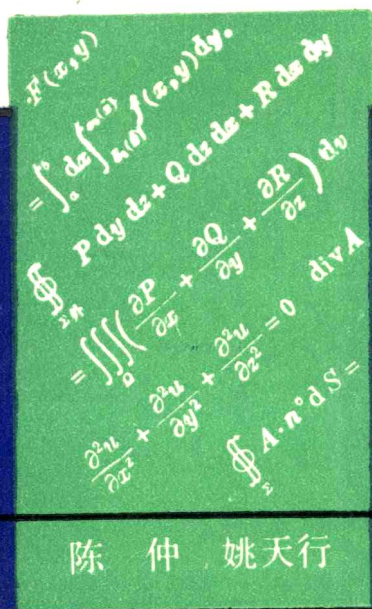


# 微积分学引论

下册



陈 仲 姚天行

南京大学出版社

# 微积分学引论

·下册·

陈 仲 姚天行



南京大学出版社

1991·南京

(苏)新登字第 011 号

## 内 容 简 介

本书根据国家教委 1989 年审定的“综合性大学本科物理类专业高等数学课程教学基本要求”与南京大学教学实际情况编写,全书共分上下两册,上册包括函数与极限、导数与微分、一元函数积分学、级数等;下册包括空间解析几何、偏微分学、重积分、线积分、面积分、场论、广义积分等内容。

本书基础厚实,文字通顺,许多内容的处理采用了与众不同的方法,使证明更加简捷、严密,有些定理的证明是作者自己得到的最新方法。例题和习题丰富,有利于提高读者的分析能力。书末附有习题答案与提示。

本书可供综合大学、理工科大学、师范院校作为教材,其中小号字可略去不讲,仍保持完整的系统性。

## 微 积 分 学 引 论

下 册

陈 仲 姚天行

\*

南京大学出版社出版

(南京大学校内)

江苏省新华书店发行 丹阳新华印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 13.5 字数 351 千

1991 年 12 月第 1 版 1991 年 12 月第 1 次印刷

印数 1--3000

\*

ISBN 7-305-01523-4/O·70

定价 4.40 元

# 目 录

## 第五章 空间解析几何

第一节 空间直角坐标系·向量	1
§ 5.1.1 空间直角坐标系	1
§ 5.1.2 向量的基本概念	3
§ 5.1.3 向量在轴上的射影	4
§ 5.1.4 向量的加法与数乘	6
习题 5.1	11
第二节 向量的内积外积与混合积	13
§ 5.2.1 向量的内积	13
§ 5.2.2 向量的外积	16
§ 5.2.3 向量的混合积	21
习题 5.2	23
第三节 平面与直线	24
§ 5.3.1 平面的方程	24
§ 5.3.2 直线的方程	29
§ 5.3.3 直线与平面的关系	35
§ 5.3.4 平面束	37
习题 5.3	39
第四节 空间曲面	41
§ 5.4.1 球面	41
§ 5.4.2 柱面	42
§ 5.4.3 锥面	44
§ 5.4.4 旋转曲面	46
§ 5.4.5 坐标变换	49
§ 5.4.6 二次曲面的标准方程	52
习题 5.4	55

第五节 空间曲线 .....	57
§ 5.5.1 曲线的一般式方程 .....	57
§ 5.5.2 曲线的参数方程 .....	57
§ 5.5.3 空间曲线在坐标平面上的投影 .....	58
习题 5.5 .....	60

## 第六章 偏 微 分 学

第一节 多元函数·极限·连续性 .....	61
§ 6.1.1 欧几里得空间·点集基本知识 .....	61
§ 6.1.2 多元函数概念 .....	64
§ 6.1.3 二元函数极限 .....	68
§ 6.1.4 累次极限 .....	72
§ 6.1.5 二元函数连续性 .....	73
§ 6.1.6 连续函数的性质·一致连续性 .....	75
习题 6.1 .....	77
第二节 偏导数·全微分 .....	79
§ 6.2.1 偏导数 .....	79
§ 6.2.2 全微分 .....	81
习题 6.2 .....	85
第三节 复合函数与隐函数的微分法 .....	87
§ 6.3.1 复合函数微分法 .....	87
§ 6.3.2 隐函数微分法 .....	92
习题 6.3 .....	97
第四节 高阶偏导数·高阶微分 .....	99
§ 6.4.1 高阶偏导数 .....	99
§ 6.4.2 高阶微分 .....	103
§ 6.4.3 泰勒公式 .....	105
习题 6.4 .....	107
第五节 偏导数在几何上的应用 .....	109
§ 6.5.1 空间曲线的切线与法平面 .....	109
§ 6.5.2 空间曲面的切平面与法线 .....	112
§ 6.5.3 *包络 .....	117

习题 6.5 .....	121
<b>第六节 极值·条件极值</b> .....	<b>122</b>
§ 6.6.1 极值的定义与必要条件.....	122
§ 6.6.2 极值存在的充分条件.....	123
§ 6.6.3 最大值·最小值.....	128
§ 6.6.4 条件极值(拉格朗日乘数法).....	131
习题 6.6 .....	137
<b>第七节 方向导数</b> .....	<b>138</b>
习题 6.7 .....	141

## 第七章 重 积 分

<b>第一节 二重积分</b> .....	<b>142</b>
§ 7.1.1 二重积分定义.....	142
§ 7.1.2 二重积分的性质.....	144
§ 7.1.3 二重积分的计算(累次积分法).....	146
习题 7.1(1).....	153
§ 7.1.4 二重积分换元公式.....	155
§ 7.1.5 二重积分的计算(换元积分法).....	158
习题 7.1(2) .....	168
<b>第二节 三重积分</b> .....	<b>170</b>
§ 7.2.1 三重积分的定义与性质.....	170
§ 7.2.2 三重积分的计算(累次积分法).....	172
习题 7.2(1).....	181
§ 7.2.3 三重积分换元公式.....	183
§ 7.2.4 三重积分的计算(换元积分法).....	184
习题 7.2(2) .....	193
<b>第三节 *重积分的近似计算</b> .....	<b>194</b>
§ 7.3.1 推广的梯形公式.....	194
§ 7.3.2 推广的辛卜生公式.....	197
§ 7.3.3 近似函数法.....	201
习题 7.3 .....	202
<b>第四节 重积分的应用</b> .....	<b>203</b>

§ 7.4.1 立体的体积	203
§ 7.4.2 曲面的面积	206
§ 7.4.3 引力	211
§ 7.4.4 质心	213
§ 7.4.5 转动惯量	218
习题 7.4	220

## 第八章 曲线积分·曲面积分

第一节 曲线积分	222
§ 8.1.1 空间曲线的弧长	222
§ 8.1.2 第一型曲线积分	227
§ 8.1.3 第二型曲线积分	233
习题 8.1	242
第二节 曲面积分	244
§ 8.2.1 第一型曲面积分	244
§ 8.2.2 双侧曲面	251
§ 8.2.3 第二型曲面积分	255
习题 8.2	264
第三节 线积分、面积分、体积分间的联系	265
§ 8.3.1 格林定理	266
§ 8.3.2 斯托克斯定理	275
§ 8.3.3 高斯定理	281
§ 8.3.4 *多元微积分基本定理	287
习题 8.3	293
第四节 *曲线积分、曲面积分应用举例	296
习题 8.4	300

## 第九章 场 论

第一节 基本概念	302
§ 9.1.1 向量函数的导数与积分	302
§ 9.1.2 向量场·数量场	307
§ 9.1.3 哈密顿算子 $\nabla$	303

习题 9.1 .....	311
<b>第二节 直角坐标下的梯度散度与旋度</b> .....	<b>312</b>
§ 9.2.1 梯度 .....	312
§ 9.2.2 散度 .....	315
§ 9.2.3 旋度 .....	319
§ 9.2.4 无源场·无旋场 .....	324
§ 9.2.5 *场论在物理上的应用 .....	330
习题 9.2 .....	332
<b>第三节 正交曲线坐标下的梯度散度与旋度</b> .....	<b>334</b>
§ 9.3.1 正交曲线坐标 .....	334
§ 9.3.2 弧长元素·曲面元素·体积元素 .....	337
§ 9.3.3 正交曲线坐标下的三度表达式 .....	339
习题 9.3 .....	347

## 第十章 广义积分学

<b>第一节 广义积分</b> .....	<b>348</b>
§ 10.1.1 两类广义积分的定义 .....	348
§ 10.1.2 基本性质 .....	351
§ 10.1.3 基本公式 .....	352
习题 10.1(1) .....	355
§ 10.1.4 敛散性判别法 .....	356
习题 10.1(2) .....	365
<b>第二节 广义重积分简介</b> .....	<b>366</b>
§ 10.2.1 两类广义二重积分的定义 .....	366
§ 10.2.2 敛散性判别法 .....	367
习题 10.2 .....	369
<b>第三节 含参变量积分</b> .....	<b>369</b>
§ 10.3.1 含参变量定积分 .....	369
§ 10.3.2 含参变量广义积分·一致收敛性 .....	375
习题 10.3 .....	382
<b>第四节 欧拉积分</b> .....	<b>383</b>
§ 10.4.1 $\Gamma$ 函数的定义 .....	383



§ 10.4.2 $\Gamma$ 函数的性质 .....	384
§ 10.4.3 B 函数的定义 .....	386
§ 10.4.4 B 函数的性质 .....	388
§ 10.4.5 斯特林公式 .....	390
习题 10.4 .....	391
<b>附录 向量公式</b> .....	<b>393</b>
<b>习题答案与提示</b> .....	<b>394</b>
<b>索引</b> .....	<b>418</b>
<b>参考文献</b> .....	<b>423</b>

---

章目前标有 \* 的是教学参考材料, 供学生课外选学。

## 第五章 空间解析几何

空间解析几何与平面解析几何一样，都是运用代数的方法研究几何图形。建立平面直角坐标系，可将平面上的点与两个有序的实数  $(a, b)$  一一对应，从而把平面几何图形与方程式联系起来。为了研究空间几何图形，这一章首先建立空间直角坐标系，介绍向量的基本知识，然后以向量为工具研究空间的平面与直线，以及空间曲面与空间曲线。

### 第一节 空间直角坐标系·向量

#### § 5.1.1 空间直角坐标系

过一定点  $O$ ，作三条相互垂直的数轴，分别记为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴，它们都以  $O$  点为原点，单位长度相同，且  $x, y, z$  轴的正向组成右手系（即从  $x$  轴正向沿右手握拳方向旋转到  $y$  轴正向时，

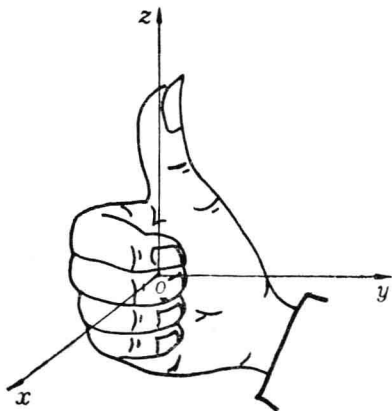


图 5.1

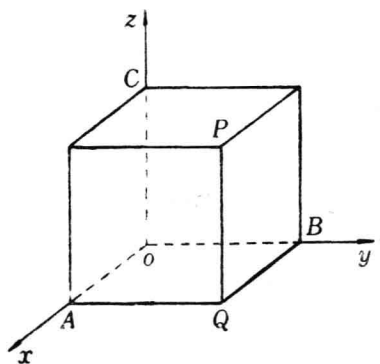


图 5.2

姆指的指向为  $z$  轴正向 (图 5.1)), 这就是空间直角坐标系, 记为  $O-xyz$ . 点  $O$  称为坐标原点;  $x, y, z$  轴称为坐标轴; 每两条坐标轴所决定的平面称为坐标平面. 坐标平面有三个, 分别记为  $xy$  平面,  $yz$  平面,  $zx$  平面.

给定空间任一点  $P$ , 过  $P$  作三个平面分别垂直于  $x, y, z$  轴, 三个平面与轴的交点分别记为  $A, B, C$  (图 5.2), 若  $A, B, C$  在三条坐标轴上的坐标分别为  $a, b, c$ , 则定义点  $P$  的坐标为  $(a, b, c)$ . 反过来, 给定三个有序的实数  $a, b, c$ , 在空间直角坐标系中, 可唯一决定一个点  $P$ , 使该点的坐标为  $(a, b, c)$ . 因此, 空间任一点与其坐标一一对应, 记为  $P(a, b, c)$ , 其中  $a, b, c$  三数称为坐标分量 (依次为  $x$  分量,  $y$  分量,  $z$  分量). 图 5.2 中点  $A, B, C$  的坐标为

$$A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c).$$

坐标原点  $O$  的坐标为  $O(0, 0, 0)$ .

在空间直角坐标系中, 三个坐标平面将整个空间分为 8 个部分, 每一部分按其坐标分量的符号, 分别称为第 1—第 8 卦限:

$x$ 分量的符号	+	-	-	+	+	-	-	+
$y$ 分量的符号	+	+	-	-	+	+	-	-
$z$ 分量的符号	+	+	+	+	-	-	-	-
卦 限	1	2	3	4	5	6	7	8

**例** 求点  $P(a, b, c)$  到原点  $O$  的距离.

**解** 如图 5.2 所示. 据勾股定理, 点  $P$  到原点  $O$  的距离为

$$\begin{aligned} |OP| &= \sqrt{|OQ|^2 + |QP|^2} \\ &= \sqrt{|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

### § 5.1.2 向量的基本概念

在物理学中，常常遇到既有数值大小，又有方向的量，如力、加速度、磁场强度等。我们把既有数值大小，又有方向的量称为**向量**(或**矢量**)。选定单位长度，向量可用空间的有向线段 $\overrightarrow{PQ}$ (或简记为 $\mathbf{a}$ )表示，这里 $P, Q$ 分别是该线段的起点和终点，线段 $PQ$ 的长度 $|PQ|$ 表示向量 $\mathbf{a}$ 的数值，称为**向量的模**，记为 $|\mathbf{a}|$ ；从 $P$ 到 $Q$ 的指向表示向量 $\mathbf{a}$ 的方向。模等于0的向量称为**零向量**，记为 $\mathbf{0}$ 。零向量是一个特殊的向量，它的方向可以是任意的方向。模等于1的向量称为**单位向量**。

已知向量 $\overrightarrow{P_1Q_1}$ 与 $\overrightarrow{P_2Q_2}$ ，将 $\overrightarrow{P_2Q_2}$ 平行移动，使其起点 $P_2$ 与 $P_1$ 重合，若终点 $Q_2$ 落在射线 $P_1Q_1$ 上，则称向量 $\overrightarrow{P_1Q_1}$ 与 $\overrightarrow{P_2Q_2}$ **方向相同**；若终点 $Q_2$ 落在射线 $P_1Q_1$ 的反向延长线上，则称向量 $\overrightarrow{P_1Q_1}$ 与 $\overrightarrow{P_2Q_2}$ **方向相反**。当向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 方向相同或方向相反时，称向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ **平行**(或**共线**)，记为 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 。

两个方向相同且模相等的向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 称为是**相等的**，记为 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 。

取一空间直角坐标系，单位长度同上所取，将向量 $\mathbf{a}$ 平行移动，使其起点与坐标原点重合，设其终点坐标为 $(a, b, c)$ ，则定义**向量 $\mathbf{a}$ 的坐标**为 $\{a, b, c\}$ ，记为

$$\mathbf{a} = \{a, b, c\}.$$

此式称为向量 $\mathbf{a}$ 的坐标表示式。此时向量 $\mathbf{a}$ 的模为

$$|\mathbf{a}| = |OP| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

它的方向由

$$\cos \alpha = \frac{a}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{b}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{|\mathbf{a}|}$$

决定，这里 $\alpha, \beta, \gamma (0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi)$ 分别是向量 $\mathbf{a}$ 与 $x$ 轴， $y$ 轴， $z$ 轴的夹角(图5.3)，称为向量 $\mathbf{a}$ 的**方向角**， $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 的**方向余弦**。由于

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

所以向量

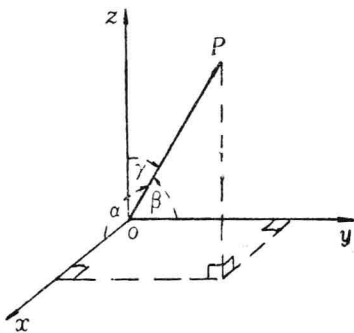


图 5.3

$$\mathbf{a}^{\circ} \stackrel{\text{def}}{=} \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$$

是与向量  $\mathbf{a}$  同方向的单位向量.

沿三条坐标轴方向的单位向量称为**基向量**, 分别记为  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , 显见有

$$\mathbf{i} = \{1, 0, 0\}, \quad \mathbf{j} = \{0, 1, 0\}, \quad \mathbf{k} = \{0, 0, 1\}.$$

**例** 已知向量  $\mathbf{a}$  与三条坐标轴的夹角相等, 求  $\mathbf{a}$  的方向余弦.

**解** 由于  $\alpha = \beta = \gamma$ ,

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 3 \cos^2 \alpha = 1,$$

所以

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \pm \frac{\sqrt{3}}{3},$$

向量  $\mathbf{a}$  的方向余弦为

$$\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{或} \quad -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

### § 5.1.3 向量在轴上的射影

已知向量  $\mathbf{a}$  与一数轴  $u$ , 将向量  $\mathbf{a}$  平移, 使其起点位于  $u$  轴上任一点  $M$  处, 其终点记为  $N$ ,  $\overrightarrow{MN}$  与  $u$  轴正向的夹角  $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$

称为向量  $\mathbf{a}$  与  $u$  轴的夹角, 并称  $|\mathbf{a}| \cos \theta$  为向量  $\mathbf{a}$  在  $u$  轴上的射影, 记为

$$\text{Prj}_u \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \theta.$$

自点  $P$  向  $u$  轴作垂线, 垂足为  $P_1$ , 我们称点  $P_1$  为点  $P$  在  $u$  轴上的投影. 记向量  $\mathbf{a}$  的起点  $P$  与终点  $Q$  在  $u$  轴上的投影分别为  $P_1, Q_1$ , 作向量  $\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{PQ}$  (图 5.4), 设  $\overrightarrow{P_1Q_1}$  与  $u$  轴正向的夹角为  $\theta$ , 则显见有

$$\begin{aligned} \text{Prj}_u \mathbf{a} &= |\mathbf{a}| \cos \theta \\ &= |\overrightarrow{P_1Q_1}| \cos \theta \\ &= \varepsilon |P_1Q_1|, \end{aligned}$$

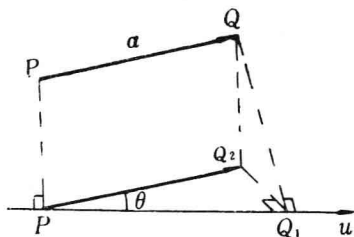


图 5.4

这里

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{当 } \overrightarrow{P_1Q_1} \text{ 与 } u \text{ 轴方向相同时;} \\ -1, & \text{当 } \overrightarrow{P_1Q_1} \text{ 与 } u \text{ 轴方向相反时.} \end{cases}$$

**定理 5.1** 向量  $\mathbf{a}$  的坐标为  $\{a, b, c\}$  的充要条件是: 向量  $\mathbf{a}$  在  $x, y, z$  轴上的射影分别为  $a, b, c$ .

**证** 不妨设  $\mathbf{a}$  为非零向量, 则向量  $\mathbf{a}$  的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{a}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{b}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{|\mathbf{a}|},$$

$\Leftrightarrow$

$$\text{Prj}_x \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \alpha = a,$$

$$\text{Prj}_y \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \beta = b,$$

$$\text{Prj}_z \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \gamma = c. \quad \square$$

对于两个首尾相连的向量  $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}$ , 我们有

**定理 5.2 (射影定理)**

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{A_1A_3} = \text{Prj}_u \overrightarrow{A_1A_2} + \text{Prj}_u \overrightarrow{A_2A_3}.$$

**证** 设点  $A_1, A_2, A_3$  在  $u$  轴上的投影分别为  $B_1, B_2, B_3$ , 对于图 5.5 所示的情况, 有

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{A_1A_3} = |B_1B_3|,$$

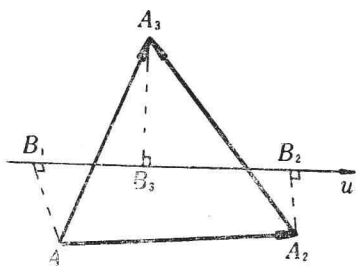


图 5.5

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{A_1 A_2} = |B_1 B_2|,$$

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{A_2 A_3} = -|B_2 B_3|,$$

由于

$$|B_1 B_3| = |B_1 B_2|$$

$$- |B_2 B_3|,$$

所以

$$\begin{aligned} \text{Prj}_u \overrightarrow{A_1 A_3} &= \text{Prj}_u \overrightarrow{A_1 A_2} \\ &\quad + \text{Prj}_u \overrightarrow{A_2 A_3}. \end{aligned}$$

其它情况的证明是类似的。□

此定理还可推广到多个首尾相连的向量：

### 定理 5.3

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{A_1 A_n} = \sum_{k=1}^{n-1} \text{Prj}_u \overrightarrow{A_k A_{k+1}}.$$

运用向量在轴上的射影概念，我们来引进向量  $\mathbf{a}$  在向量  $\mathbf{b}$  上的射影概念。作  $u$  轴与向量  $\mathbf{b}$  平行，且指向相同，向量  $\mathbf{a}$  在向量  $\mathbf{b}$  上的射影定义为：

$$\text{Prj}_b \mathbf{a} = \text{Prj}_u \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle,$$

这里  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  表示向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角，即向量  $\mathbf{a}$  与  $u$  轴的夹角。同样地，我们有

$$\text{Prj}_a \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

### § 5.1.4 向量的加法与数乘

已知向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ，将向量  $\mathbf{a}$  的起点记为  $A_1$ ，终点记为  $A_2$ ；将向量  $\mathbf{b}$  平移，使其起点为  $A_2$ ，终点记为  $A_3$  (图 5.6)，我们称向量  $\overrightarrow{A_1 A_3}$  为向量  $\mathbf{a}$  加  $\mathbf{b}$  的和，记为

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{A_1 A_3}.$$

向量的加法在力学中表示两力的合成，它服从三角形法则(或称平行四边形法则)。

若将向量  $\mathbf{b}$  的起点移至  $A_1$ ，终点记为  $A_4$  (图 5.7)，我们称向量  $\overrightarrow{A_4 A_2}$  为向量  $\mathbf{a}$  减  $\mathbf{b}$  的差，记为

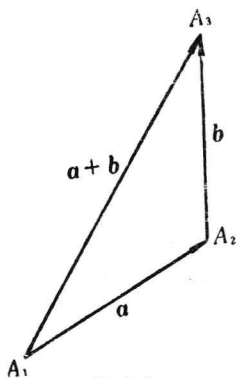


图 5.6

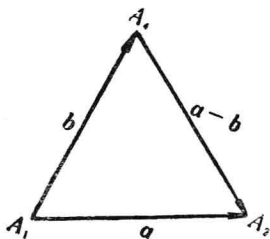


图 5.7

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \overrightarrow{A_4A_2}.$$

已知向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的坐标, 我们有  $\mathbf{a} \pm \mathbf{b}$  的坐标计算公式:

**定理 5.4** 设向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的坐标分别为

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\},$$

则

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\},$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \{a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3\}.$$

**证** 记号同前, 据定理 5.2 与定理 5.1 有

$$\begin{aligned} \text{Prj}_x \overrightarrow{A_1A_3} &= \text{Prj}_x \overrightarrow{A_1A_2} + \text{Prj}_x \overrightarrow{A_2A_3} \\ &= \text{Prj}_x \mathbf{a} + \text{Prj}_x \mathbf{b} \\ &= a_1 + b_1, \end{aligned}$$

同理有

$$\text{Prj}_y \overrightarrow{A_1A_3} = a_2 + b_2, \text{Prj}_z \overrightarrow{A_1A_3} = a_3 + b_3,$$

再应用定理 5.1, 即得

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{A_1A_3} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\}.$$

设  $\overrightarrow{A_4A_2} = \{x, y, z\}$ , 由于

$$\mathbf{b} + \overrightarrow{A_4A_2} = \mathbf{a},$$

应用加法的上述计算公式得

$$\{b_1 + x, b_2 + y, b_3 + z\} = \{a_1, a_2, a_3\},$$



所以

$$\begin{aligned} b_1 + x &= a_1, \quad b_2 + y = a_2, \quad b_3 + z = a_3, \\ \mathbf{a} - \mathbf{b} &= \overrightarrow{A_4A_2} = \{a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3\}. \end{aligned} \quad \square$$

向量  $\mathbf{a}$  与常数  $\lambda$  的数乘定义为一向量, 记为  $\lambda\mathbf{a}$ , 它的模为  $|\lambda| |\mathbf{a}|$ ; 其方向为: 当  $\lambda > 0$  时, 它与  $\mathbf{a}$  方向相同; 当  $\lambda < 0$  时, 它与  $\mathbf{a}$  方向相反.

已知向量  $\mathbf{a}$  的坐标, 我们有  $\lambda\mathbf{a}$  坐标计算公式:

**定理 5.5** 设向量  $\mathbf{a}$  的坐标为

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\},$$

则

$$\lambda\mathbf{a} = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}.$$

**证**  $\lambda = 0$  或  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  时, 结论显然成立. 下面设  $\lambda \neq 0$ , 且  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ . 设  $\mathbf{a}$  的方向角为  $\alpha, \beta, \gamma$ . 据定义知: 当  $\lambda > 0$  时,  $\lambda\mathbf{a}$  的方向角为  $\alpha, \beta, \gamma$ ; 当  $\lambda < 0$  时,  $\lambda\mathbf{a}$  的方向角为  $\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma$ . 于是

$$\text{Prj}_x \lambda\mathbf{a} = \begin{cases} |\lambda\mathbf{a}| \cos \alpha = \lambda |\mathbf{a}| \cos \alpha = \lambda a_1, & \text{当 } \lambda > 0; \\ |\lambda\mathbf{a}| \cos (\pi - \alpha) = -\lambda |\mathbf{a}| (-\cos \alpha) = \lambda a_1, & \text{当 } \lambda < 0. \end{cases}$$

同理可得:

$$\text{Prj}_y \lambda\mathbf{a} = \lambda a_2, \quad \text{Prj}_z \lambda\mathbf{a} = \lambda a_3,$$

据定理 5.1, 即得

$$\lambda\mathbf{a} = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}. \quad \square$$

由向量数乘的定义与定理 5.5 可得:

**定理 5.6** 两非零向量平行的充要条件是它们的坐标成比例. 即

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3},$$

这里  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ . 当向量  $\mathbf{a}$  或  $\mathbf{b}$  的某分量为零时, 例如  $b_2 = 0$ , 我们规定  $a_2 = 0$ , 使得比例关系式有意义.

当  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  时, 运用向量的数乘, 取  $\lambda = \frac{1}{|\mathbf{a}|}$ , 可得与向量  $\mathbf{a}$  同