全国高等教育自学考试教材

高等数学

（工业与民用建筑专业）

周鸿印 主编

下 册

武汉大学出版社

全国高

高等数学

（工业与民用建筑专业）

下　　册

周鸿印　　主编

武汉大学出版社

1988

全国高等教育自学考试教材

高 等 数 学

（工业与民用建筑专业）

下 册

周鸿印 主 编

*

武汉大学出版社出版

（武昌 珞珈山）

新华书店湖北发行所发行

武汉大学出版社印刷总厂印刷

*

850×1168毫米 1/32 9.25印张 235千字

1989年7月第1版 1990年7月第2次印刷

印数：7201—17200

ISBN 7-307-00506-9/O·49

定价：3.50元

内 容 提 要

本书根据土建类专业专科《高等数学》考试大纲编写，分上、下两册，下册内容为空间解析几何与矢量代数、二元函数微分学、二元函数积分学及常微分方程.

本书符合自学考试的要求，具有自学教材的特点，在编写时力求做到便于自学，达到“无师自通”的要求.

本书是土建类各专业专科自学考试学习用书，也可作为其它专科自学用书及全日制、函授类有关专科的教学参考书.

目　　录

第七章 矢量代数与空间解析几何

本章主要为学习多元函数微积分作准备，包括两个相互关联的部分：空间解析几何与矢量代数。

用代数方法研究空间几何图形，就是空间解析几何学，它是平面解析几何的拓广。矢量代数是研究空间解析几何的有力工具，在物理、力学中也有重要的应用。

学习本章的基本要求是：理解矢量的概念；掌握矢量的运算（线性运算、数量积、矢量积），掌握两个矢量夹角的求法与垂直、平行条件；熟悉单位矢量、方向余弦及矢量的坐标表达式，熟练掌握用坐标表达式进行矢量运算；理解曲面方程的概念，熟悉球面、椭球面、单叶双曲面、椭圆抛物面和圆锥面的标准方程及其图形，了解母线平行于坐标轴的柱面方程；熟悉平面和空间直线方程及其求法，掌握特殊位置的平面方程的特点，能将直线方程的一般式化为标准式。

§7·1 空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

为了用三个有序实数来确定空间点的位置，现引进空间直角坐标系。通过空间一定点O，作三条互相垂直的数轴，它们都以O为原点且一般取相同的长度单位。这三条轴分别称做x轴（横轴）、y轴（纵轴）、z轴（竖轴），统称为**坐标轴**。定点O称为**坐标原点**。

坐标轴的正向可按下法确定：当右手的姆指、食指与中指两两垂直时，如果姆指指向x轴的正向，食指指向y轴的正向，则中指所指方向是z轴的正向。这样确定的坐标系称为**右手坐标系**（图7-1）。

三条坐标轴两两确定的三个平面即xOy面、yOz面和zOx面称为**坐标面**，它们两两互相垂直，且将空间分为八个部分，每部分称为卦限（图7-2），八个卦限的编号如图所示，含有正向x轴、正向y轴、正向z轴的那个卦限称为第Ⅰ卦限。下面建立空间点的直角坐标。

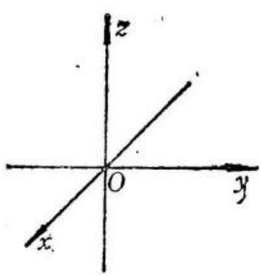

图 7-1

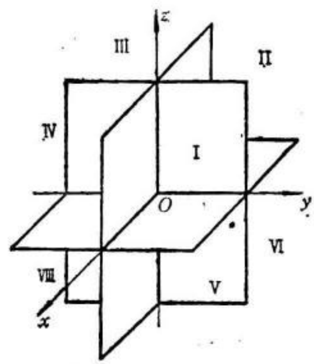

图 7-2

设M为空间一已知点，过点M作三个平面分别垂直于x轴、y轴、z轴，其交点分别为P、Q、R（图7-3）。设这三点在三条轴上的坐标分别为x、y、z，于是空间一点M就唯一地确定了一个有序数组x、y、z，称为点M的**坐标**，记作$M(x, y, z)$。这三个实数依次称为点M的**横标、纵标、竖标**。

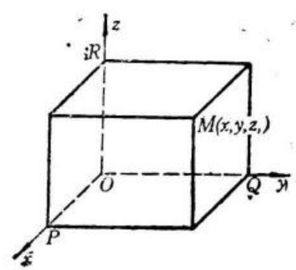

图 7-3

反之，已知一有序数组（x，y，z），在x轴上取坐标为x的点P，在y轴上取坐标为y的点Q，在z轴上取坐标为z的点R，然

后通过点P、Q、R分别作x轴、y轴、z轴的垂直平面，这三个平面的交点M便是以有序数组（x，y，z）为坐标的点。

这样，通过空间直角坐标系，就建立了空间的点M与有序数组（x，y，z）之间的一一对应关系。

在八个卦限内点的坐标（x，y，z）的符号如下表所示：

	x	y	z
第Ⅰ卦限内	+	+	+
第Ⅱ卦限内	−	+	+
第Ⅲ卦限内	−	−	+
第Ⅳ卦限内	+	−	+
第Ⅴ卦限内	+	+	−
第Ⅵ卦限内	−	+	−
第Ⅶ卦限内	−	−	−
第Ⅷ卦限内	+	−	−

原点的坐标为（0，0，0），x轴、y轴、z轴上的点的坐标分别为（x，0，0），（0，y，0），（0，0，z）。三个坐标面xOy，yOz，zOx上的点的坐标分别为（x，y，0），（0，y，z），（x，0，z）。

例1 已知边长为2的正方体，其对称中心与坐标原点重合，其表面分别与三个坐标面平行，试写出正方体的顶点坐标以及其表面与三个坐标轴交点的坐标（图7-4）。

解 八个顶点的坐标依次为A（1，1，1）；B（−1，1，1）；C（−1，−1，1）；D（1，−1，1）；A'（1，1，−1）；B'（−1，1，−1）；C'（−1，−1，−1）；D'（1，−1，−1）。

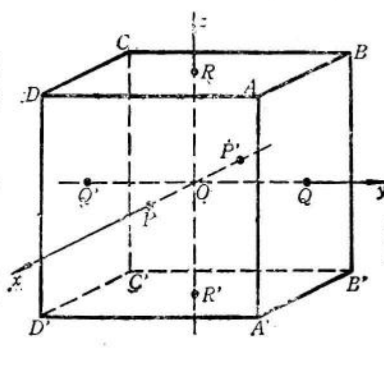

图 7-4

其表面与三坐标轴交点的坐标依次为

$P(1, 0, 0)$；$Q(0, 1, 0)$；$R(0, 0, 1)$；
$P'(-1, 0, 0)$；$Q'(0, -1, 0)$；$R'(0, 0, -1)$。

二、两点间的距离

已知空间两点$M_1(x_1, y_1, z_1)$和$M_2(x_2, y_2, z_2)$，求M_1和M_2之间的距离d。

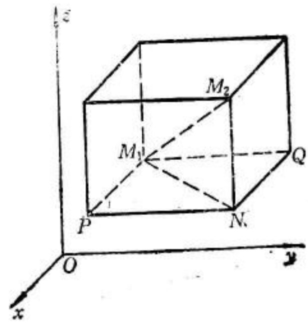

图 7-5

过M_1和M_2各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以M_1M_2为对角线的长方体（图7-5）。

由于ΔM_1NM_2为直角三角形，$\angle M_1NM_2$为直角，所以

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2,$$

又ΔM_1NP也是直角三角形，且

$$|M_1N|^2=|M_1P|^2+|PN|^2,$$

所以

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2,$$

由于

$$|M_1P|=|x_2-x_1|,$$
$$|PN|=|y_2-y_1|,$$
$$|NM_2|=|z_2-z_1|,$$

故得

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1}$$

这就是空间两点间的距离公式。

特殊地，点$M(x, y, z)$与坐标原点$O(0, 0, 0)$的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad (2)$$

例2 在x轴上找一点P，使它与点$Q(4,1,2)$的距离为$\sqrt{30}$。

解 P点在x轴上，可设其坐标为$(x,0,0)$，由题意得

$$|PQ|=\sqrt{30},$$

故 $(4-x)^2+(1-0)^2+(2-0)^2=30$，

即 $x^2-8x-9=0$，

解得 $x_1=9$，$x_2=-1$。

故在x轴上所找的点为$P_1(9,0,0)$和$P_2(-1,0,0)$。

例3 求证以$M_1(4,3,1)$，$M_2(7,1,2)$，$M_3(5,2,3)$为顶点的三角形是等腰三角形。

证 因为

$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$
$$|M_3M_1|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6.$$

所以 $|M_2M_3|=|M_3M_1|$。

故$\Delta M_1M_2M_3$为等腰三角形。　　证毕。

练　习　7·1

1．在空间直角坐标系内作出下列各点，并说明它们各在第几卦限：

(1) $A(4,3,5)$；　(2) $B(2,3,-4)$；

(3) $C(1,-2,3)$；　(4) $D(-1,3,4)$；

(5) $E(-2,-1,2)$；　(6) $F(-4,-3,-5)$；

(7) $G(-1,3,-4)$；　(8) $H(1,-2,-3)$．

2．在平面直角坐标系中，一切$x=a$（常数）的点构成的图形是什么？在空间直角坐标系中，一切$x=a$的点构成的图形是什么？

3．说明以下各点的位置的特殊性：

(1) $A(4,0,0)$；　(2) $B(0,-7,0)$；

(3) $C(0,-7,2)$；　(4) $D(-5,0,3)$．

4．求点$A(4,-3,5)$到坐标原点以及坐标轴间的距离．

5．求顶点是$A(2,5,0)$，$B(11,3,8)$，$C(5,1,11)$的三

角形各边的长.

6．试证以三点$A(4, 1, 9)$，$B(10, -1, 6)$，$C(2, 4, 3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.

7．根据下列条件求点B的未知坐标:

(1) $A(4, -7, 1)$，$B(6, 2, z)$，$|AB|=11$;

(2) $A(2, 3, 4)$，$B(x, -2, 4)$，$|AB|=5$;

(3) $A(0, -1, 2)$，$B(2, y, 5)$，$|AB|=\sqrt{29}$.

8．在y轴上求与点$A(-3, 2, 7)$和点$B(3, 1, -7)$等距离的点.

9．在yOz平面上，求与点$A(3, 1, 2)$、$B(4, -2, -2)$和$C(0, 5, 1)$等距离的点.

§7·2 矢量及其线性运算

一、矢量的概念

在实际中有许多量，当取定单位后，用一个实数即可表示，如物体的质量、温度、体积等。这样的量称为标量或数量。此外还有许多量不能仅用一个实数表示，如物体运动的速度、加速度、位移以及力和力矩等，它们既有大小又有方向，这样的量称为**矢量**或**向量**.

矢量常用有向线段来表示，即有向线段的长度表示矢量的大小，有向线段的方向表示矢量的方向，以A为起点，B为终点的有向线段所表示的矢量记作$\overrightarrow{AB}$；也可用粗体字母表示，如$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{F}$等等，如图7-6所示.

矢量的大小称做矢量的模，矢量$\boldsymbol{a}$的模记作$|\boldsymbol{a}|$。模等于零的矢量叫做**零矢量**，记作$\boldsymbol{0}$，零矢量无确定方向。模等于1的矢量，称为**单位矢量**.

在直角坐标系中，以坐标原点O为起点，以M为终点的矢量$\overrightarrow{OM}$，通常叫做点M的**矢径**，常记作$\boldsymbol{r}$，即

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$$

(图7-7)。于是空间任何点M都对应一个矢径$\overrightarrow{OM}$，反之矢径$\overrightarrow{OM}$也对应着空间一点M，即这个矢径的终点。

下面所讨论的矢量，只考虑它们的大小和方向，而与它们的起点的位置无关。称这样的矢量为**自由矢量**。

如果矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的模相等且方向相同时，就称矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$是**相等**的，并记作$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。

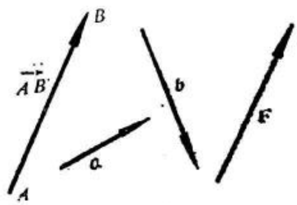

图 7-6

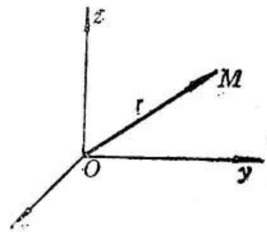

图 7-7

例如平行四边形$ABCD$的一组对边所作的矢量

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$$

(图7-8)。

注意：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$有两层含义，其一是它们的模相等；其二是它们的方向相同，缺一不可。例如二矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的起点为同一个圆的圆心，终点为圆周上不同的二点(图7-9)，虽它们的模相等，但方向不相同，所以

$$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}.$$

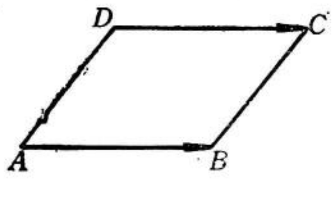

图 7-8

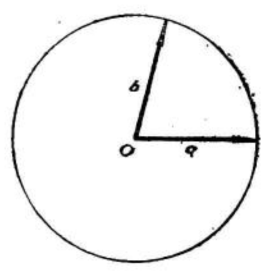

图 7-9

特别是当一个矢量的起点与终点颠倒位置所得的矢量与原矢量不相等，即

$$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}.$$

我们所说的矢量，不仅有大小和方向，还须符合以下线性运算（加减法及数量与矢量的乘法）的定义。

二、矢量的加减法

设二矢量$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，以$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$为边作一平行四边形$OACB$，对角线$\overrightarrow{OC}$所表示的矢量记作

$$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC},$$

称为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

（图7-10）。这就是矢量加法的**平行四边形法则**，显然这个法则是根据力学中的力、速度、加速度的合成法则规定的。

如果两个矢量在同一直线上，那末规定它们的和是这样一个矢量：当两个矢量的方向相同时，和矢量的方向与两矢量的方向相同，其模等于两矢量的模的和；当两矢量的指向相反时，和矢量的方向与模较大的矢量的方向相同，其模等于两矢量模之差的绝对值。

由图7-10可以看出

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC},$$

故 $$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}.$$

由此可得求两矢量之和的**三角形规则**：在求两矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$之和时，可先作矢量$\boldsymbol{a}$，然后以$\boldsymbol{a}$的终点为起点作矢量$\boldsymbol{b}$，于是以$\boldsymbol{a}$的起点为起点，以$\boldsymbol{b}$的终点为终点的矢量$\boldsymbol{c}$即为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$之和（图7-11）。

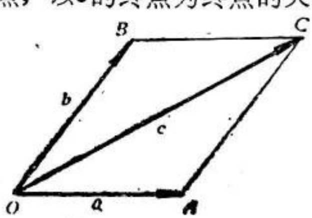

图 7-10

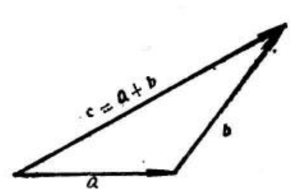

图 7-11

如果两个以上的矢量相加，例如求$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$的和时，可将其依次首尾相接，由第一个矢量的起点到最后一个矢量的终点的矢量即为此四个矢量之和$\boldsymbol{R}$(图7-12)。这种规则称为**多边形规则**。

矢量加法满足：

1．**交换律** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

2．**结合律**$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$（参看图7-13）。

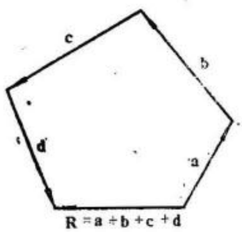

图 7-12

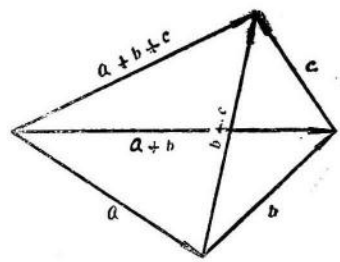

图 7-13

与数量的减法类似，**矢量的减法是矢量加法的逆运算**，如果

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a},$$

则称矢量$\boldsymbol{c}$为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差，记作

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$$

（图7-14）。

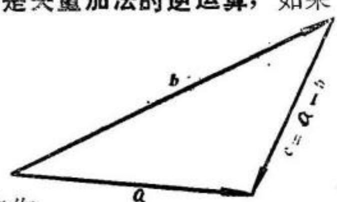

图 7-14

为求矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差，可以O为起点作

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},$$

则矢量$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$。事实上，$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$，故有

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$$

（图7-15）。

三、矢量与数量的乘法

已知矢量$\boldsymbol{a}$和数量λ，$\boldsymbol{a}$与λ的乘积（记作$\lambda\boldsymbol{a}$或$\boldsymbol{a}\lambda$）为一个矢量，其模等于$|\lambda|$与$\boldsymbol{a}$的模的乘积，即

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|。$$

它平行于矢量$\boldsymbol{a}$，即

$$\lambda\boldsymbol{a}/\!\!/\boldsymbol{a},$$

当$\lambda>0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$同向；当$\lambda<0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$反向；当$\lambda=0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$为零矢量，无确定方向，也可看作是与$\boldsymbol{a}$平行的。

根据以上定义，数量λ与矢量$\boldsymbol{a}$相乘时，可先将$\boldsymbol{a}$的模放大（或缩小）为$|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$，再根据$\lambda$的符号确定$\lambda\boldsymbol{a}$的指向。

例如，已知矢量$\boldsymbol{a}$，当λ分别为2、$\frac{1}{2}$、-2时，乘积$\lambda\boldsymbol{a}$如图7-16所示。

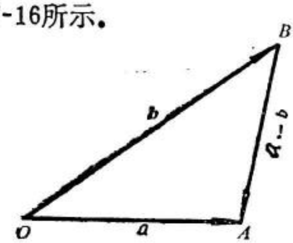

图 7-15

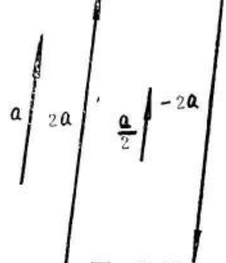

图 7-16

特别，当$\lambda=-1$时，简记

$$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a},$$

它是与矢量$\boldsymbol{a}$的模相等，而方向相反的矢量，常称为$\boldsymbol{a}$的**负矢量**。由此可见，一个矢量，如果将其起点与终点颠倒，所得的矢量是原矢量的负矢量，即

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}.$$

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$可以看做$\boldsymbol{a}$加$-\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

（图7-17）

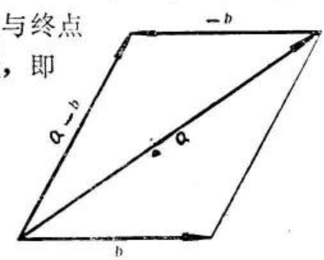

图 7-17

矢量与数量的乘法满足：

1. **结合律** $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\mu\lambda)\boldsymbol{a}$；

2. **分配律** $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

后者参看图7-18。

设$\boldsymbol{a}$为非零矢量，与$\boldsymbol{a}$同方向的单位矢量记作$\boldsymbol{a}^{\circ}$，于是

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ},$$

即任何非零矢量都可表示为它的模与同向单位矢量的乘积，反之，

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

即任何非零矢量除以它的模（即乘以其模的倒数），就得到一个与它同向的单位矢量。

根据矢量与数量乘积的定义，立刻可知，如果$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为非零矢量，且$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行。反之，如果两非零矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行，则必存在$\lambda\neq0$，使

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}.$$

这是因为，$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}$，$\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{b}^{\circ}$，由$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行，可知$\boldsymbol{a}^{\circ}$与$\boldsymbol{b}^{\circ}$平行，又$|\boldsymbol{a}^{\circ}|=|\boldsymbol{b}^{\circ}|=1$，故

$$\boldsymbol{b}^{\circ}=\pm\boldsymbol{a}^{\circ},$$

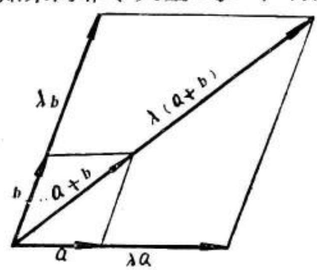

图 7-18

从而

$$\boldsymbol{b}=\pm|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}^{\circ}=\pm\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$$

记$\lambda=\pm\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$（当$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$同向时，取“+”号；当$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$反向时，取“-”号），则有

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}.$$

由此可见，两非零矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$相互平行的充要条件是：存在$\lambda\neq0$，使

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}.$$

例 证明三角形两边中点连线必平行于第三边且等于第三边之半。

证 如图7-19，已知D、E分别为$\triangle ABC$中AB和AC的中