

热流过程的 数学模型和数值模拟

■ 徐江荣 裘哲勇 著



国防工业出版社
National Defense Industry Press

内 容 简 介

描述自然界和工业过程热流现象的基本理论主要是流动理论、湍流理论、多相流理论、传热理论和燃烧理论。本书主要集中于数学模型上,注重热物理现象的数学描述。本书分两个部分,第一部分是流动、湍流、两相流、传热燃烧的基本数学模型,第二部分是以外加场作用下复杂热物理问题的数学模型和数值模拟,如流场和声场耦合、特殊材料下热流过程、复杂化学反应过程等。本书对可吸入颗粒声波脱除、汽车尾气余热利用、声波制冷压缩机、多孔介质燃烧等问题进行了细致的研究。

本书可供从事流体力学、应用数学、工程热物理、热能工程、化学工程、核能工程、航空工程、水利工程等工作的科研和工程技术人员及高等院校有关专业的师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

热流过程的数学模型和数值模拟 / 徐江荣, 裘哲勇

著. —北京:国防工业出版社, 2012. 3

ISBN 978-7-118-07819-0

I. ①热… II. ①徐… ②裘… III. ①热流动-数学模型②热流动-数值模拟 IV. ①0414.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 274862 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 17½ 字数 400 千字

2012 年 3 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2500 册 定价 36.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

前言

工程热物理的研究对象在自然界和工业过程中无处不在。描述自然界和工业过程热流现象的基本理论主要是流动理论、湍流理论、多相流理论、传热理论和燃烧理论。但由于所描述的热过程往往是流动、传热和燃烧混合的现象,且边界复杂,甚至还要外加其他场,如声场、电磁场等,使得热物理基本理论不能有效地描述这种复杂的热过程,因此对热过程理论模型的研究,特别是多场耦合模型的研究是一个研究热点。现在对热过程模型的研究可以概括为以下几个方面:

(1) 由湍流延伸出来的问题依然是理论模型研究的主要内容,因为湍流问题没有一个根本的解决方案,由此引起的多相流、传热、燃烧和多场耦合依然不可能有根本的解决方案,所以由湍流模型引起的传热模型、多相流模型、燃烧模型基本上要在湍流模型的基础上再加上许多假设。在多场耦合问题上,这种模型带来的是数目巨大的偏微分方程组,其相互影响的方程组是值得研究的。

(2) 一般来说流动、传热、燃烧数学模型基本上是同一类对流—扩散偏微分方程,但多相流、多相燃烧及其声、电、磁等外场的加入使得模型的类型多样化,给模型的求解带来很大的困难,使得求解过程复杂,误差类型增多。

(3) 由于热过程往往是大型的、危险的,测量手段有限、测量费用巨大,使计算机数值模拟变得越来越重要,数值模拟的基础是良好的数学模型和优越的计算方法。对热流模型计算方法的研究是另外一个热点问题,但良好的数学模型是最基本的。研究者不愿意花更多的精力去研究,因此目前的现状是计算方法的研究多于模型的研究,但模型的研究无比重要。

本著作主要集中于数学模型上,注重热物理现象的数学描述。其内容分为两部分,第一部分是流动、湍流、两相流、传热燃烧的基本数学模型,第二部分是外加场作用下复杂热物理问题的数学模型和数值模拟。

第一部分主要的观点是物理模型尽可能数学模型化。流动、湍流、两相流、传热燃烧的基本理论散见于各类专著与文献中,本著作不追求理论的全面性,将每一类问题的最根本、最典型、最有效的一个模型以陈述数学模型的方法给出,避免详细和繁琐的物理过程的描述。其中“两相流颗粒轨道模型”和“两相流 PDF 模型——湍流 f^{-2} 色噪声扩维方法”两部分主要内容是作者本人的研究结果。

第二部分是复杂场下热物理问题的数学模型和数值模拟。该部分都是作者及其指导的应用数学专业研究生的工作,其主要研究的思路和方法可以概括为三个方面:

(1) 所有模型都是在第一部分基本模型基础上的多场耦合热物理问题,如流场和声场耦合、特殊材料下热流过程、复杂化学反应过程等。

(2) 所有模型的适用对象都来自于最新的工程问题,且这些问题大部分是本课题组

承担的研究项目,如可吸入颗粒脱除问题、汽车尾气余热利用问题、声波制冷压缩机问题、多孔介质燃烧问题等。

(3) 依然注重热物理问题的数学模型化,注重一组偏微分方程及其相互关联性,所有问题都用计算机数值模拟方法获得数值解,紧密地与所描述的工程问题结合起来,对工程应用具有指导作用。

对热理论基本数学模型的研究是有价值的。作者在多年参与工程热物理专业博士论文答辩和评审过程中发现,由于商业软件的使用,工程领域的科研工作者越来越忽视热物理过程数学模型的研究,博士生甚至搞不清模型方程之间的关系。而大量的著作和文献不追求模型的数学严谨性,这是作者编写第一部分的最原始的目的,希望有一本书能把这些基本模型描述得很严谨,简化的模型的简化原因写得清清楚楚,符号统一。

热过程的多场耦合问题越来越多,如化学反应,在新能源利用、硫和氮污染物的脱除过程涉及大量的链式化学反应,这是热流过程数学模型的难点;有如声—电与流—热场的耦合,用以处理颗粒污染物和热声效应利用是热物理领域的新增长点,这些耦合过程的数学模型有两个难点,一是流—热场和声—电场的相互作用处理,二是模型类型不同引起的计算方法的不同。本专著在这些方面做了大量的尝试性工作,并取得了一定的成果。

本著作第一部分是近几年应用数学硕士研究生课程“热流过程的数学模型”讲述的主要内容,且经过三次调整而成;本著作的第二部分内容均具有很强的工程背景,来自于作者及其课题组近五年承担的科研项目,包括完成和正在承担的国家自然科学基金、浙江省自然科学基金、杭州市科技计划项目和部分企业委托项目。部分内容是本课题组研究生共同研究的成果,其中包含李泽征、李博、赵殿鹏三位研究生的浙江省“新苗计划”项目资助的研究工作。同时还要感谢陈芳、康明、胡素娟等几位研究生的研究工作。

本著作的出版受到杭州电子科技大学专著出版基金的资助。

由于作者的水平有限,书中难免有疏漏、遗漏和不完整之处,期待读者的指正!

作者

2011年8月

于杭州电子科技大学

目 录

第一部分 基本模型

第 1 章 黏性不可压缩流体的数学模型	2
1.1 几个基本公式	3
1.2 流动的基本方程组	4
1.2.1 守恒方程	4
1.2.2 变形速度张量	5
1.2.3 牛顿流本构方程	8
1.3 黏性不可压缩流体绕圆球运动模型	9
1.4 黏性不可压缩流体边界层方程	13
1.4.1 平板二维边界层数学模型	14
1.4.2 边界层厚度	15
1.4.3 边界层动量积分关系式	16
1.4.4 平板层流边界层的计算	18
第 2 章 湍流流动的标准 $k-\varepsilon$ 模型	21
2.1 湍流运动的基本方程	22
2.1.1 雷诺平均方程	22
2.1.2 雷诺应力输运方程	23
2.2 k 方程	25
2.3 ε 方程	26
2.4 标准 $k-\varepsilon$ 模型的通用形式	27
2.5 初始条件和边界条件	28
第 3 章 气体湍流燃烧模型	30
3.1 能量输运方程	31
3.1.1 能量守恒方程	31
3.1.2 能量守恒方程的几个不同形式	32
3.2 化学反应组分平衡方程和能量输运方程	34
3.3 湍流中的组分平均方程和能量平均方程	36
3.4 湍流扩散燃烧模型($k-\varepsilon-g$ 模型)	37
3.4.1 混合分数 $f-g$ 方程	38
3.4.2 混合分数的概率密度函数	39
3.5 湍流预混火焰燃烧速率模型(旋涡破碎 EBU 模型)	39

3.6	湍流燃烧关联矩	41
第4章	两相流颗粒轨道模型	45
4.1	单颗粒拉格朗日运动方程	47
4.2	两相耦合求解问题	49
4.3	颗粒模型中湍流脉动速度的处理	51
4.3.1	颗粒湍流扩散处理方法	51
4.3.2	湍流脉动特征频率	51
4.3.3	湍流脉动频谱分布	53
4.4	颗粒特性和颗粒源项的统计方法	55
4.5	网格时间确定问题	56
4.5.1	颗粒运动方程的变换和计算方法	57
4.5.2	煤粉浓淡低负荷燃烧器的撞击分离装置内两相流动计算	58
	参考文献	59
第5章	两相流 PDF 模型	61
5.1	白噪声和色噪声	62
5.2	两相湍流 f^{-2} 色噪声扩维方法	63
5.3	颗粒轨道上所见流体 Langevin 模型	66
5.3.1	颗粒轨道上所见流体瞬时速度 Langevin 方程	66
5.3.2	颗粒轨道上所见流体微团平均速度和脉动速度 Langevin 方程	68
5.3.3	颗粒轨道上所见流体微团脉动速度的关联特性	69
5.4	基于各向异性湍流的颗粒 PDF 模型	70
5.4.1	湍流两相流的 PDF 方程	70
5.4.2	各向同性时两相关联系数	71
5.4.3	各向异性时关联系数	72
	参考文献	74

第二部分 多场复杂模型

第6章	重整化群强旋转代数应力模型	76
6.1	湍流重整化群理论的发展	76
6.2	RNG $k-\varepsilon$ 模型	77
6.2.1	用模式理论分析 RNG ε 方程	77
6.2.2	RNG $k-\varepsilon$ 模型和标准 $k-\varepsilon$ 模型的模型常数	80
6.2.3	RNG $k-\varepsilon$ 模型	80
6.2.4	重整化群模型算例之一——管内充分发展湍流	81
6.3	强旋转湍流流动	83
6.3.1	轴对称圆柱坐标系中的新型代数应力模型推导	83
6.3.2	轴对称圆柱坐标系中的新型代数应力方程组之解	85

6.4 RNG - ASM 模型及数值模拟	87
6.4.1 RNG $k-\varepsilon$ 方程与 ASM 模型结合	87
6.4.2 重整化群模型算例之二——强旋转受限射流	88
参考文献	94
第7章 多孔介质热电材料传热模型及数值模拟	96
7.1 汽车尾气热电材料多孔介质发电的综述	96
7.2 多孔介质传热流动的数学模型	97
7.2.1 多孔介质的基本概念	98
7.2.2 动量方程多孔介质修正 ^[35]	99
7.2.3 多孔介质能量方程 ^[35]	99
7.3 多孔介质湍流流动传热的数学模型	100
7.4 汽车尾气多孔介质热电材料发电机	103
7.4.1 模拟对象	103
7.4.2 初始条件和多孔介质条件	105
7.5 模拟结果分析	106
7.5.1 排气管内流场的分析	106
7.5.2 排气管内温度场的分析	108
7.5.3 多孔介质热电材料的发电功率	111
参考文献	113
第8章 多孔介质燃烧的数学模型及数值模拟	115
8.1 多孔介质燃烧的研究综述	115
8.2 多孔介质燃烧的数学模型	117
8.3 二维环状多孔介质燃烧器的数值模拟	119
8.3.1 计算条件	119
8.3.2 高当量比绝热壁面工况下计算结果	121
8.3.3 燃烧器内温度场的影响因素分析	124
8.3.4 火焰移动速率	126
8.4 三维环状多孔介质燃烧的数值模拟	129
8.4.1 计算条件	129
8.4.2 计算结果分析	130
8.4.3 三维模型与二维模型的燃烧室内温度场对比	132
8.4.4 三维模型与二维模型的速度场对比	133
参考文献	136
第9章 室内颗粒污染物数学模型及其数值模拟	139
9.1 问题背景	139
9.2 室内颗粒污染物运动的数学模型	140
9.2.1 混合模型的基本方程组	140
9.2.2 湍流混合模型的推导	142
9.2.3 湍流混合模型的修正	144

9.3	办公室通风除尘过程的数值模拟	147
9.3.1	模拟对象	148
9.3.2	模拟结果分析	148
9.4	家用厨房颗粒分布运动的数值模拟	151
9.4.1	模拟对象	151
9.4.2	夏季混合通风下厨房颗粒浓度分布	153
9.4.3	不同季节厨房内颗粒浓度分布的比较	156
9.4.4	不同通风方式厨房内颗粒浓度分布的比较	159
9.5	颗粒排除效率的比较	164
	参考文献	165
第10章	声波团聚数学模型及其数值模拟	169
10.1	驻波声-流场中细颗粒运动数学模型	169
10.1.1	所受的主要作用力	169
10.1.2	声波驻波场中颗粒运动方程	170
10.2	颗粒声波凝聚的特性分析	171
10.3	超细颗粒声波团聚数值模拟	174
10.3.1	微通道超细颗粒声波团聚数学模型	175
10.3.2	超细颗粒声波团聚数值模拟方法	175
10.3.3	数值模拟结果	177
10.4	声波旋风分离器两相流的数学模型	179
10.4.1	湍流雷诺应力模型	179
10.4.2	颗粒模型	182
10.4.3	团聚动力学方程 ^[15]	182
10.5	旋风除尘器颗粒声波团聚和分离过程的数值模拟	185
10.5.1	模拟对象——旋风除尘器	185
10.5.2	边界条件与差分格式选择	186
10.5.3	单相流场计算结果	186
10.5.4	声波团聚两相流场计算结果	187
	参考文献	191
第11章	Rijke管中的热声现象的数值模拟研究	193
11.1	Rijke管中的热声现象的数值模拟研究综述	193
11.2	Rijke管中的热声现象的数学模型	196
11.3	模拟对象与计算方法	197
11.4	模拟结果及分析	199
11.4.1	起振过程	199
11.4.2	极限周期振荡	205
11.5	声波特性分析	210
11.5.1	相位角分析	210
11.5.2	Fourier 频谱分析	212

11.5.3 参量空间分布及周期云图	220
参考文献	224
第 12 章 声波制冷过程的数值模拟	226
12.1 热声制冷技术的 CFD 研究现状	226
12.2 热声制冷的流动与传热模型	229
12.3 简单声波制冷过程的数值模拟	232
12.3.1 模拟对象与计算方法	232
12.3.2 结果及分析	234
12.4 外部形状的改进	238
12.5 带回流通道的热声机	243
12.5.1 基本热流场	244
12.5.2 板叠附近流场分析与泵热机理讨论	250
参考文献	253
附录 曲线坐标系中场	255
F.1 场的基本知识	255
F.2 曲线坐标系表述的场	258
F.2.1 符号约定	258
F.2.2 曲线坐标系及孤元素	260
F.2.3 曲线系中的梯度、散度和旋度	262
F.3 曲线系流体力学的场论公式	265
F.4 曲线坐标系中的不可压缩流方程组	267

第一部分

基本模型

- 第 1 章 黏性不可压缩流体的数学模型
- 第 2 章 湍流流动的标准 $k-\varepsilon$ 模型
- 第 3 章 气体湍流燃烧模型
- 第 4 章 两相流颗粒轨道模型
- 第 5 章 两相流 PDF 模型

第 1 章 黏性不可压缩流体的数学模型

黏性不可压缩流体的数学模型的张量形式：

$$\begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \end{cases}$$

在直角系中的形式为：

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + f_x \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + f_y \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + f_z \end{cases}$$

本章符号表

v_i 或 v_j	流体速度张量	S 或 S_{ij}	流体变形速度张量
x_i 或 x_j	空间坐标张量	τ_{ij}	流体偏应力张量
p	流体压强	C_x	阻力系数
ρ	流体密度	δ_1	边界层的位移厚度
ν	流体运动黏性系数	δ_2	边界层的动量损失厚度
μ	流体动力黏性系数	δ_3	边界层的动能损失厚度
v_x, v_y, v_z	直角系中流体速度	δ	边界层名义厚度
v_r, v_θ, v_φ	球系中流体速度	$H = \delta_1 / \delta_2$	边界层的形状因子
x, y, z	直角系空间坐标	Re	雷诺数
r, θ, φ	球系空间坐标	c_{ijk}	流体各向异性黏性系数张量
f_i, f_x, f_y, f_z	某个方向, x, y, z 三个方向上的体积力	C_f	壁面摩擦因数
σ 或 σ_{ij}	流体应力张量	τ_w	壁面应力

采用流体力学微元体平衡分析方法可以推导出黏性流体运动的基本方程组,也可以直接由两大守恒定律(质量守恒定律和动量守恒定律)来建立控制流体运动的基本方程组。本章首先需要给出空间某点物理量的随体时间导数表达式、输运方程以及本构关系,再综合成黏性不可压缩流体的数学模型,即 $N-S$ (纳维-斯托克斯) 方程。最后以 Re 数的大小作为简化标准,以小 Re 数的绕圆柱层流和大 Re 数的平板边界层为例,分析这两个例子的详细求解过程。

1.1 几个基本公式

1. 随体导数

描述流体运动规律有拉格朗日法和欧拉法两种基本方法。拉格朗日法着眼于确定的流体质点,观察它的位置随时间的变化规律。欧拉法从空间坐标去研究控制体内的流体流动,它的描述对象是流场。将流体质点物理量 q 的拉格朗日变化率以欧拉导数的形式表示出来,称为随体导数,它是拉格朗日法与欧拉法的关联通道。首先给出流体质点的拉格朗日轨道方程:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

那么速度函数为一复合函数:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}[x(t), y(t), z(t)]$$

所以

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$$

对任意矢量 $\mathbf{a}$ 和任意标量 φ , 有

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{a} \quad (1-1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \text{grad} \varphi \quad (1-2)$$

式(1-1)和式(1-2)中右边第一项代表由时间的变化所引起的变化率,也就是由于场的时间不定性所造成的变化率,叫做当地导数。第二项代表假定时间不变时,流体质点在流场中的位置变化所引起的变化率,这是由于场的不均匀性造成的,叫做迁移导数。

2. 质量守恒的两个推论

取一个流体微团,体积为 τ , 质量为 m , 则 $m = \iiint_{\tau} \rho d\tau$ 。根据质量守恒(拉格朗日观点),下式在任一时刻都成立:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho d\tau = 0$$

可化为

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho d\tau = \iiint_{\tau} \frac{d}{dt} (\delta m) = 0$$

所以

$$\frac{d(\delta m)}{dt} = 0 \quad (1-3)$$

根据上式,可以获得下面两个推论:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho \varphi \delta \tau = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \varphi \delta m = \iiint_{\tau} \frac{d\varphi}{dt} \delta m + \iiint_{\tau} \varphi \frac{d(\delta m)}{dt} = \iiint_{\tau} \frac{d\varphi}{dt} \delta m = \iiint_{\tau} \rho \frac{d\varphi}{dt} \delta \tau \quad (1-4)$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho a \delta \tau = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} a \delta m = \iiint_{\tau} \frac{da}{dt} \delta m + \iiint_{\tau} a \frac{d(\delta m)}{dt} = \iiint_{\tau} \frac{da}{dt} \delta m = \iiint_{\tau} \rho \frac{da}{dt} \delta \tau \quad (1-5)$$

1.2 流动的基本方程组

1.2.1 守恒方程

1. 连续性方程

在空间中取一以 S 面为界的有限体积 τ , 固定在空间中而不随时间改变, 这是场的观点而不是拉格朗日的观点。取控制面 S 的外法线方向为正, $\mathbf{n}$ 为外法线的单位矢量, τ 内流体质量的变化, 主要由两部分组成。

第一, 通过表面 S 的流体的流入流出量, 令 U_n 为法线方向的速度, 单位时间内流入流出的总和是:

$$\oint_S \rho U_n dS$$

第二, 由于密度场的不定常性引起质量的变化:

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

根据质量守恒定理:

$$\oint_S \rho U_n dS + \iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = 0$$

运用高斯定理将上式中面积分化为体积分, 得:

$$\iiint_{\tau} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) \right] d\tau = 0$$

所以

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (1-6)$$

式(1-6)就是连续性方程, 第一项代表单位体积内由于密度场不定常性引起的质量变化; 第二项代表流体通过控制体表面流入流出的质量变化。

两种特殊情况:

① 定常流体: 单位体积流进和流出的质量相等

$$\partial \rho / \partial t = 0$$

连续方程变为:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1-7)$$

② 不可压缩流体: 流体密度不变化

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0$$

式(1-6)变为:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0$$

所以连续方程变为:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1-8)$$

2. 动量方程

任取一面积为 τ 的流体微元, 其边界为 S , $\mathbf{F}$ 为作用在流体单位质量上的质量力, $\boldsymbol{\sigma}$ 为作用在流体微团单位面积上的应力张量, 如图 1-1 所示, 根据动量定理:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho \mathbf{V} d\tau = \iiint_{\tau} \rho \mathbf{F} d\tau + \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S}$$

由式(1-5)和高斯定理

$$\iiint_{\tau} \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} d\tau = \iiint_{\tau} \rho \mathbf{F} d\tau + \iiint_{\tau} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} d\tau$$

所以

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}$$

应用随体导数公式得到

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \operatorname{div} \mathbf{V} = \rho \mathbf{F} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \quad \text{或} \quad \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (1-9)$$

式(1-9)的留下的应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 需要由速度表达出来, 所以还有两个问题: 一个是速度分解定理, 一个是应力由速度分解来近似表达的本构关系。

1.2.2 变形速度张量

1. 亥姆霍兹(Helmholtz)速度分解定理

设 $M_0(x, y, z)$ 点处的速度 $\mathbf{V}_0$, 流体微团内任一点 $M(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ 处的速度为 $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}$ 在 M_0 点邻域内展开:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \delta z \quad \text{或} \quad v_i = v_{0i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta x_j \quad (1-10)$$

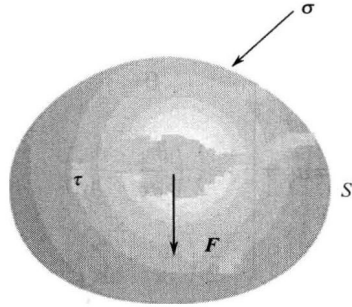


图 1-1

由张量分解定理,任一个二阶张量分解为反对称张量 $\mathbf{A}$ 和对称张量 $\mathbf{S}$,故

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \mathbf{A} + \mathbf{S} = a_{ij} + s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1-11)$$

将式(1-11)代入式(1-10),得

$$v_i = v_{0i} + a_{ij} \delta x_j + s_{ij} \delta x_j \quad (1-12)$$

在直角坐标系中

$$\mathbf{S} = s_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2} \theta_3 & \frac{1}{2} \theta_2 \\ \frac{1}{2} \theta_3 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2} \theta_1 \\ \frac{1}{2} \theta_2 & \frac{1}{2} \theta_1 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (1-13)$$

$$\mathbf{A} = a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1-14)$$

式(1-12)也可以用反对称张量 $\mathbf{A}$ 和对称张量 $\mathbf{S}$ 来表达

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{V} \times \delta \mathbf{r} + \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{r} \quad (1-15)$$

式(1-15)右边第一项表示流体微团平动,第二项表示转动,第三项表示形变。

2. 变形速度张量

从上面的速度分解定理可知,对称张量 $\mathbf{S}$ 表达流体形变,其中六个分量可作进一步分析,明确其物理意义。如图 1-2 所示,取一流体质点组成的线元 $\delta \mathbf{r}$,

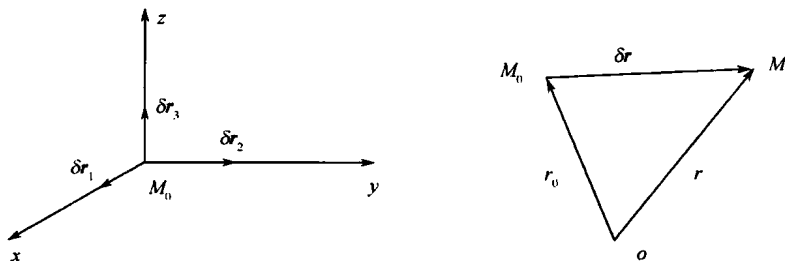


图 1-2

考虑其随体导数,由于

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$$

所以

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{r} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \mathbf{V} - \mathbf{V}_0 = \delta \mathbf{V} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}_1 + \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}_2 + \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}_3 \quad (1-16)$$

$$\delta \mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \delta z \quad (1-17)$$

比较式(1-16)、式(1-17)：

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \delta x = \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x \mathbf{i} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \delta x \mathbf{j} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \delta x \mathbf{k} \quad (1-18)$$

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} \delta y = \frac{\partial v_x}{\partial y} \delta y \mathbf{i} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \delta y \mathbf{j} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \delta y \mathbf{k} \quad (1-19)$$

进一步

$$\delta \mathbf{r}_1 \cdot \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}_1 = \frac{\partial v_x}{\partial x} (\delta x)^2 = \delta x \frac{d}{dt} \delta x$$

所以

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{\delta x} \frac{d}{dt} \delta x$$

同理

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{1}{\delta y} \frac{d}{dt} \delta y; \varepsilon_3 = \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{\delta z} \frac{d}{dt} \delta z$$

可以看出 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 的意义是 x, y, z 轴上 $\delta x, \delta y, \delta z$ 的相对拉伸速度或压缩速度。

用 $\delta \mathbf{r}_1$ 点乘式(1-19)和 $\delta \mathbf{r}_2$ 点乘式(1-18)得：

$$\delta \mathbf{r}_1 \cdot \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}_2 = \frac{\partial v_x}{\partial y} \delta x \delta y, \delta \mathbf{r}_2 \cdot \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}_1 = \frac{\partial v_y}{\partial x} \delta x \delta y$$

上两式相加得：

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \delta x \delta y &= \frac{d}{dt} (\delta \mathbf{r}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_2) = \frac{d}{dt} (\delta x \delta y \cos \gamma_{xy}) \\ &= \cos \gamma_{xy} \frac{d}{dt} (\delta x \delta y) - \delta x \delta y \sin \gamma_{xy} \frac{d \gamma_{xy}}{dt} \\ &= -\delta x \delta y \frac{d \gamma_{xy}}{dt} \end{aligned}$$

所以

$$\theta_3 = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{d \gamma_{xy}}{dt}$$

同理

$$\theta_1 = \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{d \gamma_{yz}}{dt}; \theta_2 = \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = -\frac{d \gamma_{xz}}{dt}$$

γ 表示坐标轴的夹角, 上式推导可知 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 的意义是流体微团相对三个坐标轴扭曲的角度变化率。

1.2.3 牛顿流本构方程

连续方程仅反映了流体的运动学特性,与流体的本构关系无关。动量方程反映了流体的动力学特性,因此需要本构方程。

1. 牛顿黏性实验定律

设有上下两块平行放置、面积很大而相距很近的平板,两板间充满静止的液体,如图 1-3 所示。若将下板固定,对上板施加一外力,使上板作平行于下板的等速直线运动。此时,紧靠上层平板的液体,因附着在板面上,具有与平板相同的速度。而紧靠下层板面的液体,也因附着于下板面而静止不动。在两平板间的液体可看成为许多平行于平板的流体层,层与层之间存在着速度差,即各液体层之间存在着相对运动。速度快的液体层对其相邻速度较慢的液体层产生了一个推动其向运动方向前进的力,而同时速度慢的液体层对速度快的液体层也作用着一个大小相等、方向相反的力,从而阻碍较快液体层向前运动。这种运动着的流体内部相邻两流体层之间的相互作用力,称为流体的内摩擦力和黏滞力。流体运动时内摩擦力的大小,体现了流体黏性的大小。实验证明,对于一定的液体,内摩擦力与两流体层的速度差 Δu 成正比,与两层之间的垂直距离 Δy 成反比,与两层间的接触面积 S 成正比,即

$$\sigma = \mu \frac{\Delta u}{\Delta y} = \mu \frac{dv_x}{dy}$$

其中 μ 为流体动力学黏性系数, $\nu = \mu/\rho$ 为运动学黏性系数,是温度的函数。上式表明切向应力与剪切变形速度成正比。

2. 广义牛顿定律

真实流体的力学性质是很复杂的,如图 1-4 所示,不同种类的流体可能表现出完全不同的力学特性,即便是同一种流体在不同的外部条件下,例如温度不同时,力学特性也会有很大的差异。因此要建立一个普适的本构方程几乎是不可能的。Stokes (斯托克斯) 提出了适用于牛顿流体的如下三条假设:

- (1) 流体是各向同性的,也就是说流体的物理性质与方向无关,只是坐标位置的函数;
- (2) 应力张量是应变率张量的线性函数,与旋度无关;
- (3) 静止流体中,切应力为零,正应力的值为流体的静压。

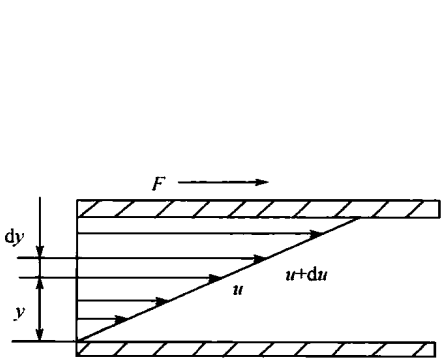


图 1-3 平板间流体速度分布

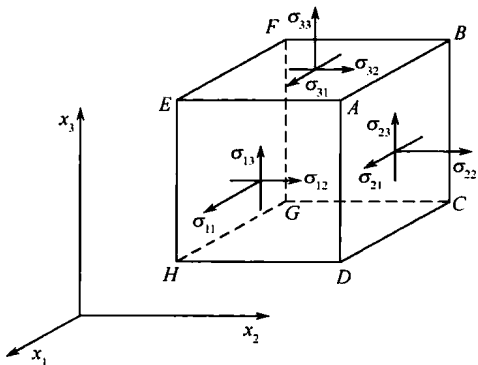


图 1-4 应力张量示意图