■ 大学公共课系列教材

概率论与数理统计二十讲

GAILÜLUN
YU SHULI TONGJI ERSHI JIANG

任谨慎　敬　斌　冯有前◎主　编

DAXUE GONGGONGKE XILIE JIAOCAI

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

■ 大学公共课系列教材

与你同行

概率论与数理统计二十讲

GAILÜLUN
YU SHULI TONGJI ERSHI JIANG

主　编◎任谨慎　敬　斌　冯有前
编　委◎王建民　井爱雯　刘苍毅
刘　红　李益群　郭艳鹂
袁修久　刘卫东

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计二十讲/任谨慎等主编．—北京：北京师范大学出版社，2012.1
（大学公共课系列教材）
ISBN 978-7-303-13470-0

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①任…　Ⅲ.①概率论－高等学校－教材　②数理统计－高等学校－教材　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 200537 号

营销中心电话　010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网　http://gaojiao.bnup.com.cn
电子信箱　beishida168@126.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　刷：北京东方圣雅印刷有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：170mm×230 mm
印　张：19.5
字　数：350 千字
版　次：2012 年 1 月第 1 版
印　次：2012 年 1 月第 1 次印刷
定　价：32.00 元

策划编辑：范　林　胡　宇　　责任编辑：岳昌庆　胡　宇
美术编辑：毛　佳　　装帧设计：毛　佳
责任校对：李　菡　　责任印制：李　啸

序

当今，世界科技迅猛发展，数学已渗透到各个领域，数学系列课程教学的重要地位越来越为人们所重视．但是，随着教学规模的扩大，传统大班教学模式所带来的矛盾日益彰显．其一，教师的课堂设计和教学只针对大多数学生，而对15%基础较差的学生和10%左右综合素质较高的学生照顾不周；其二，一个大的教学班通常有超过100名学生，一名教师往往要同时带两个或两个以上教学班，传统的个别辅导模式难以满足现实需要．由我们主编的《概率论与数理统计二十讲》是缓和以上两个矛盾的产物，是浙江大学《概率论与数理统计(第四版)》的配套辅导书，也是课堂教学的继续和补充，是学生课后自习的好帮手．

本辅导书着重在教学大纲的范围内，对基本思想、基本概念、基本运算和基本方法进行耐心而细致地论述，使绝大多数学生在阅读这本辅导书中获益．同时在深度和广度上又具有突破教学大纲的特性，结合一些具有难度的例题和一些重要的应用方向，着重培养学生发现问题、分析问题和运用所学知识解决问题的能力．

本辅导书不是教案的简单堆砌，不是单纯的答疑，不是课后作业的精讲，更不是一本习题集．它是以概率论与数理统计的基本概念和基本方法为素材，以课堂内容总结、重点难点概念辨析、经典例题分析等为具体表现形式，以帮助学生准确把握基本概念的实质、熟练掌握基本方法为基本要求，以唤醒学生求知的欲望、激发学生探究问题的热情、开发学生能力为目的的有机整体．

本辅导书的特点：

1."与你同行"是编写本辅导书的基本理念. 做学生学习过程中的陪伴者，要求编者尝试与初学者换位思考，回忆当初编者的学习经历，找到与读者交流的切入点.

2. 以2学时教学内容为基本单元，与实际教学同步.

3. 各章节自成系统：

(1)章节内容综述. 不是对课本的复制，而是对基本教学内容的再加工过程. 用独到的眼光和思维模式，将所涉及的基本元素构成一个有机整体.

(2)核心概念辨析. 针对容易产生误解或难以理解的基本概念，引用简单例子，说明其用途和产生的背景，以数学研究者的眼光来审视它的本质属性. 设置一些在学生中常见的疑问，采用归谬、反例、正面论述等方法，指出产生模糊认识的根源所在.

(3)经典例题精讲. 通过对典型例题的详细解剖，加深学生对基本概念和基本方法的理解.

(4)课后习题与思考. 通过精心设计、逐步深入的一组习题，以及对该问题的分析、解题方案的探索，激发学生学习和探究问题的热情，培养其分析问题和解决问题的能力.

纵观本辅导书，目标定位明确，体系结构有所创新，编者以其多年丰富的教学经验，对国内外教材进行了悉心研究，分析了高素质人才所需数学知识的特点，编成了这本辅导书，一定能为培养21世纪高素质人才的数学素养起到积极的推动作用.

空军工程大学理学院
冯有前
2009年11月

前 言

随着高等教育事业的发展，大学的规模、办学理念和教学方式也发生了巨大的变化，以小班教学为主的精英教育逐渐让位于以大班教学为主的大众教育，这就对传统的课后辅导、个别答疑等教学方式提出了挑战. 为了应对这种挑战，我们编写了这本辅导教材.

“概率论与数理统计”是大学的主干课程之一，具有理论性强和应用广泛的特点，学习中一定会遇到很多使你感兴趣的问题.《概率论与数理统计二十讲》力求做你的朋友和伙伴，在学习的旅程中与你风雨同舟，一起来分享沿途风景给我们带来的快乐.

本辅导书按照课程进度依次划分为古典概型、随机变量、数字特征及极限定理和数理统计四个单元，共二十讲，分别由王建民副教授、刘苍毅副教授、刘红副教授、井爱雯副教授和李益群讲师主笔. 每一讲划分为核心内容综述、核心概念辨析、典型例题和课后习题与思考四个栏目，力求用简单直观的引例为先导，强化对基本概念的感性认知程度，由浅入深，逐步把我们带入充满魅力的数学殿堂.

本辅导书的编写工作是在应用数学物理系主任冯有前教授和计算数学教研室主任袁修久教授的精心组织下进行的，朱林户教授和李安平教授审阅了全部的书稿，提出了很多宝贵的修改意见，郭艳鹂讲师负责了全书的校对和部分文字输入工作，教研室的同事们也对本书的编写工作鼎力相助，在这里对他们表示深深的谢意.

辅导书中的习题主要来源于众多知名教科书，如王梓坤先生的《概率论基础及其应用》、南开大学周概荣教授编写的

《概率论与数理统计考试大纲》等，在这里对前辈们也表示崇高的敬意.

受编者的学识水平及能力所限，本辅导书可能会有这样或那样的问题，我们真诚地希望你能提出修改意见.

编　者

2009年11月于西安

目　录

第一讲　概率论的基本概念

作为“概率论与数理统计”的首次课，尽管不同的讲授者有不同的风格，但大多是围绕这样几个问题展开的：概率论所研究的对象是什么？概率论在现代科学技术中的作用和地位如何？什么是随机试验？什么是随机事件？如何用集合来表示随机事件？随机事件之间如何运算？其中核心概念是“随机事件”，以及“随机事件”与“基本事件”之间的关系；本次课的难点在于针对具体的随机试验如何确定其“样本空间”，以及如何用恰当的集合、集合运算来表示具体的随机事件.

一、概率论的起源及发展

我们知道，自然界有许多现象，在一定条件下我们完全可以预测它们是否出现. 例如，把带同性电荷的离子放在一起，它们之间必然相互排斥. 又如，在标准大气压下，水加热到 100 ℃后必然沸腾等. 这种在一定条件下必然发生的现象称为必然现象. 与必然现象相对立的现象是不可能现象. 例如，带相同电荷的离子相互吸引、在标准大气压下水加热到 100 ℃而并不沸腾等，都是不可能现象.

除了必然现象和不可能现象，还有一类现象，这就是随机现象. 其显著的特点是，在一定条件下，它可能出现、也可能不出现，事先无法预料. 例如，掷硬币游戏中的正面朝上、玩骰子中的掷出 6 点、买彩票中奖等，都属于随机现象.

概率论是以随机现象为研究对象的一门数学学科，其目的是要透过随机现象之外表，揭露其内在的必然规律. 正如恩格斯所说：“在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的、隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律.”

概率论起源于 16 世纪对赌博游戏的研究，其代表人物是物理学家、数学家、医生卡尔达诺(Girolamo Cardano，1501—1576)，他的著作《论对策概率》吹响了概率论研究的序曲. 随后，拉普拉斯(Pierre-Simon De Laplace，1749—1827)总结了概率论二百年研究成果，他的著作《概率的解析理论》成为概率论发展的一个重要里程碑. 历史上概率论被作为实验科学、逻辑学、数学三种形式而进行研究的. 而作为严密的数学分支，概率论的研究历史却不到百年. 一

般观点认为是以柯尔莫哥洛夫(A. N. Kolmogorov, 1903—1987)在20世纪30年代用集合论和测度论的术语构造概率的公理系统为标志，为概率的数学研究提供了最合适的框架. 在公理化基础上，现代概率论取得了一系列理论突破.

公理化概率论首先使随机过程的研究获得了新的起点. 随机过程作为随时间变化的偶然量的数学模型，是现代概率论研究的重要主题. 一类普遍的随机过程叫做马尔可夫过程，这是一种无后效性随机过程，即在已知当前状态的情况下，过程的未来状态与其过去状态无关. 原始形式的马尔可夫过程——马尔可夫链——因最早由马尔可夫提出(1907)而得名. 1931年，柯尔莫哥洛夫用分析的方法奠定了马尔可夫过程的理论基础. 柯尔莫哥洛夫之后，在随机过程研究中作出重大贡献而影响了整个现代概率论的重要代表人物有列维(1886—1971)、辛钦(1894—1959)、杜布(J. L. Doob)和伊藤清等. 与此同时，赖欣巴赫(Hans Reichenbach, 1891—1953)也完成了概率的公理系统，其目的是解答哲学上的归纳问题.

与任何一门公理化的数学分支一样，概率论公理化一旦完成，就允许各种具体的解释. 概率论的公理化是将概率概念从频率解释抽象出来，同时，又总可以从形式系统再回到现实世界. 概率论的应用范围被大大拓宽了. 今天，概率统计理论与方法的应用几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门中. 例如：

气象、水文、地震预报、人口控制及预测都与概率论紧密相关；

产品的抽样验收、新研制的药品能否在临床中应用，均需要用到假设检验；

寻求最佳生产方案要进行实验设计和数据处理；

电子系统的设计，火箭卫星的研制与发射都离不开可靠性估计；

探讨太阳黑子的变化规律时，时间序列分析方法非常有用；

研究化学反应的时变率，要以马尔可夫过程来描述；

在生物学中研究群体的增长问题时，提出了生灭型随机模型；

传染病流行问题要用到多变量非线性生灭过程；

许多服务系统，如电话通信、船舶装卸、机器维修、病人候诊、存货控制、水库调度、购物排队、红绿灯转换等，都可用一类概率模型来描述，其涉及的知识就是排队论.

概率统计理论进入其他自然科学领域的趋势还在不断发展. 在社会科学领域，特别是经济学中研究最优决策和经济的稳定增长等问题，都大量采用概率统计方法. 这只是数学的应用突破了传统的范围而向人类几乎所有的知识领域渗透的一个有力佐证.

拉普拉斯曾说："生活中最重要的问题，其中绝大多数在实质上只是概率的问题.""起源于靠碰运气取胜的游戏的科学，竟然成了人类知识最重要的一部分."

作为应用数学分支的数理统计，与其他应用数学的分支一样，几乎所有的数学理论都可能被利用，例如集合论、函数论、拓扑学、矩阵代数、组合数学等；反之，在应用的过程中，它也促进数学理论的进一步发展和完善. 一般认为：概率论是数理统计学的基础，数理统计学是概率论的一种应用. 但是它们是两个并列的数学分支学科，并无从属关系. 正如德国数学家希尔伯特所说："数学理论越是向前发展，它的结构就变得越来越调和一致，并且这门科学与一向相互隔绝的分支之间也显露出原先意想不到的关系. 因此随着数学的发展，其有机的特性不会丧失，只会更清楚地呈现出来."

二、随机事件及其运算

1. 随机试验

要揭示偶然性所蕴涵的必然规律，就需要对随机现象进行大量的观察，即进行大量的随机试验. 所谓随机试验就是对某随机现象的特征进行观察的过程，具有如下典型的实验科学的特征.

(1)可重复性. 这是指试验的客观性，在相同条件下不因试验的时间、地点和参与试验的人员的不同，而改变事物所具有的客观规律.

(2)不唯一性. 这是指试验的可能结果多于一个，但试验的所有可能的结果是确定的.

(3)随机性. 这是指进行一次试验前不能确定将会出现哪一个结果，而需要我们根据情况来作出判断. 这正是博弈游戏的魅力所在. 出现的结果有一定的规律性，这个规律就是我们所称的统计规律.

2. 样本空间 S 和样本点 ω

我们之前学习的数学，严格地说只是数学中的数学运算部分. 正如罗素所说："一定是经过了许多年，人类终于明白两只野鸭和两只天鹅都是数字 2 的抽象." 数学是研究数字和图形关系的科学，也是解决问题的科学. 问题并不总是以数字形式出现在我们面前. 把一个实际问题抽象为一个数学问题，是一项非常困难也是非常具有创造性的工作. 不是所有问题都像初等数学列方程解应用

题那样容易.

一般我们用 E 表示一个随机试验，用 ω 表示该试验可能出现的一个结果，称 ω 为随机试验 E 的一个基本事件(或样本点). 把 E 的所有基本事件收集起来构成一个集合 S，称为随机试验 E 的基本事件空间或样本空间.

例如，用 E_1 表示随机试验“掷一次硬币观察正面是否朝上”. 用数字“1”表示试验结果是“正面朝上”，用“0”表示结果是“正面朝下”. 那么该随机试验共有两个基本事件“0”和“1”，基本事件空间 $S=\{0, 1\}$.

若随机试验是某妇产科记录新生婴儿的性别，用数字“1”表示出生的是男婴，用数字“0”表示出生的是女婴，其基本事件空间同样可以表示为 $S=\{0, 1\}$.

又例如，用 E_2 表示随机试验“连续掷三次骰子，观察依次掷出的点数”. 用有序的数组(i, j, k)表示基本事件“第一次掷出 i 点，第二次掷出 j 点，最后一次掷出 k 点”. 则该随机试验的基本事件空间为 $S=\{(i, j, k) \mid i, j, k=1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，总共有 $6^3=216$ 个基本事件.

若 E_3：“投掷三粒相互不可分辨的骰子，观察所出现的点数”，那么该随机试验的基本事件有哪些呢？我们用集合$\{i, j, k\}$表示基本事件“三粒骰子的点数分别是 i, j, k”，则样本空间为 $S=\{\{i, j, k\} \mid i, j, k=1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，总共有$\dfrac{6^3}{3!}=36$ 个基本事件.

E_4：“记录某城市 120 急救电话一昼夜接到的呼救次数”，该随机试验的样本空间是怎样的呢？可能接到的呼救次数依次为 $0, 1, \cdots, n_{\max}$，样本空间就是 $\{0, 1, \cdots, n_{\max}\}$，其中 $n_{\max}$是一个客观存在的自然数. 它依赖于该城市的人口规模、年龄结构等情况，然而我们却不能准确地说出它究竟是多少. 就像体育竞赛中运动员的成绩，极限是客观存在的，然而没有人能知道究竟是多少. 为了数学处理的简便性，我们认为该随机试验的样本空间为非负整数集$\{0, 1, \cdots\}$.

E_5：“观察西安地区 3 月份的平均气温”，该随机事件的样本空间为$[T_{\min}, T_{\max}]$，其中 $T_{\min}$表示 3 月份西安地区历史上的最低气温，$T_{\max}$表示最高气温. 同理，我们也可以认为该随机试验的样本空间为$(-\infty, +\infty)$.

3. 随机事件的数学描述

(1)随机事件. 用样本空间 S 的非空真子集来表示随机事件，简称事件，用大写字母 A，B，C 或 A_i表示. 特别地，S 的单点集就表示基本事件.

例如，在随机试验 E_3 中，“所掷出的点数之和等于 5”就是一个随机事件，

它可以用集合$\{\{1,1,3\},\{1,2,2\}\}$来表示，而在随机试验E_2中，该随机事件则用集合$\{(1,1,3),(1,3,1),(3,1,1),(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1)\}$来表示.

(2)事件发生. 设A是一个随机事件，它作为样本空间S的一个非空子集，在随机试验中当该集合中的一个样本点出现时，则称事件A发生了. 例如，在随机试验E_3中，当且仅当基本事件$\{1,1,3\}$或$\{1,2,2\}$发生时，我们称随机事件“所掷出的点数之和等于5”发生了.

(3)必然事件. 必然事件是指在每次试验中总会发生的事件. 例如，从装有红、白两种颜色的球袋中任取一只球，所取出球的颜色要么是红色的，要么是白色的，二者必居其一，这是必然的事情. 通常我们用样本空间S来表示必然事件.

(4)不可能事件. 不可能事件是指在试验中绝对不会发生的事件. 例如，从装有红、白两种颜色的球袋中任取一只球，取出的球是黑色球或者取不出球都是不可能事件. 通常我们用空集$\varnothing$来表示不可能事件.

事实上,我们已经建立了事件与集合的对应. 将问题用集合语言描述当然是对问题的抽象，下表是二者的对应关系：

表 1-1

实际问题	概率论	数学符号	集合论
必然事件	样本空间	S	全集
基本事件	样本点	e_i或ω_i	点(元素)
(随机)事件	(可测)子集	A, B, C或A_i	S的子集
不可能事件	空集	$\varnothing$	空集

我们在学习数学过程中都曾或多或少有过“慢慢演变”或潜意识消化的经验. 初次学习某种新知识时，各种细节似乎过于浩繁而毫无希望地混淆在一起，不能在头脑里留下一个连贯的整体印象. 然而，过一段时间再回头看时，就会发现一切都处在适当的位置上. 对于今后的学习而言，其实记住上表就足够了.

4. 随机事件的运算

为了讲解方便，我们把随机事件、必然事件和不可能事件统称为事件，并把它们看成是样本空间S的子集，借助集合还可以表示事件之间的关系与运算.

(1)若 $A\subset B$，则称事件 A 是 B 的子事件，即事件 A 发生必然导致 B 发生. 从图 1-1 中可以明显地看到，包含关系是部分和整体的关系，特别地，对于任意事件 A，恒有 $\varnothing\subset A\subset S$. 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 和 B 是同一个事件，记为 $A=B$.

(2)用 $A\cup B=\{x\in S\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 表示事件 A 与事件 B 的和事件. 和事件发生当且仅当 A，B 中至少有一个发生. 在具体问题中，和事件发生以三种状态呈现：①A 发生 B 不发生；②B 发生 A 不发生；③A，B 都发生. 如图 1-2所示.

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的和事件，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 A_1，A_2，…的和事件. 当且仅当在事件 A_1，A_2，…中至少有一个事件发生，我们才称事件 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 发生了.

(3)用 $A\cap B=\{x\in S\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 表示事件 A 与 B 的积事件. 当且仅当 A，B 同时发生时，积事件 $A\cap B$ 发生. 为了简便，通常把 $A\cap B$ 记为 AB. 这里“同时”的意义不是严格时间的同时，而是都发生的意思. 如图 1-3 所示.

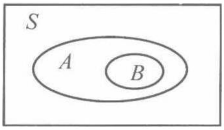

图 1-1

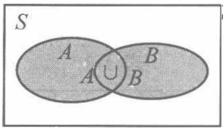

图 1-2

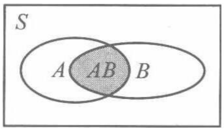

图 1-3

类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的积事件，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 A_1，A_2，…的积事件.

(4)用 $A\backslash B=\{x\in S\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 表示 A 事件与 B 事件的差. $A\backslash B$ 发生当且仅当事件 A 发生而 B 事件不发生. 如图 1-4 所示.

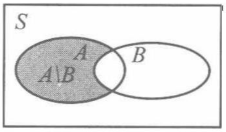

图 1-4

(5)事件的互斥(或互不相容)

这里指的是事件 A 和事件 B 不能同时发生，其数学定义是 $A\cap B=\varnothing$. 特别地，基本事件是两两互斥(或互不相容)的. 如图 1-5 所示.

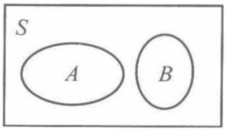

图 1-5

若 $S=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$，且 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥，称 A_1，A_2，…，A_n 为一个完备事件组，或称 A_1，A_2，…，A_n 为 S 的一个划分. 如图 1-6 所示.