



普通高等教育“十二五”规划教材  
理工类大学数学教学丛书  
河南省精品课程配套教材

郭运瑞 主编

# 高等数学 (上册)



科学出版社

013/355

31

2012

普通高等教育“十二五”规划教材  
理工类大学数学教学丛书  
河南省精品课程配套教材

# 高等数学

(上册)

主 编 郭运瑞  
副主编 李巧萍 胡丽平 宋林森 马巧云  
编 者 (按姓氏拼音排序)  
白春阳 郭运瑞 何春花 胡丽平  
李巧萍 刘 娟 陆 博 马巧云  
宋林森 杨小飞 原冠秀 张清山

北方工业大学图书馆



020271339

科学出版社

北 京

## 内 容 简 介

本书是根据“高等学校本科教学质量与教学改革工程”的需要,参照高等学校数学与统计学教学指导委员会发布的《理工类本科数学基础课程教学基本要求》,参考《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》编写而成的。

全书分上、下册出版,本书为上册.上册内容包括:绪论,函数、极限与连续,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,不定积分,定积分,定积分的应用,空间解析几何与矢量代数 8 章内容.书末附有初等数学常用知识、几种常用曲线及其方程、积分表、Mathematica 软件包的常用系统函数.全书每节后都配有精选的习题,既有基础题又有应用广泛的综合题.每章后还附有分层次教学测试练习题、Mathematica 数学实验和数学欣赏.充分考虑分层次教学的需要,对全方位提升学生的综合素质和创新能力等方面起到积极的作用.

本书可作为高等本科院校理工类专业的高等数学教材,也可作为学生自学和考研的参考书.

### 图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册)/郭运瑞主编. —北京:科学出版社,2012  
理工类大学数学教学丛书·普通高等教育“十二五”规划教材  
ISBN 978-7-03-033851-8

I. ①高… II. ①郭… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 043641 号

责任编辑:张中兴 周金权 / 责任校对:钟 洋  
责任印制:张克忠 / 封面设计:迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京市农林局有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2012 年 3 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2012 年 3 月第一次印刷 印张:24 3/4

字数:500 000

定价:67.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题,我社负责调换)



## 《理工类大学数学教学丛书》编委会

---

主 任 郭运瑞 曹殿立

副主任 陈荣江 王建平 马宝林 胡丽平  
李巧萍 宋林森 马巧云 温 建

委 员(按姓氏拼音排序)

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| 白春阳 | 陈志成 | 葛 立 | 何春花 |
| 李艳华 | 刘 娟 | 陆 博 | 潘全香 |
| 孙成金 | 杨小飞 | 原冠秀 | 张清山 |

## 丛书序



随着我国高等教育“大众化”阶段的到来,尤其是 2004 年高中施行“新课改”以来,高等教育在培养目标和教学要求等方面已呈现出多层次、多元化的新情况,不同层次高校的学生和学科对数学的需求也是多样化的. 如何保证和提高地方普通高校大学数学类课程的教学质量,以及如何进行地方普通高等院校创新型人才的培养,成为当前我国地方普通高等院校最重要的研究课题之一. 尤其是作为地方普通高等院校教学第一线的教师来说,十分需要适用于这一层次生源特点和基础水平的大学数学类教材. 河南省教学名师奖获得者、河南省精品课程的主持人郭运瑞教授,2005 年以来将“大学数学分层次教学的研究与改革实践”和“高中新课改后大学数学教学改革的研究与实践”作为其主持的重要研究课题,这两项课题被列入河南省普通高等教育教学改革项目,并获得了“河南省普通高等教育省级教学改革成果奖”. 在这些实践的基础上编写的本套丛书是她带领的教学团队与兄弟院校的教学团队多年奋斗在教学和教学改革第一线的研究与实践的成果.

本套丛书的特色在于,它适应大众教育时代地方普通高等院校的学生和学科的特点及要求,能更好地适应学生专业学习与发展的要求,适应学生自身条件和发展目标的个性化需求. 本套丛书为地方普通高等院校大学数学类课程分层次教学提供了很好的教材. 丛书内容加强了数学概念与实际问题的联系,将数学建模的思想和方法渗透到教材中去,重视培养学生应用数学知识以及数学软件解决实际问题的意识与能力. 同时还注意到对学习内容主线的适当延伸,这有助于开拓学生的思路 and 眼界,加强数学与其他学科之间的实践联系,体现了数学的应用性. 本套丛书将在大学数学类课程中渗透数学文化的理念贯穿始终,注重学生数学素质的培养. 内容编写简繁得当,叙述简洁明了,前后衔接自然,对学生把握知识之间的联系十分有益.

本套丛书的作者们借鉴了国内外同类教材之长,吸收了众多最新的教学和科研成果,将自己多年的科研成果和教学经验融入了教材中,使教材内容更加充实、更加有新意. 相信本套丛书将会在我国大学数学类课程教学改革和发展的过程中发挥积极有益的作用,满足广大读者的学习需要.

感谢丛书的作者们为我国大学数学教学改革和发展所作的努力.

顾 沛

2012 年 3 月

于南开大学

# 前言



本书是根据“高等学校本科教学质量与教学改革工程”的需要,参照高等学校数学与统计学教学指导委员会发布的《理工类本科数学基础课程和教学基本要求》,参考《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》编写而成的,是编者多年教学实践经验的总结,是编者获得的河南省省级教学改革成果“大学数学分层次教学的研究与改革实践”、“高中新课改后大学数学教学改革的研究与实践”的应用. 编者是河南省教学名师奖获得者,主讲的高等数学是河南省精品课程.

随着我国高等教育“大众化”阶段的到来,尤其是 2004 年高中施行新课改以来,高等教育在培养目标和教学要求等方面已呈现出多层次、多元化的新情况. 现阶段大学数学教育正面临着生源层次多样化与教学内容单一的矛盾,教学课时减少与教学内容增加的矛盾,对学生数学实践能力要求的提高与教材理论性过强的矛盾等一系列的问题. 针对这些问题,编者对大学数学模块化教学和分层次教学进行了多年的研究与改革实践,取得了丰硕的成果,主编出版过多部不同层次的高等数学教材. 结合当前的高等数学教学实际,根据多年的教学经验,依据 21 世纪科技人才对数学素质的要求,在对当前的教学对象和以往教材内容深入细致的探讨之后,力求使本书突出以下主要特点:

1. 教材定位准确、选材适当、体系新颖,在深度和广度上完全符合理工类本科数学基础课程教学基本要求,在内容编排上注意将初等数学知识融会在高等数学的教学中,使高等数学教材内容能更好的与中学数学相衔接,更有利于教师针对教学对象,结合本课程教学大纲和教学基本要求,因材施教,因人施教,充分考虑了地方普通院校高等数学课程分层次教学的需要.

2. 充分重视培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力,将数学建模的思想和方法渗透到教材中,结合具体问题进行数学建模训练. 特别是将 Mathematica 数学实验融于各章中讲授,不但有利于提高学生利用计算机求解数学模型的能力,而且有助于提高学生学数学、用数学的积极性.

3. 突出强调数学概念与实际问题的联系,努力反映近年来高等数学在教学和科研实践中的最新成果. 对每一重要概念都介绍其应用背景,每一重要结果都举出应用实例,应用的范围也不仅仅局限在几何、物理方面,而扩大到经济、生物、信息科学、生

命科学与化学等学科领域,拓宽了教材内容的适用面.

4. 全书精选的例题习题,内容丰富,难易适度,文字叙述清晰流畅,简明易懂,深入浅出,循序渐进,便于学生学习. 每章后所附的分层次教学测试练习题,以利于加强学生的课后学习和优秀学生的提高训练与考研训练.

5. 融入数学文化欣赏方面的内容,让读者欣赏数学的美丽与神奇,感知数学历史的源远流长和数学思想的博大精深,提升数学素质和品位.

全书分上、下册. 上册内容包括 Mathematica 数学实验,函数极限与连续,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,不定积分,定积分,定积分的应用,空间解析几何与矢量代数等内容. 书末附有初等数学常用知识,几种常用曲线及其方程,积分表,Mathematica 软件包的常用系统函数. 下册内容包括 Mathematica 数学实验,多元函数微分法及其应用,重积分,曲线积分与曲面积分,微分方程,无穷级数等内容. 全书每节后都配有精选的习题,既有基本题又有应用广泛的综合应用题,并附有习题参考答案. 每章后还附有分层次教学测试练习题、Mathematica 数学实验和数学文化欣赏,更能激起学生对数学的兴趣和爱好. 对全方位提升学生的综合素质和创新能力等方面起到积极的作用.

本书可作为高等院校的高等数学教材使用,也可作为学生自学和考研的参考书.

本书由郭运瑞任主编,白春阳、何春花、胡丽平、李巧萍、刘娟、陆博、马巧云、宋林森、杨小飞、原冠秀、张清山参加了编写工作,由郭运瑞统一定稿.

在本书出版过程中,得到了科学出版社的大力支持,在此深表感谢!

由于编者学识水平所限,书中难免有错误和不妥之处,敬请同行专家和读者不吝指正.

编 者

2011 年 6 月

# 目 录



## 丛书序

## 前言

|                             |    |
|-----------------------------|----|
| 第 0 章 绪论                    | 1  |
| 0.1 高等数学概论                  | 1  |
| 0.1.1 高等数学的发展过程             | 1  |
| 0.1.2 微积分研究的两个基本问题及方法       | 2  |
| 0.1.3 高等数学与初等数学的比较          | 6  |
| 0.1.4 学习高等数学的方法             | 6  |
| 0.2 初识符号计算系统 Mathematica    | 7  |
| 0.2.1 Mathematica 的启动和运行    | 8  |
| 0.2.2 Mathematica 的输入及运算    | 10 |
| 0.2.3 Mathematica 的联机帮助系统   | 13 |
| 习题 0.2                      | 15 |
| 数学欣赏 自然对数的底 $e$ 的来历与自然对数的引入 | 16 |
| 第 1 章 函数极限与连续               | 18 |
| 1.1 函数的概念                   | 18 |
| 1.1.1 集合 区间与邻域              | 18 |
| 1.1.2 函数的概念                 | 19 |
| 1.1.3 函数的几种特性               | 21 |
| 习题 1.1                      | 22 |
| 1.2 初等函数                    | 23 |
| 1.2.1 反函数                   | 23 |
| 1.2.2 复合函数                  | 24 |
| 1.2.3 初等函数                  | 25 |
| * 1.2.4 双曲函数与反双曲函数          | 25 |
| 习题 1.2                      | 28 |
| 1.3 数列的极限                   | 28 |



|                                   |    |
|-----------------------------------|----|
| 1.3.1 数列极限的概念                     | 28 |
| 1.3.2 收敛数列的性质                     | 32 |
| 1.3.3 数列极限的四则运算法则                 | 34 |
| 1.3.4 数列极限存在准则                    | 37 |
| 习题 1.3                            | 39 |
| 1.4 函数的极限                         | 41 |
| 1.4.1 自变量趋于无穷大时函数的极限              | 41 |
| 1.4.2 自变量趋于有限值时函数的极限              | 42 |
| 1.4.3 函数极限的性质                     | 46 |
| 习题 1.4                            | 47 |
| 1.5 无穷小量与无穷大量                     | 47 |
| 1.5.1 无穷小量                        | 47 |
| 1.5.2 无穷大量                        | 48 |
| 1.5.3 无穷小量的运算定理                   | 50 |
| 习题 1.5                            | 52 |
| 1.6 函数极限的运算法则                     | 52 |
| 习题 1.6                            | 55 |
| 1.7 夹逼准则 两个重要极限                   | 56 |
| 习题 1.7                            | 59 |
| 1.8 无穷小量的比较                       | 60 |
| 习题 1.8                            | 62 |
| 1.9 函数的连续性                        | 63 |
| 1.9.1 函数的连续性                      | 63 |
| 1.9.2 连续函数的运算法则                   | 65 |
| 1.9.3 初等函数的连续性                    | 66 |
| 1.9.4 函数的间断点                      | 66 |
| 习题 1.9                            | 68 |
| 1.10 闭区间上连续函数的性质                  | 69 |
| 习题 1.10                           | 70 |
| 1.11 用 Mathematica 进行函数运算         | 71 |
| 1.11.1 Mathematica 中的数、运算符、变量与表达式 | 71 |
| 1.11.2 常用函数                       | 73 |
| 1.11.3 自定义函数                      | 74 |
| 1.11.4 表                          | 75 |
| 习题 1.11                           | 76 |
| 1.12 用 Mathematica 求极限、函数的间断点     | 76 |

|                                 |           |
|---------------------------------|-----------|
| 1.12.1 函数求极限 .....              | 76        |
| 1.12.2 函数的间断点 .....             | 78        |
| 习题 1.12 .....                   | 79        |
| 第 1 章分层次测试题 .....               | 80        |
| 数学欣赏 五个重要常数的关系 .....            | 83        |
| <b>第 2 章 导数与微分</b> .....        | <b>85</b> |
| 2.1 导数概念 .....                  | 85        |
| 2.1.1 导数概念的引入 .....             | 85        |
| 2.1.2 导数的定义 .....               | 86        |
| 2.1.3 求导函数举例 .....              | 88        |
| 2.1.4 导数的几何意义 .....             | 89        |
| 2.1.5 函数的可导性与连续性的关系 .....       | 91        |
| 习题 2.1 .....                    | 91        |
| 2.2 求导法则 .....                  | 92        |
| 2.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则 .....     | 92        |
| 2.2.2 复合函数的求导法则 .....           | 94        |
| 2.2.3 反函数的导数 .....              | 96        |
| * 2.2.4 双曲函数与反双曲函数的导数 .....     | 98        |
| 2.2.5 初等函数的求导公式小结 .....         | 98        |
| 习题 2.2 .....                    | 99        |
| 2.3 高阶导数 .....                  | 100       |
| 习题 2.3 .....                    | 103       |
| 2.4 隐函数的导数 由参数方程所确定的函数的导数 ..... | 104       |
| 2.4.1 隐函数的导数 .....              | 104       |
| 2.4.2 由参数方程所确定的函数的导数 .....      | 105       |
| 2.4.3 求导举例 .....                | 107       |
| 习题 2.4 .....                    | 109       |
| 2.5 微分 .....                    | 110       |
| 2.5.1 微分的概念 .....               | 110       |
| 2.5.2 微分的几何意义 .....             | 111       |
| 2.5.3 微分的运算法则 .....             | 112       |
| 习题 2.5 .....                    | 113       |
| 2.6 导数与微分的简单应用 .....            | 114       |
| 2.6.1 导数的应用 .....               | 114       |
| 2.6.2 微分在近似计算中的应用 .....         | 117       |
| 2.6.3 微分在误差估计中的应用 .....         | 119       |

|                                          |     |
|------------------------------------------|-----|
| 习题 2.6 .....                             | 120 |
| 2.7 用 Mathematica 进行导数运算 .....           | 120 |
| 2.7.1 初等函数求导数 .....                      | 120 |
| 2.7.2 隐函数和由参数方程确定的函数求导数 .....            | 122 |
| 习题 2.7 .....                             | 123 |
| 第 2 章分层次测试题 .....                        | 124 |
| 数学欣赏 微积分成果优先权的争论 .....                   | 127 |
| <b>第 3 章 微分中值定理与导数的应用</b> .....          | 129 |
| 3.1 微分中值定理 .....                         | 129 |
| 3.1.1 罗尔(Rolle)定理 .....                  | 129 |
| 3.1.2 拉格朗日(Lagrange)中值定理 .....           | 132 |
| 3.1.3 柯西(Cauchy)中值定理 .....               | 134 |
| 习题 3.1 .....                             | 135 |
| 3.2 洛必达(L'Hospital)法则 .....              | 135 |
| 3.2.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式 .....           | 136 |
| 3.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式 ..... | 137 |
| 3.2.3 其他类型的未定式 .....                     | 138 |
| 习题 3.2 .....                             | 140 |
| 3.3 泰勒定理及其应用 .....                       | 141 |
| 3.3.1 泰勒定理 .....                         | 141 |
| 3.3.2 几个常用的麦克劳林公式 .....                  | 143 |
| 3.3.3 泰勒公式的应用 .....                      | 146 |
| 习题 3.3 .....                             | 148 |
| 3.4 函数的单调性与极值 .....                      | 148 |
| 3.4.1 函数单调性的判定 .....                     | 148 |
| 3.4.2 函数的极值 .....                        | 151 |
| 3.4.3 函数的最大值和最小值 .....                   | 155 |
| 习题 3.4 .....                             | 157 |
| 3.5 函数的凹凸性与拐点 .....                      | 158 |
| 3.5.1 函数的凹凸性 .....                       | 158 |
| 3.5.2 曲线的拐点 .....                        | 159 |
| 习题 3.5 .....                             | 160 |
| 3.6 函数图形的描绘 .....                        | 161 |
| 3.6.1 曲线的渐近线 .....                       | 161 |

|                                  |     |
|----------------------------------|-----|
| 3.6.2 依据函数特性作图 .....             | 163 |
| 习题 3.6 .....                     | 165 |
| * 3.7 导数在经济中的应用——边际分析与弹性分析 ..... | 166 |
| 3.7.1 边际与边际分析 .....              | 166 |
| 3.7.2 弹性与弹性分析 .....              | 170 |
| 习题 3.7 .....                     | 177 |
| * 3.8 方程的近似解 .....               | 178 |
| 3.8.1 二分法 .....                  | 178 |
| 3.8.2 切线法 .....                  | 179 |
| 习题 3.8 .....                     | 181 |
| 3.9 用 Mathematica 做导数应用题 .....   | 181 |
| 习题 3.9 .....                     | 182 |
| 第 3 章分层次测试题 .....                | 183 |
| 数学欣赏 法国大数学家——柯西、拉格朗日、罗尔 .....    | 186 |
| <b>第 4 章 不定积分</b> .....          | 188 |
| 4.1 不定积分的概念与性质 .....             | 188 |
| 4.1.1 原函数与不定积分的概念 .....          | 188 |
| 4.1.2 不定积分的性质 .....              | 190 |
| 4.1.3 基本积分公式 .....               | 191 |
| 习题 4.1 .....                     | 192 |
| 4.2 换元积分法 .....                  | 192 |
| 4.2.1 第一类换元积分法 .....             | 192 |
| 4.2.2 第二类换元积分法 .....             | 197 |
| 习题 4.2 .....                     | 200 |
| 4.3 分部积分法 .....                  | 202 |
| 习题 4.3 .....                     | 205 |
| 4.4 几种特殊类型函数的积分 .....            | 206 |
| 4.4.1 有理函数的积分 .....              | 206 |
| 4.4.2 三角函数有理式的积分 .....           | 210 |
| 4.4.3 简单无理函数的积分 .....            | 212 |
| 4.4.4 积分表的使用 .....               | 212 |
| 习题 4.4 .....                     | 213 |
| 数学欣赏 利玛窦与中西方数学文化的融合 .....        | 215 |
| <b>第 5 章 定积分</b> .....           | 217 |
| 5.1 定积分的概念与性质 .....              | 217 |
| 5.1.1 定积分的实际背景 .....             | 217 |

|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| 5.1.2 定积分的概念 .....                | 219 |
| 5.1.3 定积分的几何意义 .....              | 220 |
| 5.1.4 定积分的基本性质 .....              | 221 |
| 习题 5.1 .....                      | 224 |
| 5.2 微积分基本公式 .....                 | 224 |
| 5.2.1 积分上限函数及其导数 .....            | 225 |
| 5.2.2 牛顿-莱布尼茨公式 .....             | 227 |
| 习题 5.2 .....                      | 228 |
| 5.3 定积分的换元积分法 .....               | 230 |
| 习题 5.3 .....                      | 232 |
| 5.4 定积分的分部积分法 .....               | 232 |
| 习题 5.4 .....                      | 234 |
| * 5.5 定积分的近似计算 .....              | 235 |
| 5.5.1 梯形法 .....                   | 235 |
| 5.5.2 抛物线法 .....                  | 236 |
| 习题 5.5 .....                      | 238 |
| 5.6 广义积分 .....                    | 238 |
| 5.6.1 无穷限广义积分 .....               | 238 |
| 5.6.2 无界函数的广义积分 .....             | 240 |
| * 5.6.3 伽玛(Gamma)函数 .....         | 242 |
| 习题 5.6 .....                      | 243 |
| 5.7 用 Mathematica 计算一元函数的积分 ..... | 244 |
| 5.7.1 定积分的近似计算 .....              | 244 |
| 5.7.2 不定积分与定积分的计算 .....           | 245 |
| 习题 5.7 .....                      | 245 |
| 数学欣赏 莱布尼茨与康熙大帝 .....              | 246 |
| <b>第 6 章 定积分的应用</b> .....         | 248 |
| 6.1 定积分的微元法 .....                 | 248 |
| 6.2 定积分的几何应用 .....                | 249 |
| 6.2.1 平面图形的面积 .....               | 249 |
| 6.2.2 体积 .....                    | 253 |
| 6.2.3 平面曲线的弧长 .....               | 255 |
| 习题 6.2 .....                      | 257 |
| 6.3 定积分的物理应用 .....                | 259 |
| 6.3.1 功 .....                     | 259 |
| 6.3.2 液体对平面薄板的压力 .....            | 260 |

|                                                |     |
|------------------------------------------------|-----|
| 6.3.3 引力 .....                                 | 261 |
| 习题 6.3 .....                                   | 262 |
| 6.4 定积分在经济管理中的应用 .....                         | 263 |
| 6.4.1 已知总产量的变化率求总产量 .....                      | 263 |
| 6.4.2 已知边际函数求总量函数 .....                        | 263 |
| 习题 6.4 .....                                   | 265 |
| 6.5 用 Mathematica 做定积分应用题 .....                | 265 |
| 6.5.1 求平面图形的面积 .....                           | 265 |
| 6.5.2 求平面曲线的弧长 .....                           | 266 |
| 6.5.3 求旋转体的体积 .....                            | 266 |
| 习题 6.5 .....                                   | 267 |
| 第 4、5、6 章分层次测试题 .....                          | 268 |
| 数学欣赏 中国科学院院士鼓励学生参与数学建模 .....                   | 272 |
| <b>第 7 章 空间解析几何与矢量代数</b> .....                 | 274 |
| 7.1 空间直角坐标系与矢量的概念 .....                        | 274 |
| 7.1.1 空间直角坐标系 .....                            | 274 |
| 7.1.2 矢量的概念 .....                              | 276 |
| 习题 7.1 .....                                   | 278 |
| 7.2 矢量的坐标 .....                                | 279 |
| 7.2.1 矢量在轴上的投影 .....                           | 279 |
| 7.2.2 矢径的坐标表示 .....                            | 280 |
| 7.2.3 矢量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示 ..... | 280 |
| 7.2.4 坐标表示下的矢量线性运算 .....                       | 280 |
| 7.2.5 矢量的模与方向余弦的坐标表示 .....                     | 281 |
| 习题 7.2 .....                                   | 283 |
| 7.3 矢量的数量积 矢量积 * 混合积 .....                     | 283 |
| 7.3.1 矢量的数量积 .....                             | 283 |
| 7.3.2 矢量的矢量积 .....                             | 286 |
| * 7.3.3 矢量的混合积 .....                           | 288 |
| 习题 7.3 .....                                   | 289 |
| 7.4 平面与直线 .....                                | 290 |
| 7.4.1 平面 .....                                 | 290 |
| 7.4.2 空间直线 .....                               | 295 |
| 习题 7.4 .....                                   | 301 |
| 7.5 曲面及其方程 .....                               | 302 |
| 7.5.1 曲面及其方程 .....                             | 302 |

|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| 7.5.2 旋转曲面 .....                      | 303 |
| 7.5.3 柱面 .....                        | 305 |
| * 7.5.4 二次曲面 .....                    | 306 |
| 习题 7.5 .....                          | 311 |
| 7.6 空间曲线及其方程 .....                    | 312 |
| 7.6.1 空间曲线 .....                      | 312 |
| 7.6.2 空间曲线在坐标面上的投影曲线 .....            | 314 |
| 习题 7.6 .....                          | 315 |
| 7.7 用 Mathematica 做三维图形及动画 .....      | 315 |
| 7.7.1 二元函数作图 .....                    | 315 |
| 7.7.2 二次曲面的图形 .....                   | 316 |
| 7.7.3 相交曲面作图 .....                    | 316 |
| 7.7.4 动画制作 .....                      | 317 |
| 习题 7.7 .....                          | 317 |
| 第 7 章分层次测试题 .....                     | 318 |
| 数学欣赏 几何学奇观——三种几何并存 .....              | 321 |
| 附录 A 初等数学常用公式 .....                   | 323 |
| 附录 B 基本初等函数的图形及其主要性质 .....            | 327 |
| 附录 C 二阶、三阶行列式简介 .....                 | 330 |
| 附录 D 极坐标、参数方程与复数简介 .....              | 332 |
| 附录 E 几种常用的曲线 .....                    | 335 |
| 附录 F 符号计算系统 Mathematica 的常用系统函数 ..... | 338 |
| 附录 G 积分表 .....                        | 349 |
| 部分习题参考答案 .....                        | 358 |



## 第 0 章 绪 论

为了使大家在学习高等数学之前,对高等数学的发展过程及思想方法有一个初步的了解,并对 Mathematica 系统有一个初步的认识,本章将对高等数学的基本思想方法及 Mathematica 系统进行简单介绍.

### 0.1 高等数学概论

高等数学是高等院校理工科各专业必修的一门重要基础课,它的内容主要包括一元函数微积分学、多元函数微积分学、微分方程、无穷级数等内容,其核心内容是微积分.微积分产生的历史背景如何?微积分研究的对象与方法是什么?它同初等数学有什么联系和区别?所有这些问题无疑是大家开始学习这门课程所关心的,本节将对这些问题做下面的简单介绍.

#### 0.1.1 高等数学的发展过程

现实世界中的万事万物,无一不在一定的空间中运动变化,在运动变化过程中都存在一定的数量关系,数学就是研究现实中数量关系与空间形式的科学.简略地说,就是研究数和形的科学.时至今日,虽然数学的内容非常丰富,数学的表述形式非常抽象,数学的应用非常广泛,但是,关于数学的上述说法大体上还是正确的,只是随着人们对事物认识的逐渐深化,作为数学研究对象的“数”和“形”,在数学发展的不同阶段,表现形式不相同罢了!

17 世纪以前的数学,研究的数是常数或常量(即在某一运动变化过程中保持不变或相对保持不变,可以看作一个固定数值的量),研究的形是孤立的、不变的规则几何形体.研究常量间的代数运算和不同几何形体内部及相互间的关系,分别形成了初等代数和初等几何,统称为初等数学.因此,有人把这个阶段称为初等数学阶段.



1637年,法国数学家笛卡儿(R. Descartes, 1596—1650)引入了坐标,建立了解析几何. 解析几何的建立,沟通了数学中两个基本研究对象“数”与“形”之间的联系,用代数运算去处理几何问题,为处理一般变量间的依赖关系提供了几何模型,使数学的发展进入一个新阶段. 在这个阶段中,研究的“数”是变数或变量(即在某一运动变化过程中不断进行变化,可以取不同数值的量),研究的“形”是不规则的几何形体,如曲线、曲面、曲边形和曲面体等,而且“数”和“形”开始紧密地联系起来. 由于17世纪工业革命的直接推动,英国科学家牛顿(I. Newton, 1643—1727)和德国科学家莱布尼茨(G. W. Leibniz, 1646—1716)在许多数学家工作的基础上创立了微积分,他们破天荒地为变量建立了一种新型的行之有效的运算规则,去描述因变量在一个短暂瞬间相对于自变量的变化率,以及在自变量的某个变化过程中因变量作用的整体积累,前者称为微商,后者称为积分,统称为微积分. 此后,数学的发展出现了一日千里之势,形成了内容丰富的高等代数、高等几何与数学分析三大分支,在此基础上,还出现了一些其他分支. 相对初等数学,它们被称为高等数学. 因此,有人把这一阶段(1637年到19世纪末)称为高等数学阶段.

在20世纪40年代,计算数学的发展促进了电子计算机的发展;反过来,电子计算机及相应数学软件包的迅速发展又加快了数学的发展. 电子计算机及相应软件包的使用,使得传统的高等数学内容与计算机及数学软件包的联系日益密切,过去只能由数学专业人员才能完成的一些繁琐的数学计算与推理,现在也可以由一般工程技术人员借助计算机与数学软件包方便地完成. 因此,训练学生熟练地使用数学软件包已成为高等数学教学内容的一部分.

## 0.1.2 微积分研究的两个基本问题及方法

从研究常量到研究变量,从研究规则的几何形体到研究不规则的几何形体,是人类对自然界认识的一大飞跃,是数学发展中的一个转折点. 在上述两个阶段中,不但研究的对象不同,而且研究的方法也不同,初等数学主要采用形式逻辑的方法,静止地、孤立地研究问题,而高等数学则不然,它是用运动的、变化的观点去研究问题. 下面,我们以“速度问题”和“面积问题”这两个经典问题为例,介绍微积分的基本思想方法.

### 1. 变速直线运动的瞬时速度

运动有两种:一种是匀速运动,快慢始终保持不变;一种是变速运动,时而快时而慢. 客观实际中的运动常常是变速的,例如,汽车的行驶、飞机的飞行、物体的降落和抛射等,都是变速运动.

匀速运动的速度我们早已会求,有公式

$$\text{速度} = \frac{\text{路程}}{\text{时间}} = \frac{s}{t}, \quad (0.1)$$

现在我们要着重研究的是如何求变速运动的速度.