高等学校经济管理数学基础辅导系列

李延敏 总主编

经济数学

概率论与数理统计学习辅导

于卓熙 冯由玲 王雷 主编

清华大学出版社

高等学校经济管理数学基础辅导系列

李延敏 总主编

经济数学

概率论与数理统计学习辅导

于卓熙 冯由玲 王雷 主编

赵启明 刘丽梅 刘琳琳 副主编

清华大学出版社

北京

内 容 简 介

本书是吉林省精品课项目及吉林省高等教育重点教学项目研究成果之一，是高等学校经济管理数学基础辅导系列教材中的第三分册.

本书内容涵盖了随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、回归分析等9章的知识要点总结、典型例题分析、配套习题详解及模拟试题与解答.

本书可作为经济管理类本科学习辅导教材，也可作为报考研究生的数学复习指导参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

经济数学：概率论与数理统计学习辅导/于卓熙，冯由玲，王雷主编.--北京：清华大学出版社，2012.10
(高等学校经济管理数学基础辅导系列/总主编 李延敏)
ISBN 978-7-302-28144-3

Ⅰ.①经… Ⅱ.①于… ②冯… ③王… Ⅲ.①经济数学—高等学校—教学参考资料 ②概率论—高等学校—教学参考资料 ③数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①F224.0 ②O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第034322号

责任编辑：佟丽霞 陈 明
封面设计：常雪影
责任校对：刘玉霞
责任印制：沈 露

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京嘉实印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：18.5　　**字　　数**：450千字
版　　次：2012年10月第1版　　**印　　次**：2012年10月第1次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：33.00元

产品编号：044077-01

PREFACE

前言

本书是吉林省精品课项目及吉林省高等教育重点教学项目研究成果之一，是高等学校经济管理数学基础辅导系列教材中的第三分册.

本套高等学校经济管理数学基础辅导系列由《经济数学——微积分学习辅导》、《经济数学——线性代数学习辅导》和《经济数学——概率论与数理统计学习辅导》三本教材组成，由李延敏任总主编.

全书以教材内容为主线，围绕教材中的随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、回归分析等9章的基本概念、理论和方法进行总结，精心组织典型例题与自测试题，对配套教材习题给出详细解答. 对每一章教材内容，本书编配四部分内容：知识要点总结、典型例题分析、教材习题详解、模拟试题及解答. 编写时力求突出以下特点：

1. 知识要点的总结与课程内容和要求有机联系起来，有助于学生对基础知识的巩固、理解和提高.

2. 典型例题选题广泛、典型且新颖，按知识和解题思路的自然顺序编排，有助于学生把握知识间的联系，使学生能够受到启发并开拓思路.

3. 既有加强对概念深入理解的问题，又有综合运用相关知识的问题. 通过点面结合，促使学生打牢基础的同时，加强知识间的联系并提高综合分析和应用的能力.

4. 分析、启发式的解题思路，帮助学生迅速抓住问题的关键和本质，培养灵活性，避免简单的、机械的模仿，真正提高解题能力.

5. 典型例题和自测习题相搭配，联系紧密，使学生能够学练结合，巩固提高.

6. 归纳总结了历届考研题型，使学生能够在巩固基础的同时提高应试能力，避免学生考研复习和一些考研辅导书不重视基础的通病.

7. 对教材中一般习题都给出解答，部分较难的习题给出详细的解答，解决学生在学习课程时遇到的困难.

8. 对应教材自测试题分两类，既有基础考评又有提高综合试题，有利于分级分层教学.

本书共有9章，第1章由刘丽梅编写；第2章由于卓熙编写；第3章由张雨雷编写；第4章、第5章由王雷编写；第6章、第7章由赵启明、陈知之编写；第8章由冯由玲编写；第9章由刘琳琳、李延敏编写. 全书的编写思想、结构安排、统稿定稿由于卓熙承担.

本辅导教材的出版得到了清华大学出版社的大力支持，尤其是佟丽霞编辑为

本教材的策划和出版做了大量的工作，在此表示衷心感谢．本辅导教材也得到了吉林财经大学、北华大学等高校的大力支持，在此一并表示感谢．

我们的目标是编写出一套质量较高、适合当前高等学校经济管理数学教学实际需要的配套辅导教材，但限于水平，本书仍可能存在疏漏之处，敬请广大读者批评指正．

编　者

2012 年 1 月

CONTENTS

目录

第一章

随机事件与概率

一、知识要点

（一）随机事件与样本空间

1. 随机试验

对随机现象进行的实验或观察统称为随机试验，简称试验，通常用字母 E 表示，它具有三个特点：

（1）试验可以在相同的情形下重复进行；

（2）试验的所有可能出现的基本结果是明确可知的，并且不止一个；

（3）每次试验总是恰好出现这些可能的基本结果中的一个，但在每次试验之前却不能确定这次试验会出现哪一个基本结果.

2. 随机事件

（1）基本事件　随机试验的每一种可能的基本结果，称为基本事件.

（2）复杂事件　由多个基本事件所组成的试验的可能结果，相对于基本事件，称为复杂事件.

（3）随机事件　无论是基本事件还是复杂事件，它们在试验中发生与否，都带有随机性，都称为随机事件，简称事件，通常用字母 $A,B,C,\cdots$ 表示，必要时加上下标. 如果组成一个事件的某一个基本事件发生了，就称这个事件发生.

（4）必然事件　每次试验中必然发生的事件称为必然事件，记作 Ω.

（5）不可能事件　每次试验中必然不发生的事件称为不可能事件，记作 $\varnothing$.

3. 样本空间

随机试验的一切可能的基本结果组成的集合称为样本空间，记为 $\Omega=\{\omega\}$，其中 ω 表示基本结果，称为该样本空间的样本点. 样本空间是必然事件.

随机事件用由这些基本事件对应的样本点所构成的集合表示，它是样本空间的一个子集. 该随机事件发生，当且仅当随机事件所包含的某个样本点在试验中出现.

（二）事件间的关系与事件的运算

1. 事件间的关系与运算

在一个样本空间 Ω 中，可以定义多个随机事件. 各事件间的关系和运算与集合间的关

系和运算一样,为简明起见,将其归纳如下表:

关系及运算名称	表示法	含义
包含关系	$A\subset B$ 或 $B\supset A$	事件 A 发生必然导致事件 B 发生
相等关系	$A=B$	事件 A 与 B 互为包含
事件的和(并)	$A+B$ 或 $A\cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生
	$\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$	n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生
	$\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$	事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生
事件的积(交)	AB 或 $A\cap B$	事件 A 与 B 同时发生
	$\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$	n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生
	$\prod\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$	事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生
事件的差	$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生
互不相容事件(互斥事件)	$AB=\varnothing$	事件 A 与事件 B 不能同时发生
	$A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$	n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容
	$A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$	可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 互不相容
对立事件(互逆事件)	$\overline{A}=\Omega-A$	事件 A 的逆事件
完备事件组	$\sum\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$ 且任何 $i\neq j(i,j=1,2,\cdots,n)$ 有 $A_iA_j=\varnothing$	n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组
	$\sum\limits_{i}A_i=\Omega$ 且任何 $i\neq j(i,j=1,2,\cdots)$ 有 $A_iA_j=\varnothing$	可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 构成一个完备事件组

2. 事件运算的运算律

交换律 $A+B=B+A$; $AB=BA$.

结合律 $A+(B+C)=(A+B)+C$; $A(BC)=(AB)C$.

分配律 $(A+B)C=AC+BC$; $(AB)+C=(A+C)(B+C)$.

对偶律(德摩根公式) $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$; $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

3. 常用结论

(1) $\varnothing\subset A\subset\Omega$; $A\subset(A+B)$, $B\subset(A+B)$.

(2) 若 $A+B=A$,则 $B\subset A$.

(3) $A+A=A$.

(4) $AB\subset A$, $AB\subset B$.

(5) 若 $AB=A$,则 $A\subset B$.

(6) $A\varnothing=\varnothing A=\varnothing$, $A\Omega=A$, $AA=A$.

(7) $A-B\subset A$.

(8) 若 $A-B=A$,则 $AB=\varnothing$.

(9) $A-\varnothing=A, A-\Omega=\varnothing, A-A=\varnothing$.

(10) $\overline{\overline{A}}=A, A\overline{A}=\varnothing, A+\overline{A}=\Omega$.

(11) $A-B$ 与 AB 互不相容,且 $A=(A-B)+AB$.

(12) 两个对立事件一定是互不相容事件;反之,两个互不相容事件不一定是对立事件.

(三) 频率与概率

1. 概率的定义

(1) 统计定义

设进行 n 次重复试验,$n(A)$是事件 A 在 n 次试验中发生的频数,若当 n 充分大时,事件 A 发生的频率 $\mu_n(A)=\dfrac{n(A)}{n}$稳定地在某一常数 p 附近摆动,则称 p 是事件 A 的概率,记作 $P(A)=p$.

(2) 公理化定义(一般定义)

设 Ω 是随机试验 E 的样本空间,如果对于 E 中任一事件 $A\subset\Omega$,都对应一个实数 $P(A)$,且 $P(A)$满足如下三个条件:

① $P(A)\geqslant 0$;

② $P(\Omega)=1$;

③ 对于试验 E 的可列个互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$,有 $P\left(\sum A_i\right)=\sum P(A_i)$,则称 $P(A)$ 为随机事件 A 的概率.

以上三个条件是概率的三条公理,利用它们能得到概率的性质.

2. 概率的性质

(1) 不可能事件的概率为 0,即 $P(\varnothing)=0$.

(2) 有限可加性　若 $A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i\neq j\leqslant n)$,则 $P\left(\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$. 特别是两个互不相容事件 A 与 B 之和的概率为 $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

(3) 如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 构成一个完备事件组,则有 $P\left(\sum A_i\right)=1$,特别有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(4) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$,特别地,若 $B\subset A$,则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$,且 $P(A)\geqslant P(B)$.

(5) 加法公式　对任意两个事件 A,B,有 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

推广(一般加法公式) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个随机事件,则有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P\left(\prod_{i=1}^{n}A_i\right).$$

(四) 古典概型和几何概型

1. 古典概型

若试验 E 满足条件：(1)样本空间中的样本点只有有限个，即基本事件总数是有限的(有限性)；(2)每个基本事件发生(出现)的可能性相同(等可能性)，则称为古典概型.

在古典概型中，如果事件 A 是由全部 n 个基本事件中的某 m 个基本事件复合而成的(m 称为有利于 A 的基本事件数)，则事件 A 的概率定义为 $P(A)=\frac{m}{n}$.

2. 几何概型

若对于一个随机试验，每个样本点出现是等可能的，样本空间 Ω 所含的样本点个数为无穷多个，且具有非零的、有限的几何度量，即 $0<m(\Omega)<+\infty$，则称这一随机试验是几何概型.

在几何概型中，以 $m(A)$ 表示任一事件 A 的几何度量，若 $0<m(\Omega)<+\infty$，则事件 A 的概率定义为 $P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}$.

(五) 条件概率

1. 条件概率定义

设 A,B 是试验 E 的两个事件，且 $P(A)>0$，则称 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率，简称 B 对 A 的条件概率.

条件概率是概率论中一个重要的概念，它也是概率，因而具有概率的所有性质.

2. 条件概率的计算

计算条件概率 $P(B|A)$ 有两种方法：

(1) 在样本空间 Ω 中，先算 $P(AB)$，$P(A)$，然后利用定义公式计算得 $P(B|A)$.

(2) 在样本空间 Ω 的缩减样本空间 $\Omega_A=A$ 中计算 B 发生的概率即为 $P(B|A)$，并且这种方法比较方便.

3. 乘法公式

设 A,B 为试验 E 的两个事件，若 $P(A)>0$，则有 $P(AB)=P(A)P(B|A)$；若 $P(B)>0$，则有 $P(AB)=P(B)P(A|B)$.

一般地，对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

(六) 事件的独立性

1. 定义

(1) 两个事件相互独立

设 A,B 是试验 E 中的两个事件,如果 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件 A 与事件 B 相互独立,简称独立.

(2) 三个事件相互独立

若事件 A,B,C 两两独立,并且 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$,则称 A,B,C 相互独立.

(3) n 个事件相互独立

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件,若对其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}(1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant n)$,恒有 $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$,则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

(4) n 个事件两两独立

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件,若对任意 $1\leqslant i_1<i_2\leqslant n$ 个事件,恒有 $P(A_{i_1}A_{i_2})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})$,则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立.

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立一定两两独立,反之两两独立不一定相互独立.

2. 主要结论

(1) 设 A 与 B 为两个事件,$P(B)>0$,则 A 与 B 独立的充分必要条件是 $P(A|B)=P(A)$.

(2)设 A 与 B 为两个事件,则 A 与 B,$\bar{A}$ 与 B,A 与 $\bar{B}$,$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 中,只要有一对事件独立,其余三对也独立.

(3) 设 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$,则下面 4 个等式等价,即其中任何一个成立,另外三个也一定成立:

$$P(B\mid A)=P(B);\quad P(B\mid\bar{A})=P(B);\quad P(A\mid B)=P(A);\quad P(A\mid\bar{B})=P(A).$$

(4) 设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则它们中的任意一部分事件换成各自事件的对立事件后,所得的 n 个事件也相互独立.

(5) 设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n).$$

3. 伯努利概型

设试验 E 只有两种可能结果 A 和 $\bar{A}$,且每次试验事件 A 发生的概率是 $p(0<p<1)$,即 $P(A)=p,P(\bar{A})=1-p=q$,将 E 独立地重复进行 n 次,则将这 n 次重复的独立试验称为 n 重伯努利试验,简称伯努利试验或伯努利概型,记为 E^n. n 重伯努利试验中事件 A 发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n,\quad 0<p<1,\quad q=1-p.$$

(七) 全概率公式与贝叶斯公式

1. 全概率公式

如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组,而且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则对于任何一个事件 B,有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i),$$

此公式称为全概率公式.

使用全概率公式的关键是找到与事件 B 的发生相联系的完备事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$.

2. 贝叶斯公式

设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组,概率 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则对于任何一个事件 B,若 $P(B)>0$,则有

$$P(A_m \mid B)=\frac{P(A_m)P(B \mid A_m)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}, \quad m=1,2,\cdots,n,$$

此公式称为贝叶斯公式,又称为后验概率公式或逆概率公式.

二、典型例题

(一) 随机事件的运算及其概率性质

例 1 设事件 A,B,C 是某个试验的随机事件,事件 D 表示 A,B,C 三个事件中至少有两个发生,则 $D\neq$( ).

A. $AB+BC+AC$;

B. $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$;

C. $ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$;

D. $\Omega-(\overline{A}\overline{B}+\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{C})$.

解 根据题意,$D=AB+BC+AC$,这是最简单的一种表示法. 对于选项 C,有

$$\begin{aligned}&ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC\\=&(ABC+AB\overline{C})+(ABC+A\overline{B}C)+(ABC+\overline{A}BC)\\=&AB(C+\overline{C})+AC(B+\overline{B})+BC(A+\overline{A})\\=&AB+AC+BC,\end{aligned}$$

因此

$$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC\neq AB+BC+AC.$$

对于选项 D,有

$$\begin{aligned}&\Omega-(\overline{A}\overline{B}+\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{C})\\=&\overline{\overline{A}\overline{B}+\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{C}}\\=&\overline{\overline{A}\overline{B}}\cdot\overline{\overline{B}\overline{C}}\cdot\overline{\overline{A}\overline{C}}\\=&(A+B)(B+C)(A+C)\\=&AB+BC+AC.\end{aligned}$$

所以答案是 B.

例 2 下列三对事件不是对立事件的是( ).

A. $\{x\mid |x-a|<10\}$ 与 $\{x\mid |x-a|\geqslant 10\}$;

B. 30 个产品全是合格品与 30 个产品中只有一个废品;

C. 30 个产品全是合格品与 30 个产品中至少有一个废品.

解 本题考查互不相容事件与对立事件的区别. 事件 A 与事件 B 互不相容是指试验中 A 与 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$; 而 A 与 B 为对立事件是指一次试验中 A 与 B 必有一个

发生且仅有一个发生，即 $AB=\varnothing$ 且 $A+B=\Omega$.

对于 A，设事件 $A=\{x \mid |x-a|<10\}$，$B=\{x \mid |x-a|\geqslant 10\}$，显然 $AB=\varnothing$ 且 $A+B=\Omega$，所以 A 与 B 是对立事件.

对于 B，两个事件不能同时发生，但也可以同时不发生，所以两事件互不相容，但不是对立事件.

对于 C，两个事件不能同时发生，但在一次试验中必发生其中一个，所以两个事件是对立事件.

因此答案是 B.

例 3 （1994 年数一）已知事件 A,B 满足 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$，且 $P(A)=p$，求 $P(B)$.

解 由于

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB),$$

及 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$，故 $1-P(A)-P(B)=0$. 从而 $P(B)=1-p$.

例 4 将 n 个同样的箱子和 n 只同样的小球分别编号为 $1,2,\cdots,n$. 把这 n 只小球随机地投入 n 个箱子中，每个箱子中放一只小球. 问至少有一只小球的编号与箱子的编号相同的概率是多少？

解 设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示事件“第 i 号小球恰好放入第 i 号箱子中”，则所求事件 $A=A_1+A_2+\cdots+A_n=\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$，而 $P(A_i)=\dfrac{1}{n}$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)=1$. 而 $P(A_iA_j)=\dfrac{1}{n(n-1)}$，$i\neq j$，所以

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)=\mathrm{C}_n^2\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{2!}.$$

同理有

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)=\mathrm{C}_n^3\frac{1}{n(n-1)(n-2)}=\frac{1}{3!},\quad P(A_1A_2\cdots A_n)=\mathrm{C}_n^n\frac{1}{n!}=\frac{1}{n!},$$

由一般加法公式，有

$$\begin{aligned}P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P\left(\prod_{i=1}^{n}A_i\right)\\&=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!},\end{aligned}$$

当 n 充分大时，这个概率近似等于 $1-\mathrm{e}^{-1}$.

（二）古典概型

1. 取球问题

例 5 一袋中装有 $m+n$ 个球，其中 m 个黑球，n 个白球，现随机地从中每次取出一个球（不放回），求下列事件的概率：

(1) 第 i 次取到的是白球；

(2) 第 i 次才取到白球；

(3) 前 i 次中能取到白球；

(4) 前 i 次中恰好取到 l 个白球（$l\leqslant i\leqslant m+n$，$l\leqslant n$）；

(5) 到第 i 次为止才取到 l 个白球($l\leqslant i\leqslant m+n, l\leqslant n$).

解 (1) $m+n$ 个球按顺序取出共有$(m+n)!$种取法，其中第 i 次取出的是白球的取法按乘法法则共有 $C_n^1\times(m+n-1)!$ 种取法，于是"第 i 次取到的是白球"这个事件 A_i 的概率为

$$P(A_i)=\frac{C_n^1(m+n-1)!}{(m+n)!}=\frac{n}{m+n}.$$

(2) 同(1)，基本事件总数为$(m+n)!$，"第 i 次才取到白球"等价于"前 $i-1$ 次取到的全是黑球，而且第 i 次取到的是白球"，由乘法法则，其取法共有 $C_n^1A_m^{i-1}(m+n-i)!$. 于是"第 i 次才取到白球"这个事件 B_i 的概率为

$$P(B_i)=\frac{C_n^1A_m^{i-1}(m+n-i)!}{(m+n)!}=\frac{nA_m^{i-1}}{A_{m+n}^i}.$$

(3) 记该事件为 C_i，先计算其对立事件"前 i 次中没有取到白球"的概率得

$$P(\bar{C}_i)=\frac{A_m^i(m+n-i)!}{(m+n)!}=\frac{A_m^i}{A_{m+n}^i}=\frac{C_m^i}{C_{m+n}^i},$$

于是 $P(C_i)=1-P(\bar{C}_i)=1-\frac{C_m^i}{C_{m+n}^i}$.

(4) 记该事件为 D_i，则 $P(D_i)=\frac{C_i^lA_n^lA_m^{i-l}(m+n-i)!}{(m+n)!}=\frac{C_i^lA_n^lA_m^{i-l}}{A_{m+n}^i}=\frac{C_n^lC_m^{i-l}}{C_{m+n}^i}$.

(5) "到第 i 次为止才取到 l 个白球"等价于"前 $i-1$ 次恰好取到 $l-1$ 个白球，而第 i 次取到的是白球"，于是该事件 E_i 的概率为

$$P(E_i)=\frac{C_{i-1}^{l-1}A_n^{l-1}A_m^{(i-1)-(l-1)}C_{n-l+1}^1(m+n-i)!}{(m+n)!}=\frac{C_n^{l-1}C_m^{i-l}(n-l+1)}{iC_{m+n}^i}.$$

例 6 一袋中装有 $m+n$ 个球，其中 m 个黑球，n 个白球，每次从中任取一球，取后放回，求下列事件的概率：

(1) 第 i 次取到的是白球；

(2) 第 i 次才取到白球；

(3) 前 i 次能取到白球；

(4) 前 i 次中恰好取到 l 个白球；

(5) 到第 i 次为止才取到 l 个白球.

分析 对于有放回的取球，计算取法要用重复排列数，比如 $m+n$ 个球，每次取一个球有 $m+n$ 种取法，根据乘法法则，i 次取球便有$(m+n)^i$ 种取法.

解 (1) i 次取球共有$(m+n)^i$ 种取法，"第 i 次取到的是白球"的取法根据乘法法则共有 $C_n^1(m+n)^{i-1}$种，从而所求事件 A_i 的概率为

$$P(A_i)=\frac{C_n^1(m+n)^{i-1}}{(m+n)^i}=\frac{n}{m+n}.$$

(2) 基本事件总数同(1)，而"第 i 次才取到白球"等价于"前 $i-1$ 次取到的全是黑球(共有 m^{i-1}种取法)，且第 i 次取到的是白球(共有 n 种取法)"，由乘法法则第 i 次才取到白球的取法共有 nm^{i-1}种，于是所求事件 B_i 的概率为 $P(B_i)=\frac{nm^{i-1}}{(m+n)^i}$.

(3) 所求事件记为 C_i，先计算其对立事件"前 i 次中没有取到白球"的概率 $P(\bar{C}_i)=$