定理 4:①若 $a>b$ 且 $c>0$,则 $ac>bc$;②若 $a>b$ 且 $c<0$,则 $ac<bc$.

推论 1:若 $a>b>0$ 且 $c>d>0$,则 $ac>bd$.

推论 2:$a>b>0(n\in\mathbf{N}$ 且 $n>1)\Rightarrow a^n>b^n$.

定理 5:$a>b>0(n\in\mathbf{N}$ 且 $n>1)\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

提醒

1. 定理 4 说明在一个不等式两边同乘以一个非零实数,不等号是否改向,取决于所乘的这个数的正负性.

2. 在定理 4 的推论及定理 5 中,要注意所有字母都是正数.例如,如果仅有 $a>b$ 且 $c>d$,就不能推出 $ac>bd$;由两个异号不等式,如 $a>b>0$,$0<c<d$,就不能推出 $ac>bd$.

【例 5】下面命题中，是假命题的序号是______.

①若 $a>b,c>d$，则 $ac>bd$.

②若 $a>b,n=2k+1,k\in\mathbf{N}^*$，则 $a^n>b^n$.

③若 $a>b>0,c>d>0$，则 $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$.

④若 $a>b,n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 2$，则 $a^n>b^n$ 且 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

【分析】要判定命题为真命题，则必须经过严密的推理论证才行；而要断定命题为假命题，则只需举一反例即可. 举例时可用“特殊值”法即可.

【解答】①是假命题. 例如取 $a=-1,b=-2,c=-1,d=-3$，则 a、b、c、d 满足条件“$a>b,c>d$”，但 $ac=1<6=bd$.

②是真命题. ∵ 当 $a>b\geqslant 0$ 时，则 $a^n>b^n$；当 $a\geqslant 0>b$ 时，则 $a^n\geqslant 0,b^n<0$，∴ $a^n>b^n$；当 $b<a<0$ 时，则 $-b>-a>0$，∴ $(-b)^n>(-a)^n$，又 $n=2k+1(k\in\mathbf{N}^*)$，∴ $(-b)^n=-b^n$，$(-a)^n=-a^n$，∴ $-b^n>-a^n$，即 $a^n>b^n$. 故 $a^n>b^n$.

③是真命题. ∵ $c>d>0$，∴ $\frac{1}{d}>\frac{1}{c}>0$，

又 $a>b>0$，∴ $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$.

④是假命题. 例如取 $a=-1,b=-2,n=2$ 满足条件“$a>b,n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 2$”，但 $a^n=(-1)^2=1<b^n=(-2)^2=4$，而 $\sqrt{-1}$ 与 $\sqrt{-2}$ 均无意义.

故应填①④.

警示误区：

在应用定理 4 的推论和定理 5 时，一定要注意它们的前提条件是“都是正数”.

解题规律

判断这类不等关系的命题的常用方法有二：直推法和特例法. 其中特例法一般只能说明命题不成立. 而使用直推法则必须做到“言之有据，推导有理”，也就是只有当它符合上述性质的条件时，才有相应的结论. 切忌“想当然”、“显然”地随意操作.

【同类变式】适当增加条件，使下列各命题成立.

(1)若 $a<b$，且______，则 $ac\geqslant bc$；

(2)若 $a>b,c>d$，且______，则 $ac>bd$；

(3)若 $a>b$，且______，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

(4)若 $a>b$，且______，则 $a^2>b^2$.

【解答】(1)要使命题成立，应增加条件 $c\leqslant 0$.

(2)在 $b>0,d>0$ 或 $b>0,c>0$ 或 $a>0,d>0$ 中任选一组作为条件，都能使命题成立.

(3)由 $a>b$，推出 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，其实质是两边同乘以 $\frac{1}{ab}$，因此应增加条件 $ab>0$.

(4)若 a,b 小于 0 时,不等式不成立,因此,应增加条件 $a>0,b>0$.

新知识点内在联系

$$
\begin{tikzcd}
 & & \boxed{\text{对称性}} & \\
 & & \boxed{\text{传递性}} & \\
\boxed{\text{不等式}} \arrow[r] & \boxed{\text{基本性质}} \arrow[ur] \arrow[uur] \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{\text{加法单调性}} & \boxed{\text{乘方法则}} \\
 & & \boxed{\text{乘法单调性}} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & & \boxed{\text{开方法则}}
\end{tikzcd}
$$

疑难解析

与等式的性质相比较,怎样理解不等式的性质?

不等式的性质与等式的性质在乘除法、乘方和开方上有很大差别,在等式两边同乘上一个数,等式仍然成立.但在不等式两边同乘上一个数,就要看这个数的符号,若是正数,不等号不变;若是负数,不等号要变向;若是零,应将不等号改为等号.又如等式 $a=b\neq0\Rightarrow\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$,但对于不等式 $a>b$,就不能简单地得出:$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 或 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 了.在乘方、开方中,要在正数条件下才能确保乘方、开方后不等式与原不等式同向,如 $a>b>0$ 时,$a^2>b^2$;$0>a>b$ 时,$b^2>a^2$;而 $a>0>b$ 时就不能确定 a^2 与 b^2 的大小了.可见同样是 $a>b$,就有完全不同的结果.此外,还要注意幂指数的奇偶性,例如,由 $a>b$ 可推得 $a^3>b^3$,而不需要考虑符号,这是由于 $y=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增的原因.对于开方的情况也类似,当根指数为偶数时,被开方数只能为非负数;根指数为奇数时,由 $a>b$ 可推得 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$,而不必要求 a、b 为正数.在加减法中,不等式与等式也有所不同,不等式的加减需要注意方向,只有同向才可相加.

拓展探究

一、探究学习　对不等关系的进一步理解

师问:若二次函数 $f(x)$ 的图像过原点,且 $1\leqslant f(-1)\leqslant2$,$3\leqslant f(1)\leqslant4$,求 $f(-2)$ 的取值范围.

甲生:$\because$ $f(x)$ 的图像过原点,$\therefore$ $c=0$,故设 $f(x)=ax^2+bx$.

由 $1\leqslant f(-1)\leqslant2$ 及 $3\leqslant f(1)\leqslant4$ 得:$1\leqslant a-b\leqslant2$,$3\leqslant a+b\leqslant4$.

∴ $4\leqslant 2a\leqslant 6$，即 $2\leqslant a\leqslant 3$，即 $8\leqslant 4a\leqslant 12$，

又 $-2\leqslant b-a\leqslant -1$，∴ $1\leqslant 2b\leqslant 3$，∴ $-3\leqslant -2b\leqslant -1$.

∴ $5\leqslant f(-2)=4a-2b\leqslant 11$. 故 $f(-2)$ 的取值范围是 $[5,11]$.

乙生：不对，如 $f(-2)=5$ 就不能成立.

这是因为若 $f(-2)=5$，则 $-2b$ 和 $4a$ 必须均取最小值 -3 和 8，

即 $a=2,b=\frac{3}{2}$. 而此时 $a-b=\frac{1}{2}<1$. 这与"$1\leqslant a-b\leqslant 2$"矛盾.

究其原因是：一方面这里"$\leqslant$"隐含着"所有的"；另一方面满足"$1\leqslant a-b\leqslant 2$"且"$3\leqslant a+b\leqslant 4$"的 a 与 b 之间有一个制约关系，因此 a 与 $-b$ 不一定能同时取得最大值和最小值. 其正确的解答如下：

∵ 函数 $y=f(x)$ 的图像过原点，∴ $f(x)=ax^2+bx(a\neq 0)$.

设 $f(-2)=mf(-1)+nf(1)$，则 $4a-2b=(m+n)a-(m-n)b$.

∴ $\begin{cases}m+n=4,\\m-n=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=3\\n=1.\end{cases}$ ∴ $f(-2)=3f(-1)+f(1)$.

∵ $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，∴ $3\leqslant 3f(-1)\leqslant 6$，

又 $3\leqslant f(1)\leqslant 4$，∴ $6\leqslant f(-2)=3f(-1)+f(1)\leqslant 10$.

故所求的取值范围是 $[6,10]$.

师评：不错，由此我们看到，对于不等式要注意从两个方面来理解它：一是用来表示命题时，则只要它能成立即可，如"$x^2+2\geqslant 2x(x\in\mathbf{R})$"这一命题是真命题，尽管"$=$"不能成立. 二是用来表示取值范围时，则隐含着全称谓词"所有的"，如"$x\geqslant 2$"，则 x 不仅要取遍大于 2 的所有值，还要能取"2"这一特殊值. 因此在分析和解决与不等式有关问题时，首先我们要分清它是用来表示命题的，还是用来表示"取值范围"的.

【例 6】设 $f(x)=ax^2+c$，且 $-3\leqslant f(1)\leqslant 1$，$-2\leqslant f(2)\leqslant 3$，求 $f(3)$ 可能取得的最大值与最小值.

【解答】由 $f(x)=ax^2+c$，得 $f(1)=a+c$，$f(2)=4a+c$.

所以 $a=\frac{1}{3}f(2)-\frac{1}{3}f(1)$，$c=\frac{4}{3}f(1)-\frac{1}{3}f(2)$.

∴ $f(3)=9a+c=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$.

∵ $-3\leqslant f(1)\leqslant 1$，∴ $-\frac{5}{3}\leqslant -\frac{5}{3}f(1)\leqslant 5$.

∵ $-2\leqslant f(2)\leqslant 3$，∴ $-\frac{16}{3}\leqslant \frac{8}{3}f(2)\leqslant 8$.

∴ $-7\leqslant \frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)\leqslant 13$，即 $-7\leqslant f(3)\leqslant 13$.

故 $f(3)$ 可能取得的最小值为 -7，最大值为 13.