国家精品课配套实验教材

高等院校信息管理与信息系统专业系列教材

运筹学教程例题分析与题解

华长生 易伟明 王平平 刘满凤 编著
梅国平 主审

清华大学出版社

国家精品课配套实验教材

高等院校信息管理与信息系统专业系列教材

运筹学教程例题分析与题解

华长生 易伟明 王平平 刘满凤 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是《运筹学教程》(刘满凤编著,清华大学出版社出版)一书的配套辅导书,通过知识提炼与总结,典型例题分析与主要方法详解、习题全解和自测题精编,帮助学习者更好地学习和掌握运筹学中的基本概念、基本原理和基本方法,进一步拓展运筹学知识的应用范围与应用空间。全书共14章,涵盖的内容有线性规划、对偶理论与灵敏度分析、目标规划模型、整数规划模型、动态规划模型、图与网络分析模型、网络计划模型、存储论模型、排队论模型、对策论模型、决策分析。每一章分为重点、难点提要,主要解题方法和典型例题分析,习题及习题解答4部分。重点、难点提要简单精炼,脉络清晰;主要解题方法涵盖全面,突出重点;典型例题分析突出经典,强调应用。本书最后还配有10套难度不同的自测题,以帮助学习者进行自我检测和综合应用,同时也可供报考相关专业研究生的同学作为综合复习材料。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学教程例题分析与题解/华长生等编著. --北京:清华大学出版社,2012.9
(高等院校信息管理与信息系统专业系列教材)
ISBN 978-7-302-27016-4

Ⅰ.①运… Ⅱ.①华… Ⅲ.①运筹学—高等学校—题解 Ⅳ.①O22-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第201588号

责任编辑:白立军 李玮琪
封面设计:傅瑞学
责任校对:焦丽丽
责任印制:王静怡

出版发行:清华大学出版社
网　　址:http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　　址:北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**:100084
社 总 机:010-62770175　　**邮　　购**:010-62786544
投稿与读者服务:010-62795954,jsjjc@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载:http://www.tup.com.cn,010-62795954
印 装 者:清华大学印刷厂
经　　销:全国新华书店
开　　本:185mm×260mm　　**印　　张**:31.5　　**字　　数**:746千字
版　　次:2012年8月第1版　　**印　　次**:2012年8月第1次印刷
印　　数:1～2000
定　　价:49.00元

产品编号:025869-01

前　言

本书是《运筹学教程》(刘满凤编著，清华大学出版社出版)的配套辅导书，编写宗旨是通过知识提炼与总结、典型例题分析与主要方法详解、习题全解和自测题精编，帮助学习者更好地学习和掌握运筹学中的基本概念、基本原理和基本方法，进一步拓展运筹学知识的应用范围与应用空间。

本书也是2006年国家精品课程“运筹学”的建设成果。精品课程建设的宗旨就是使课程建设包括教材、配套辅导教材要有示范性，使更多的学校能够通过使用精品课程教材达到教学质量的提高，实现资源共享，达到节约教育资源的目的。因此，本书在内容选择和内容编排上力图精益求精，在例题和习题选择上力图涉及领域广泛，强调具有代表性，以使它能适合于更多不同层次、不同特色学校的教学需要。本书的宗旨是培养学生从实践中发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力，提高学生的综合素质和创新能力，培养团队协作精神。

本书共14章，涵盖的内容有线性规划、对偶理论与灵敏度分析、目标规划模型、整数规划模型、动态规划模型、图与网络分析模型、网络计划模型、存储论模型、排队论模型、对策论模型、决策分析。每一章分为重点、难点提要，主要解题方法和典型例题分析，习题及习题解答。重点、难点提要简单精炼，脉络清晰；主要解题方法涵盖全面，突出重点；典型例题分析突出经典，强调应用。本书最后还配有10套难度不同的自测题，以帮助学习者学习时进行自我检测与综合应用；也可供报考研究生的人员作为综合复习材料。

参与本书编写的有刘满凤、华长生、易伟明、王平平、陶长琪、柳键，最后由刘满凤编稿、梅国平审稿。在此对所有参与本书编写的人员表示感谢，也对未列出姓名但对本书的编写工作给予支持和关心的人们表示诚挚的感谢。由于时间仓促和编者水平所限，书中难免存在不当或错误之处，肯请广大读者批评指正。

编者

2012年5月

目　　录

第1章　线性规划模型

1.1　重点、难点提要

1. 线性规划问题的数学模型

线性规划模型的一般形式为：

$$\text{目标函数}\ \max(\text{or}\ \min)\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{约束条件 s. t.}\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_m \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

根据实际应用的需要，线性规划模型可以表示为简写形式、矩阵形式和向量形式，这几种表示形式可以相互转换，灵活使用。

线性规划模型的简写形式为：

$$\max\ (\text{or}\ \min)\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_jx_j \leqslant (=,\geqslant) b_i \quad (i = 1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

线性规划模型的矩阵形式为：

$$\max(\text{or}\ \min)\ \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{cx}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \boldsymbol{Ax} \leqslant (=,\geqslant) \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

式中：$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，称为价值系数向量；

$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，称为决策变量向量；

$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$，称为资源限制向量；

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$，称为技术系数矩阵（或称消耗系数矩阵）。

线性规划模型的向量形式：

$$\max\ (\text{or}\ \min)\ \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{cx}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{p}_j x_j \leqslant (=,\geqslant)\boldsymbol{b}\\ x_j \geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

其中：$\boldsymbol{p}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots a_{nj})^{\mathrm{T}}(j=1,2,\cdots,n)$。

一般地，线性规划模型所需的数据、各项数据的含义以及问题的模型表达式形式，根据具体问题的实际情况会表现出各种差异，当抽象成统一的形式后，它们存在共性的数学处理方法。

2. 线性规划问题的假设

在线性规划数学模型中，体现线性规划内涵特点的，就是隐含其中的线性规划假设。我们可以根据这些假设，评价在解决特定问题时，应用线性规划理论和方法是否恰当或是否具有优越性。同时，也能区分所建立的模型是不是线性规划模型。线性规划问题的假设主要有四个。

1）比例性假设

比例性假设是一种关于目标函数和函数约束条件的假设，其定义为：每种活动 j 对目标函数值的贡献是与该种活动的水平 x_i 成比例的，它们在目标函数中是以 c_jx_j 来表示的。同理，每种活动 j 对于其所在的各个函数约束条件左端项的贡献也是与该种活动的水平 x_j 成比例的，它们在约束条件中是以 $a_{ij}x_{ij}$ 项来表示的。

因此，该假设排除了在模型函数中有非线性变量的情况（无论是在目标函数的各组成项中，还是在函数约束条件左端的各组成项中）。

如果不符合比例性假设，甚至连比例性假设的合理近似都不是，一般可以采用非线性规划模型。当然，有时也可以从另外的角度去构造问题的模型，使之成为一个线性规划模型。

2）可加性假设

比例性假设排除了变量非线性的情况，但未排除存在交叉项（包括两个或多个不同变量的项）的情况。可加性假设可以排除后一种可能性。

可加性假设的定义为：线性规划模型中的任何一个函数（无论它是目标函数，还是约束条件左端项组成的函数）都是有限可列种活动单独贡献的总和。

3）可分性假设

可分性假设定义为：在线性规划模型中，决策变量可以取任意值，包括非整数，只要它们满足非负约束条件和函数约束条件。因此，这些变量不一定取整数。由于每个决策变量代表某种活动的水平，这些活动可以取分数水平，所以决策变量可以在可行域内取任意的分数值。在某些情形中可分性不一定能够得到满足，当决策变量的取值被限制取整数时，就违反了可分性假设。

4）确定性假设

该假设针对有关线性规划模型中的参数，即目标函数的价值系数 c_j、函数约束条件中的消耗系数 a_{ij}，还有函数约束条件的右端项资源约束系数 b_i。其定义为：线性规划模型中的任一参数值都是已知的常数。

在实际应用中，确定性假设不能得到很好的满足。线性规划模型经常预测活动的未来

状况，参数值通常根据未来条件计算，不确定性很难避免。所以，我们经常要对参数值进行调整，分析模型的最优解对参数变化的敏感性，其目的就是要确定参数在最优解不发生变化情形下的取值范围。

数学模型仅仅是对现实问题的一种理想化描述，为了使模型便于控制和应用，可以做一些简化和近似。必须强调的是，完全满足线性规划四个假设的实际问题几乎不可能存在。因此，必须研究和分析这四个假设与实际问题的差距到底有多大，如果四个假设条件全部背离实际情况，则采用非线性规划数学模型也许能更好地解决问题。

线性规划模型的假设条件非常严格，因此，当不满足的程度较大时，应考虑使用其他模型。作为线性规划模型的延伸与拓广，相关的模型有很多，例如，若线性规划问题中一些变量限于只取整数值，则称为整数规划(Integer Programming，IP)；若线性规划的约束条件带有模糊性，则称为模糊线性规划(Fuzzy Linear Programming)；若在数学规划问题的目标函数或构成约束条件的函数中出现非线性函数，则称为非线性规划(Nonlinear Programming，NP 或 NLP)。而有一些运筹学问题很难写成一个以算式表达的数学问题，有时即使写成，由于引入的变量和约束条件过多，求解也很困难，对于这类问题，总是设法用组合的方法去求解，因此，称之为组合优化(Combinatorial Optimization)问题。另外，一些生产问题所涉及的一些输入信息随时间作微小变动时，目标函数的值可能随之引起大的变化。基于这种现象的问题称为参数规划(Parametric Programming)。有些问题所考虑的目标不止一个，或者有些目标甚至相互排斥时，基于这类现象的问题为多目标规划(Multi-Objective Programming)。当目标函数或约束条件中的系数是随机量时，就是随机规划(Stochastic Programming)。

3. 线性规划模型的建立

线性规划模型的一般形式为寻找求解方法奠定了基础。由于求解线性规划问题的算法比较成熟，并且已经开发出通用算法软件，线性规划问题的求解已经变得比较简单，相比之下，构建恰当的模型就成了解决线性规划问题的关键。

建立线性规划模型，关键在于把握决策变量、资源限量、消耗(功效、技术)系数和价值系数等四个要素，以及约束关系和目标函数关系等几个方面。

1) 建模的基本思路和方法

(1) 建模的基本思路。

① 明确工作目标。搞清楚建模的目的，要解决什么问题，需要建立一种什么类型的模型。

② 收集模型要素。将已知和未知的要素分门别类地进行收集、整理，必要时进行量纲归一化处理(所谓“量纲归一化处理”，最通俗的概念就是“对要素计量单位进行统一，当然也包括不同类别的计量单位之间的协调”)。

③ 寻找要素之间的关联关系。各个要素之间存在的关联关系是构造模型的“黏接剂”，如果找不到要素之间的关联关系，就无法构造模型；如果找不全要素之间的关联关系，就无法构造一个完整的模型；如果所确定的要素之间的关联关系是不正确的，则建立的模型就一定是错误的。

④ 形成模型。用抽象符号和数学表达方式，将要素用各种适合的关联关系联系起来，形成模型。

⑤ 初步检验。用一些已知正确结果的模型参数，代入所建模型并进行运算，观察通过新模型的处理，所获得的结果是否与原来已知的结论相一致。

⑥ 修正模型。如果初步检验未通过，则找出未通过检验的原因，对模型进行修正，再检验，再修正，如此往复直到正确为止。

⑦ 实际应用。在实际应用的过程中，要注意检验其与被描述的客观事件的现实结果是否相符，必须对造成两者脱离的原因进行透彻分析，考察是否描述时间的边界条件或者内部出现了变化，还是模型本身不能正确地揭示被描述时间的内部规律。如果是前一种原因，则需要考察模型的适用性问题；如果是后一种原因，则必须及时地、有针对性地对模型进行修正。否则，继续使用模型都会得出不符合事物客观规律的错误结论。

（2）建模的基本方法。

① 直接分析法。按研究者对问题内在机理的认识，直接构造出抽象模型。这种方法又称为直接推理法，即研究者对于问题内部结构和运行机理已经清楚，又有现成的规律或法则可供利用，只需对具体问题略加分析，并将有关专业知识运用于其中，即可获得正确的数学模型。

② 模拟类比法。当被研究对象的内在机理与另一类对象的内在机理相一致时，可用模拟类比法直接引入已经存在的模型来构造新的模型。类比法有效运用的基础是用于类比的两个对象都受到同一个内在运行规律的支配，用同一种数学模型就可以完整、准确地描述这种规律，只是需要在物理量纲方面进行适当的调换与配置。这需要研究者掌握两个领域里的相关专业知识，并且具有将其灵活运用于实际问题分析的素质。

③ 统计分析法。对问题的机理尚不清楚，根据收集到的与此问题密切相关的大量资料，或通过试验获得新的补充资料，使用统计分析的方法建模。使用统计分析方法所建模获得的结果，一般具有统计意义上的正确性，对于某个特定的事例，不一定具有完全的符合性。

④ 不完全资料分析法。对问题的机理不清楚，也不能通过大量的试验来获得建模用的资料，只能通过对局部的少量试验资料进行分析，加上一些理论假设和推导的方法来建模，由不完全资料分析法所获得的模型，往往需要在使用中加以验证和完善，经过一段时间的使用，获得足够的评价子样参数，经过科学评价和修正后才能成为真正有效的模型。

⑤ 构想修正法。对问题的机理不清楚，又不能通过试验来获取资料（比如重大的社会、经济和军事问题），只能在已有的知识、经验和研究结果的基础上，对可能存在的机理或规律进行合理的设想和描述，用已有的方法构造模型，并在实际使用过程中不断暴露问题，不断地加以修正，直至最后获得比较满意的模型。

2）由实际问题形成线性规划模型

线性规划问题的模型其实就是由一组含有等式、不等式的代数方程以及一个具有求极值的目标函数表达式构成的复合式抽象数学模型。

一般地，构成线性规划问题模型有四个必要条件和一个充分条件。

① 必要条件一：需要求解的问题所包含的每一个决策变量都是正确的，其取值范围已知，并且问题所包含的决策变量总数是有限的。

② 必要条件二：问题中所包含的每一种资源数量都是确定的。

③ 必要条件三：每一种决策变量消耗相关资源的约束系数（技术系数）都是确定的。

④ 必要条件四：不同的决策变量对于某一种资源的需求之和与该种资源的现有总量相对应，并且每一类现有资源的总量与相关决策要素对该类资源的总需求相比所获得的关系（用≤、≥、=之一来表示）也是确定的。

⑤ 充分条件：存在一个确定的期望达到的目标，并且这个目标可用对全部或部分决策变量与相关价值（费用）系数乘积之和（目标函数）来表达。

满足四个必要条件的数学模型称为线性等式（不等式）方程组。线性等式（不等式）方程组加上目标函数就构成了线性规划问题的数学模型。

由此可见，线性规划问题的准确定义是：单目标静态线性规划问题。一般地，所谓“线性规划问题”就是指“单目标静态线性规划问题”。

3）一般线性规划问题的建模方法

（1）构成线性规划模型的“四个要素”和“两个关系”。

在求解线性规划问题的算法已经成熟，特别是当求解线性规划问题的算法已经用计算机程序固化形成通用软件之后，曾经作为解决线性规划问题难题的求解过程已经变得非常简单，而构建线性规划问题的数学模型，就成为解决线性规划问题的一个关键性步骤。

同其他类型的模型建模过程一样，线性规划问题的建模过程也是比较烦琐的，虽然其中有一些技巧，但是如果没有掌握其内部规律，这些技巧也是难以掌握的。建模过程的内部规律同其他规律一样难以轻而易举地掌握，只有不断地总结和积累经验，才能逐渐领悟。根据经验，在线性规划模型的建模过程中要抓住“四个要素”和“两个关系”。

“四个要素”分别是决策变量、资源常量、约束系数和价值（费用）系数。抓住了这四个要素，就等于抓住了建模问题的关键所在。“两个关系”是约束关系和目标函数关系。

决策变量：用于求解线性规划问题的变量称为决策变量。决策变量既是线性规划模型的基本要素，也是构成我们所要解决问题的基本概念性要素。在线性规划问题中，最优解通常是由一组（或者若干组）有确定顺序的实数（称为解向量），再加上一个与这个解向量相关的目标函数值所构成。解向量中的每一个数字代表着约束方程和目标函数中所共同包含的各个变量的值。因为这些变量都参与决策，所以，称目标函数和约束方程中所同时包含的变量为决策变量。如果线性规划问题中被称为约束条件的代数方程组独立存在（不与目标函数同时求解），则这些未知量就成为普通变量。

确定决策变量的基本原则：想了解问题中哪些因素的最优化取值情况，就把哪些因素设置为决策变量，即求什么就设什么。

资源常量：资源常量是线性规划问题所拥有（或可利用的）各类资源总量。每种资源的确定性和有限性都用一个常量以及“≤”、“≥”和“=”之一来联合表示。

约束系数：约束系数又称为技术系数，其本质是反映决策变量所代表的要素利用系统资源的效率。各个要素既与目标函数相关联，又与资源常量相关联，约束关系必须用约束方程来表达。约束方程中每个决策变量的系数就是用来描述这种关联关系的。由于约束系数通常由问题本身所固有的技术性因素所决定，要改变这些系数就意味着要改变问题的内部技术状态，故有时约束系数又被称为技术系数。

价值（消耗）系数：完整地讲，线性规划问题中的价值（费用）系数应该称为决策变量对资源利用（消耗）的价值（费用）系数。价值（费用）系数也可以称为功利系数。

虽然目标函数与约束条件之间没有直接的数学方程式相联系，但是，目标函数被要求用来考察当约束条件方程组的解向量取特定的解时，问题处于何种状态。一个简便的方法就是让目标函数中包含的决策变量与约束条件中包含的决策变量统一起来，并规定目标函数中包含的决策变量系数的意义是：当约束条件中的每个决策变量每消耗一个单位资源时，对问题的特定状态形成所做出的贡献（或者是所造成的损失）大小。这是价值（费用）系数的概念的准确描述。

在目标函数式中，max 或 min 定义了目标函数的特性，实际上这种定义是通过影响约束方程组求解规则的方式影响决策的，如果去掉 max 或 min 这一目标函数特性要求，则 z（见 1.1 节）仅仅表示活动（事件）在资源需求与资源约束处于某种平衡状态时，对于全部资源利用所产生的价值（消耗）之和，换言之，在资源利用的价值（消耗）系数一定时，z 完全由约束关系所确定。

约束关系：在线性规划问题中，约束关系通常用一组代数等式或不等式来描述，为便于理解和记忆，我们用一个树形结构表（见图 1-1）来说明约束的基本内容。

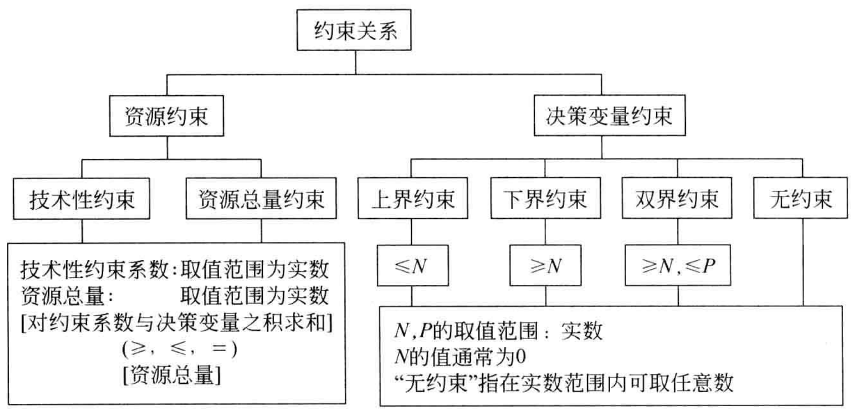

图 1-1　线性规划问题的约束关系

在决策变量约束中，N 和 P 的取值范围虽然是实数，但是在使用单纯形法解线性规划问题时必须满足决策变量的非负要求（决策变量的取值范围必须大于等于 0）。在实际问题中，决策变量的取值范围不一定大于等于 0，可能小于 0，或者是一个确定的区间。为了满足单纯形法中决策变量的非负要求（决策变量的取值范围必须大于等于 0），通常需要对数学模型中的相关内容进行变换，使得所有决策变量的取值范围都能满足大于等于 0 的要求。

另外，在用计算机软件求解线性规划问题时，由于计算机数据的表达限制，不可能处理接近于无穷大的数据，再加上通常算法使用大 M 单纯形法，所以，上述所论“无约束”变量的取值范围通常比大 M 法中人为确定的大数 M 小一个数量级，并不能真的让变量的取值接近于无穷大。一般地，大数 M 为 1×10^{14} 就够用了，如果所需处理的问题涉及的数学的绝对值很大，可以用适当的计算单位将数据位数减少后，再代入方程中使用。

目标函数关系：从经济、管理和线性规划理论来看，对线性规划问题构建模型求解的目

的，是希望保证所从事的活动损失最小化或者利益最大化。仅仅求解约束方程得到的某个(或者某组)解，但不知道究竟优化到了什么程度，这样是不够的。通过构造一个检验函数，每求出一组解来，对应地就可以立即计算出一个检验数，对比这些检验数的大小，就可以简单明晰地判断出哪组解为最优解，并且能判断出它比次最优解和其他非最优解究竟“优化”了多少。

目标函数由一个求检验和(用 Z 表示)的等式关系来表示。等式关系中包含了所有(或者部分)决策变量及其系数。这个检验和关系还有一个定性的标志：借用英文中 minimum(最小化)的简写 min，或者是 maximum(最大化)的简写 max 来表示。当关系被定义为 max 时，决策变量系数即成为资源利用的价值系数(简称为价值系数)，所得的检验和越大越好；当关系式被定义为 min 时，决策变量系数称为资源消耗或技术系数，所得的检验和越小越好。

(2) 建立线性规划模型的 6 个步骤。

相应地，建立线性规划问题数学模型的 6 个步骤如下：

① 设置决策变量。

② 确定资源常量。

③ 找出决策变量之间的关系及其与资源约束常量之间的关系。

④ 找出决策变量的价值系数(费用系数)并形成目标函数。

⑤ 确定每个决策变量的取值范围。

⑥ 整理所得到的代数表达式，形成规范的线性规划数学模型。

4) 一般线性规划模型的特点

由于实际问题丰富多彩，所建立的线性规划模型也应该是各种各样的，但这些模型都具有共同的基本特点。

① 目标函数可以是求最大值，也可以是求最小值，这取决于是希望通过线性规划获得利益(收益)最大化方案，还是成本(费用)最小化方案。

② 目标函数中的符号可以全为正，也可以全为负，并且还可以是既含有正号又含有负号的，这取决于实际问题中目标函数的性质和决策变量系数的作用。

在求最大值的目标函数中，若决策变量的系数表示的是决策变量每年增加一个单位所引起的利益增量，则应取正号；若决策变量的系数表示的是决策变量每增加一个单位所引起的损失减量，则应取负号。

特别地，当决策变量每增加一个单位所引起的利润(损失)变化量为 0，则统一规定取正号，并且在线性规划模型中可以不实际列出该项内容。

③ 约束条件方程中的各项符号既可以为正，也可以为负，这取决于决策变量对于资源的需求性质。如果在某个过程中，某个决策变量所代表的要素是资源消耗性的，则其所对应的约束系数取正号；反过来，如果在某个过程中，某个决策变量所代表的要素是资源产出性的，则其所对应的约束系数取负号。

特别地，如果在某个过程中，某个决策变量所代表的要素既不是资源消耗性的，也不是资源产出性的，则其所对应的约束系数为 0 并统一规定取正号，并且在线性规划模型中可以不实际列出该项内容。

④ 资源约束常量的符号既可以为正，也可以为负，这取决于资源常量所表示的资源的余数性质。如果在某个过程中，某个资源常量所表示的资源是现存数量，则其符号取正号；反过来，如果在某个过程中，某个资源常量所表示的是资源已经出现的短缺数量，则其符号取负号。

特别地，如果在某个过程中，某个资源常量所表示的资源数量为0，则其符号统一规定取正号，并且在线性规划模型中必须列出该项内容。

⑤ 约束条件方程的约束关系可以由"≤"表示，也可以由"≥"表示，还可以由"＝"表示。

当已知条件给出的是资源约束上限时，约束条件方程的左端和右端用"≤"连接；当已知条件给出的是资源约束下限时，约束条件方程的左端和右端用"≥"连接；当已知条件给出的是资源约束确定数值时，约束条件方程的左端和右端用"＝"连接。

约束条件方程的左端和右端用"≤"或者用"≥"连接时，约束条件方程称为非平衡约束或者不等式约束；约束条件方程的左端和右端用"＝"连接时，约束条件方程称为平衡约束或者等式约束。

在使用单纯形法进行线性规划的计算过程中，所有的非平衡约束都必须化为平衡约束后才能求解。

⑥ 决策变量的取值范围，既可以是"≥0"，也可以是"≤0"，还可以是取负数值或者取正值的任意实数，更一般的情形是取实数中的某一区间(如 $5\leqslant x\leqslant 7$、$-20\leqslant x\leqslant -1$、$-30\leqslant x\leqslant 40$ 等)。

决策变量的取值范围是由问题中决策变量的内在特性确定的，不能人为地确定。比如，用决策变量来代表人的年龄，则只能取"≥0"的范围；用决策变量来代表电压，则其既可能取"≥0"的范围(以低电平点作为测量基准)，也可能取"≤0"的范围(以高电平点作为测量基准)，还可以是取负值或者取正值的任意实数(以电路中存在的某个既不是最高电平，也不是最低电平的电位点作为测量基准)。

5) 建立运筹学模型的要点

建立实际问题的数学模型既要有相应的数学知识，又要求对实际问题有确切深入的了解，因此，可能还要用到一些专业知识。一般地，建立线性规划问题的数学模型时，要注意以下要点：

① 线性规划问题规模大，约束条件以及变量都是用抽象的字母表示，让人感觉无从下手。遇到这类问题，往往把问题分解一下，把相同的问题归结为一个子问题，选有代表性的子问题考虑解决办法，然后再把子问题的解答方案统一汇总处理。至于字母，不妨先假定它们是不大也不小的自然数(太大了考虑起来太麻烦，太小了又看不出规律)，这样相当于先解决一个与原问题类型相同的小问题，通过研究它去找出解决原来大问题的方法。

② 有些问题的结果不是唯一的，要选择那种适应范围大的方案，不能将特定范围内的方案误认为是普遍适用的。

③ 有些问题的变量与约束条件显得又多又杂，并且彼此交叉在一起，看似不易理顺。此时，不妨将它们一一分离出来，定量地加以描述。

④ 有些问题建模的结果可以简化，比如，问题中本来给出的是具有相同含义的一些数字，建模时为了简洁，不妨用带下标的字母表示，而问题中本来给出的是字母，为形成建模思

路，不妨赋予这些字母以具体数值，一旦形成正确思路，再还原成问题的本来形式。

⑤ 有些建模结果，可通过一些技巧使之变得简洁、抽象，但不失严密性。这需要熟练的技巧，一般不予强求。只要能把问题描述清楚，不追求不必要的简化、抽象。

⑥ 对于实际的线性规划问题，要先判断它大致属于哪个知识范围内的问题。

1.2 主要解题方法和典型例题分析

1. 线性规划模型的特征

一般地，在连续、可控的决策变量前提下，求一个线性函数在一组线性约束条件下的最大化、最小化问题，称为线性规划问题，相应的数学模型称为线性规划模型。线性规划模型具有共同的特征：

① 方案都用一组决策变量($x_1,x_2,\cdots,x_n$)表示，具体方案由决策变量的一组取值决定，且决策变量一般是非负连续的。

② 模型都用一个决策变量的线性函数衡量决策方案的优劣，该函数称为目标函数。对于不同的问题，要求目标函数实现最大化或最小化。

③ 存在一些约束条件，这些约束条件可以用一组决策变量的线性等式或不等式表示，右端项是一个给定的常数。

由于线性规划理论具有很强的应用性，容易取得明显的应用效果，并且可以足够真实地覆盖大多数现实应用问题，它能足够精确地反映某特定时刻事物全局的最优化状态，因此，线性规划理论和方法在数学规划中具有不可替代的作用，成为优化理论的一个重要分支，在优化理论体系中具有基础性地位。事实上，整数规划和目标规划的核心内容由线性规划理论发展而成，动态规划和非线性规划都以静态线性规划为参照。

2. 建立线性规划模型的一般步骤

对于实际的线性规划问题，建立线性规划模型的一般步骤可归纳如下：

① 根据管理层的要求，确定决策目标，并收集相关可用数据。

② 引入决策变量，确定资源常量、约束系数和目标系数等要素。

③ 依据决策变量等要素间的等式或不等式关系，确定约束条件和目标函数，从而建立线性规划模型。

题型Ⅰ 任务安排计划

例 1-1 某公司经营进口、出口和咨询等三项主要业务，每项业务都要通过业务主管部和综合管理部的配合才能完成。其中业务主管部下设进口业务部、出口业务部和咨询业务部，综合管理部下设综合计划部和综合财务部。其业务关系、运行成本以及资源状况如表 1-1。

如何安排各类业务计划，才能使得公司获利最大。试建立该问题的线性规划模型。

解：可根据表 1-1 的相关数据及其之间的关系，建立该问题的线性规划模型。其具体步骤如下：

表 1-1　公司业务运行情况表

管理类别	单项业务平均占用时间(小时)			可用业务服务时间总量(小时)	计划年运行费用(万元)
	进口	出口	咨询		
综合计划部	5	10	2	36 000	1500
综合财务部	7	9	3	35 000	1600
进口业务部	120			80 000	1800
出口业务部		130		90 000	2000
咨询业务部			150	85 000	1300
每单平均直接成本	100	80	30		
每单平均合同额	125	110	50		

(1) 设置决策变量。

因为成本和合同额的分析背景是“单”(一个独立的业务项目),而资源是各个业务部门可用于各项业务服务的总时间,其衔接关系是每单花去每个业务部门的时间。因此,约束来自各个部门的总时间量,总时间量约束了总业务量(接单的数量,即所能开展开业务项目总数),而项目总数又决定了该公司每年所能获得的利润总量。

因为接单(签订项目合同)的数量与时间资源、利润总额相关,满足作为决策变量的条件,因此,设每年签订进口项目合同的最优数量为 x_1,每年签订出口项目合同的最优数量为 x_2,每年签订咨询项目合同的最优数量为 x_3。

(2) 确定资源常量。

显然,资源常量在表 1-1 中已经明确,即各部门可用于业务服务的时间总量。

(3) 确定约束条件。

约束条件主要围绕项目合同签订数量,每个项目完成过程中用各个部门的时间以及各个部门总工作时间资源限制来考虑。

对各个项目用某部门的时间数与各种业务接单的最优个数之积求和,其数值应小于或等于这个部门总的时间资源数。所以:

综合计划部的时间分配与资源限制之间的约束关系为:

$$5x_1 + 10x_2 + 2x_3 \leqslant 36\,000$$

综合业务部的时间分配与资源限制之间的约束关系为:

$$7x_1 + 9x_2 + 3x_3 \leqslant 35\,000$$

进口业务部的时间分配与资源限制之间的约束关系为:

$$120x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \leqslant 80\,000$$

出口业务部的时间分配与资源限制之间的约束关系为:

$$0 \cdot x_1 + 130x_2 + 0 \cdot x_3 \leqslant 90\,000$$

咨询业务部的时间分配与资源限制之间的约束关系为:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 150x_3 \leqslant 85\,000$$