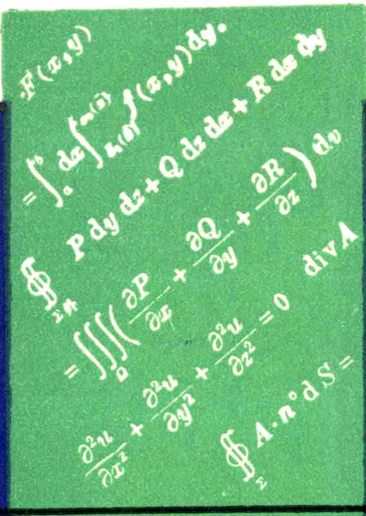
WEIJIFENXUEYINLUN WEIJIFENXUEYINLUN

微积分学引论

下 册



陈 仲 姚天行

南京大学出版社

微积分学引论

·下　册·

陈　仲　姚天行

中国科学技术大学
图书馆藏

南京大学出版社

1991·南　京

（苏）新登字第 011 号

内 容 简 介

本书根据国家教委 1989 年审定的“综合性大学本科物理类专业高等数学课程教学基本要求”与南京大学教学实际情况编写．全书共分上下两册，上册包括函数与极限、导数与微分、一元函数积分学、级数等；下册包括空间解析几何、偏微分学、重积分、线积分、面积分、场论、广义积分等内容．

本书基础厚实，文字通顺，许多内容的处理采用了与众不同的方法，使证明更加简捷、严密，有些定理的证明是作者自己得到的最新方法．例题和习题丰富，有利于提高读者的分析能力．书末附有习题答案与提示．

本书可供综合大学、理工科大学、师范院校作为教材．其中小号字可略去不讲，仍保持完整的系统性．

微 积 分 学 引 论

下 册

陈 仲 姚天行

*

南京大学出版社出版

（南京大学校内）

江苏省新华书店发行　　丹阳新华印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 13.5 字数 351 千

1991 年 12 月第 1 版　　1991 年 12 月第 1 次印刷

印数 1--3000

*

ISBN 7-305-01323-4/O·70

定价 4.40 元

目　　录

第五章　空间解析几何

第六章 偏微分学

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.c

第七章 重 积 分

第八章 曲线积分·曲面积分

第九章 场 论

第十章 广义积分学

章目前标有 * 的是教学参考材料，供学生课外选学。

第五章　空间解析几何

空间解析几何与平面解析几何一样，都是运用代数的方法研究几何图形。建立平面直角坐标系，可将平面上的点与两个有序的实数 $(a,\ b)$ 一一对应，从而把平面几何图形与方程式联系起来。为了研究空间几何图形，这一章首先建立空间直角坐标系，介绍向量的基本知识，然后以向量为工具研究空间的平面与直线，以及空间曲面与空间曲线。

第一节　空间直角坐标系·向量

§5.1.1　空间直角坐标系

过一定点 O，作三条相互垂直的数轴，分别记为 x 轴、y 轴、z 轴，它们都以 O 点为原点，单位长度相同，且 x,y,z 轴的正向组成右手系（即从 x 轴正向沿右手握拳方向旋转到 y 轴正向时，

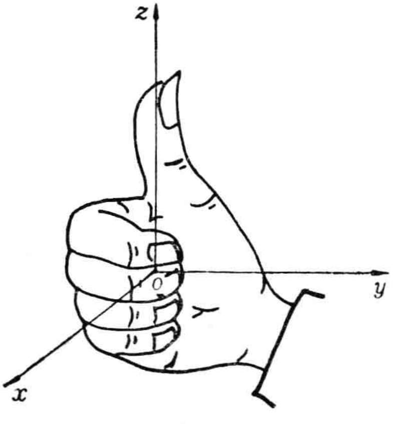


图 5.1

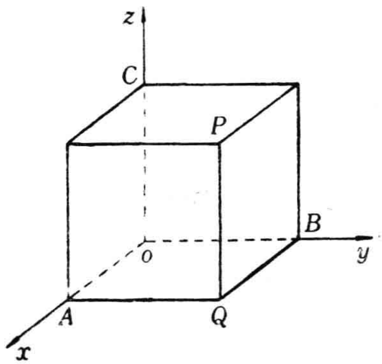


图 5.2

姆指的指向为 z 轴正向（图 5.1）），这就是**空间直角坐标系**，记为 $O\text{-}xyz$．点 O 称为**坐标原点**；x，y，z 轴称为**坐标轴**；每两条坐标轴所决定的平面称为**坐标平面**．坐标平面有三个，分别记为 xy 平面，yz 平面，zx 平面．

给定空间任一点 P，过 P 作三个平面分别垂直于 x，y，z 轴，三个平面与轴的交点分别记为 A，B，C（图 5.2），若 A，B，C 在三条坐标轴上的坐标分别为 a，b，c，则定义**点 P 的坐标**为 (a,b,c)．反过来，给定三个有序的实数 a，b，c，在空间直角坐标系中，可唯一决定一个点 P，使该点的坐标为 (a,b,c)．因此，空间任一点与其坐标一一对应，记为 $P(a,b,c)$，其中 a，b，c 三数称为**坐标分量**（依次为 x 分量，y 分量，z 分量）．图 5.2 中点 A，B，C 的坐标为

$$A(a,0,0),\ B(0,b,0),\ C(0,0,c).$$

坐标原点 O 的坐标为 $O(0,0,0)$．

在空间直角坐标系中，三个坐标平面将整个空间分为 8 个部分，每一部分按其坐标分量的符号，分别称为第 1—第 8 **卦限**：

x 分量的符号	+	−	−	+	+	−	−	+
y 分量的符号	+	+	−	−	+	+	−	−
z 分量的符号	+	+	+	+	−	−	−	−
卦限	1	2	3	4	5	6	7	8

例 求点 $P(a,b,c)$ 到原点 O 的距离．

解 如图 5.2 所示．据勾股定理，点 P 到原点 O 的距离为

$$|OP|=\sqrt{|OQ|^2+|QP|^2}$$
$$=\sqrt{|OA|^2+|OB|^2+|OC|^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.c

§5.1.2 向量的基本概念

在物理学中，常常遇到既有数值大小，又有方向的量，如力、加速度、磁场强度等. 我们把既有数值大小，又有方向的量称为**向量(或矢量)**. 选定单位长度，向量可用空间的有向线段 $\overrightarrow{PQ}$（或简记为 $\boldsymbol{a}$）表示，这里 P, Q 分别是该线段的起点和终点，线段 PQ 的长度 $|PQ|$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的数值，称为**向量的模**，记为 $|\boldsymbol{a}|$；从 P 到 Q 的指向表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向. 模等于 0 的向量称为**零向量**，记为 $\mathbf{0}$. 零向量是一个特殊的向量，它的方向可以是任意的方向. 模等于 1 的向量称为**单位向量**.

已知向量 $\overrightarrow{P_1Q_1}$ 与 $\overrightarrow{P_2Q_2}$，将 $\overrightarrow{P_2Q_2}$ 平行移动，使其起点 P_2 与 P_1 重合，若终点 Q_2 落在射线 P_1Q_1 上，则称向量 $\overrightarrow{P_1Q_1}$ 与 $\overrightarrow{P_2Q_2}$ **方向相同**；若终点 Q_2 落在射线 P_1Q_1 的反向延长线上，则称向量 $\overrightarrow{P_1Q_1}$ 与 $\overrightarrow{P_2Q_2}$ **方向相反**. 当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同或方向相反时，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行(或共线)**，记为 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

两个方向相同且模相等的向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 称为是**相等**的，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

取一空间直角坐标系，单位长度同上所取，将向量 $\boldsymbol{a}$ 平行移动，使其起点与坐标原点重合，设其终点坐标为 (a, b, c)，则定义**向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标**为 $\{a, b, c\}$，记为

$$\boldsymbol{a}=\{a, b, c\}.$$

此式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式. 此时向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为

$$|\boldsymbol{a}|=|OP|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

它的方向由

$$\cos \alpha=\frac{a}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos \beta=\frac{b}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos \gamma=\frac{c}{|\boldsymbol{a}|}$$

决定，这里 $\alpha, \beta, \gamma\ (0\leqslant\alpha、\beta、\gamma\leqslant\pi)$ 分别是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴，y 轴，z 轴的夹角(图 5.3)，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**，$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**. 由于

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

所以向量

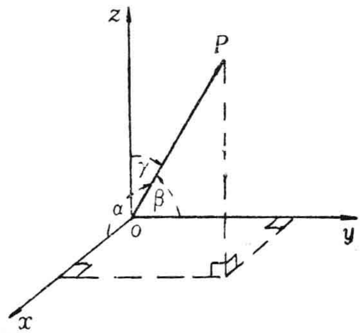


图 5.3

$$\boldsymbol{a}^{\circ}\stackrel{\text{def}}{=\!=}\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$$

是与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

沿三条坐标轴方向的单位向量称为**基向量**，分别记为 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，显见有

$$\boldsymbol{i}=\{1,0,0\},\ \boldsymbol{j}=\{0,1,0\},\ \boldsymbol{k}=\{0,0,1\}.$$

例 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与三条坐标轴的夹角相等，求 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

解 由于 $\alpha=\beta=\gamma$，

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=3\cos^2\alpha=1,$$

所以

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\pm\frac{\sqrt{3}}{3},$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为

$$\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\quad 或\quad -\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

§5.1.3 向量在轴上的射影

已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与一数轴 u，将向量 $\boldsymbol{a}$ 平移，使其起点位于 u 轴上任一点 M 处，其终点记为 N，$\overrightarrow{MN}$ 与 u 轴正向的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$

称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角**，并称 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ 为**向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的射影**，记为

$$\mathrm{Prj}_u\,\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta.$$

自点 P 向 u 轴作垂线，垂足为 P_1，我们称点 P_1 为**点 P 在 u 轴上的投影**. 记向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点 P 与终点 Q 在 u 轴上的投影分别为 P_1, Q_1，作向量 $\overrightarrow{P_1Q_2}=\overrightarrow{PQ}$（图 5.4），设 $\overrightarrow{P_1Q_2}$ 与 u 轴正向的夹角为 θ，则显见有

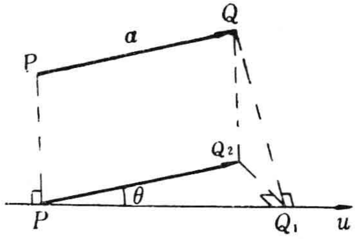


图 5.4

$$\begin{aligned}\mathrm{Prj}_u\,\boldsymbol{a}&=|\boldsymbol{a}|\cos\theta\\&=|\overrightarrow{P_1Q_2}|\cos\theta\\&=\varepsilon|P_1Q_1|,\end{aligned}$$

这里

$$\varepsilon=\begin{cases}1, & \text{当 } \overrightarrow{P_1Q_1} \text{ 与 } u \text{ 轴方向相同时；}\\-1, & \text{当 } \overrightarrow{P_1Q_1} \text{ 与 } u \text{ 轴方向相反时.}\end{cases}$$

定理 5.1 向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 $\{a, b, c\}$ 的充要条件是：向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x, y, z 轴上的射影分别为 a, b, c.

证 不妨设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，则向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{a}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\beta=\frac{b}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{c}{|\boldsymbol{a}|},$$

$$\Longleftrightarrow\qquad \begin{aligned}\mathrm{Prj}_x\,\boldsymbol{a}&=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha=a,\\ \mathrm{Prj}_y\,\boldsymbol{a}&=|\boldsymbol{a}|\cos\beta=b,\\ \mathrm{Prj}_z\,\boldsymbol{a}&=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma=c.\end{aligned}\qquad \square$$

对于两个首尾相连的向量 $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$，我们有

定理 5.2 **（射影定理）**

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{A_1A_3}=\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{A_1A_2}+\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{A_2A_3}.$$

证 设点 A_1, A_2, A_3 在 u 轴上的投影分别为 B_1, B_2, B_3，对于图 5.5 所示的情况，有

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{A_1A_3}=|B_1B_3|,$$

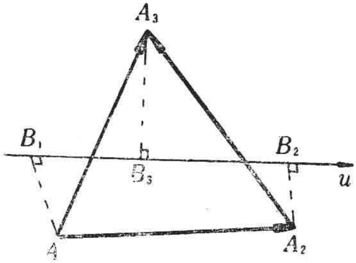


图 5.5

$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{A_1A_2} = |B_1B_2|,$$

$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{A_2A_3} = -|B_2B_3|,$$

由于

$$|B_1B_3| = |B_1B_2| - |B_2B_3|,$$

所以

$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{A_1A_3} = \mathrm{Prj}_u \overrightarrow{A_1A_2} + \mathrm{Prj}_u \overrightarrow{A_2A_3}.$$

其它情况的证明是类似的. □

此定理还可推广到多个首尾相连的向量:

定理 5.3

$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{A_1A_n} = \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{Prj}_u \overrightarrow{A_kA_{k+1}}.$$

运用向量在轴上的射影概念，我们来引进向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的射影概念. 作 u 轴与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行，且指向相同，**向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的射影**定义为:

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a} = \mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle,$$

这里 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，即向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角. 同样地，我们有

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}| \cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle.$$

§5.1.4 向量的加法与数乘

已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 将向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点记为 A_1, 终点记为 A_2; 将向量 $\boldsymbol{b}$ 平移，使其起点为 A_2, 终点记为 A_3(图 5.6),我们称向量 $\overrightarrow{A_1A_3}$ 为**向量 $\boldsymbol{a}$ 加 $\boldsymbol{b}$ 的和**，记为

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{A_1A_3}.$$

向量的加法在力学中表示两力的合成,它服从**三角形法则**(或称**平行四边形法则**).

若将向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点移至 A_1, 终点记为 A_4 (图 5.7), 我们称向量 $\overrightarrow{A_4A_2}$ 为**向量 $\boldsymbol{a}$ 减 $\boldsymbol{b}$ 的差**，记为

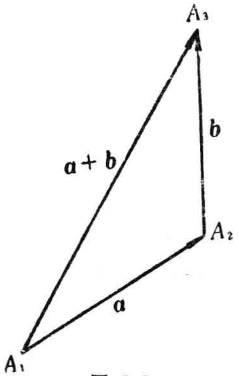


图 5.6

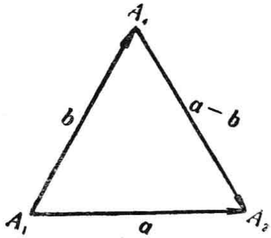


图 5.7

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{A_4A_2}.$$

已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的坐标，我们有 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$ 的坐标计算公式：

定理 5.4 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的坐标分别为

$$\boldsymbol{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\},\ \boldsymbol{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\},$$

则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3\},$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3\}.$$

证 记号同前，据定理 5.2 与定理 5.1 有

$$\begin{aligned}\mathrm{Prj}_x\ \overrightarrow{A_1A_3}&=\mathrm{Prj}_x\ \overrightarrow{A_1A_2}+\mathrm{Prj}_x\ \overrightarrow{A_2A_3}\\&=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{b}\\&=a_1+b_1,\end{aligned}$$

同理有

$$\mathrm{Prj}_y\overrightarrow{A_1A_3}=a_2+b_2,\ \mathrm{Prj}_z\ \overrightarrow{A_1A_3}=a_3+b_3,$$

再应用定理 5.1，即得

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{A_1A_3}=\{a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3\}.$$

设 $\overrightarrow{A_4A_2}=\{x,\ y,z\}$，由于

$$\boldsymbol{b}+\overrightarrow{A_4A_2}=\boldsymbol{a},$$

应用加法的上述计算公式得

$$\{b_1+x,\ b_2+y,\ b_3+z\}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\},$$

所以

$$b_1+x=a_1,\ b_2+y=a_2,\ b_3+z=a_3,$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{A_4A_2}=\{a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3\}. \qquad \square$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 与常数 λ 的**数乘**定义为一向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模为 $|\lambda|\ |\boldsymbol{a}|$；其方向为：当 $\lambda>0$ 时，它与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同；当 $\lambda<0$ 时，它与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反.

已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，我们有 $\lambda\boldsymbol{a}$ 坐标计算公式：

定理 5.5 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为

$$\boldsymbol{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\},$$

则

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \lambda a_3\}.$$

证 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，结论显然成立. 下面设 $\lambda\neq0$，且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$. 设 $\boldsymbol{a}$ 的方向角为 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$. 据定义知：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向角为 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向角为 $\pi-\alpha,\ \pi-\beta,\ \pi-\gamma$. 于是

$$\mathrm{Prj}_x\,\lambda\boldsymbol{a}=\begin{cases}|\lambda\boldsymbol{a}|\cos\alpha=\lambda|\boldsymbol{a}|\cos\alpha=\lambda a_1, & \text{当 } \lambda>0;\\ |\lambda\boldsymbol{a}|\cos(\pi-\alpha)=-\lambda|\boldsymbol{a}|(-\cos\alpha)=\lambda a_1, & \text{当 } \lambda<0.\end{cases}$$

同理可得：

$$\mathrm{Prj}_y\,\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_2,\quad \mathrm{Prj}_z\,\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_3,$$

据定理 5.1，即得

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \lambda a_3\}. \qquad \square$$

由向量数乘的定义与定理 5.5 可得：

定理 5.6 两非零向量平行的充要条件是它们的坐标成比例. 即

$$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_2}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3},$$

这里 $\boldsymbol{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$. 当向量 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 的某分量为零时，例如 $b_2=0$，我们规定 $a_2=0$，使得比例关系式有意义.

当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，运用向量的数乘，取 $\lambda=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}$，可得与向量 $\boldsymbol{a}$ 同

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.c