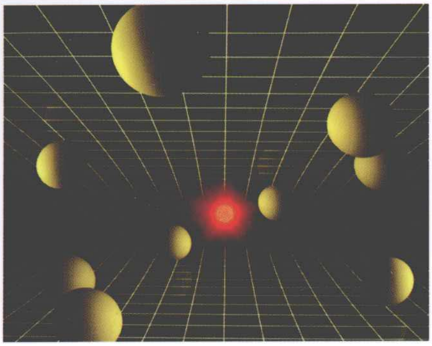
高等应用数学

于宏坤 ◎ 主编



GAODENG YINGYONG SHUXUE

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等应用数学

主　编　于宏坤
副主编　朱学荣
参　编　杨培凤　李玉贤　马　兰
主　审　葛文侠

机 械 工 业 出 版 社

本书的编写本着“以应用为目的、以必需够用为度”的原则，立足于体现高职教学改革的指导方针，力求做到结合专业的特点，强化技能培养.

本书主要内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程简介，空间解析几何. 本书适于78～96学时的教学.

本书可作为高职高专院校三年制工科专业及管理专业的教材，也可作为各类成人教育的学习用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学/于宏坤主编. —北京：机械工业出版社，2012.9

ISBN 978-7-111-39346-7

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①于…　Ⅲ.①应用数学—高等职业教育—教材　Ⅳ.①O29

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第188428号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号　邮政编码100037)
策划编辑：李大国　责任编辑：李大国　责任校对：刘雅娜
封面设计：赵颖喆　责任印制：乔　宇

北京铭成印刷有限公司印刷

2012年9月第1版第1次印刷
169mm×239mm · 11.75印张 · 287千字
0001—3000册
标准书号：ISBN 978-7-111-39346-7
定价：18.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：(010)88361066	教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：(010)68326294	机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：(010)88379649	机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：(010)88379203	封面无防伪标均为盗版

前　言

高等数学是高职高专各专业的一门必修的公共基础课，是学好专业课程的基础和工具．为了更好地为专业课服务，我们根据教育部对《高等数学课程教学基本要求》，并根据各专业对这门课的需求，编写了这本《高等应用数学》教材．

本书是在高职院校数学课程内容重构、学时减少的前提下编写的．该书的编写本着“以应用为目的、以必需够用为度”的原则，立足于体现高职教学改革的指导方针，力求做到结合专业的特点，强化技能培养．

本书在编写过程中，充分考虑了高职学生的数学基础，淡化逻辑论证，加强理论在实际问题中的应用，例题与习题尽量贴近专业．为便于学生巩固所学知识、提高基本技能，配备了较多的课后练习，并在每章后配有自测题，为不同层次的学生提供更多的练习空间．

本书主要内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程简介，空间解析几何．本书适用于高职高专院校三年制工科专业及管理专业 78 ~ 96 学时的教学．

本书由内蒙古建筑职业技术学院组织编写，主编于宏坤，副主编朱学荣，主审葛文侠．第一、二章由于宏坤编写，第三章由于宏坤、马兰编写，第四、五章由朱学荣编写，第六章由杨培凤编写，第七章由李玉贤编写，并且每人负责配备相应章节的课后习题．全书由于宏坤负责统稿．

由于时间仓促，加之作者水平有限，书中难免存在不妥之处，恳请专家、同行及读者批评指正．

编　者

目　　录

第一章　函数、极限与连续

函数是描述变量之间依赖关系的数学模型，是高等数学中重要的基本概念之一. 极限是微积分学中最基本、最重要的概念，也是学习高等数学的一个重要工具. 本章将介绍函数的一些基本概念及性质，再介绍极限的概念和运算方法，最后研究函数的连续性及闭区间上连续函数的性质.

第一节　函　　数

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1　设 x，y 是两个变量，D 是一个数集，若对于 D 中的每一个 x 值，根据某一个法则 f，变量 y 都有唯一确定的值与它对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y=f(x),\ x\in D.$$

其中，x 称为自变量；y 称为因变量；自变量 x 的变化范围 D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域；因变量 y 的变化范围称为函数 $y=f(x)$ 的值域.

2. 确定函数的两个要素

确定函数的两个要素是函数的定义域 D 和对应法则 f. 只要两个函数的定义域和对应法则都相同，就可以认为两个函数是相同的，而与自变量或因变量用什么字母表示无关. 因此，在研究函数时，除了要确定对应法则之外，还要明确函数的定义域.

例如，$y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 表示不同的函数；而 $y=\ln x$ 与 $g=\ln t$ 则表示同一函数.

在通常情况下，函数的定义域是使对应的数学表达式有意义的自变量取值的集合.

求函数的定义域时应遵循以下规则：

（1）代数式中的分母不能为零；

（2）偶次根式内的被开方式非负；

（3）对数中真数的表达式大于零；

（4）反正弦函数和反余弦函数符号后的表达式的取值在 $[-1,1]$；

(5) 表示实际问题的解析式应符合实际意义.

例 1 求函数 $y=\sqrt{1-x}$ 的定义域.

解 要使函数有意义，应满足 $1-x\geqslant 0$，即 $x\leqslant 1$，所以函数的定义域为 $(-\infty,1]$.

二、几种特殊表示类型的函数

1. 隐函数

自变量 x 和因变量 y 的对应关系是由方程 $F(x,y)=0$ 来确定的函数称为**隐函数**. 例如，$y-\ln(x-y)=0$.

2. 分段函数

在自变量的不同范围内，对应规律用不同式子来表示的函数，叫做**分段函数**.

例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases},$$

是定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的一个函数. 当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\sqrt{x}$；当 $x<0$ 时，$f(x)=-x$. 它的图像如图 1-1 所示.

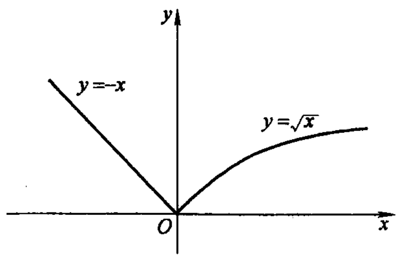


图 1-1

例 2 设分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & -1<x\leqslant 0\\ x^2 & 0<x\leqslant 1\\ 3-x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

(1) 画出函数的图像；(2) 求此函数的定义域；(3) 求 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ 的值.

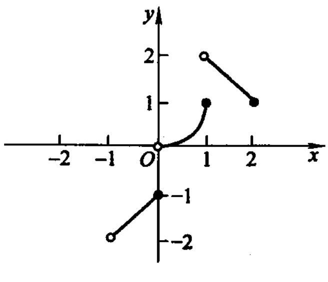


图 1-2

解 (1) 函数的图像如图 1-2 所示；

(2) 函数的定义域为 $(-1,2]$；

(3) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$.

3. 由参数方程所确定的函数

用参数方程 $\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}$，$(t\in D)$ 的形式来表示 y 与 x 之间的函数，称为由**参数方程所确定的函数**.

例如，$\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$，$(0\leqslant t\leqslant \pi)$，可以确定函数 $y=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,1]$.

三、函数的几种特性

1. 有界性

设 D 是函数 $y=f(x)$ 的定义域，若存在一个正数 M，使得对于一切 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 是**有界函数**，否则称函数 $f(x)$ 为**无界函数**.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 等都是有界函数.

2. 单调性

对于函数 $f(x)$ 在区间 I 上的任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，若有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调递增**；若有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调递减**.

单调递增函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的(图 1-3)，单调递减函数的图像是沿 x 轴正向逐渐下降的(图 1-4).

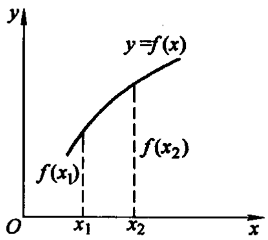


图 1-3

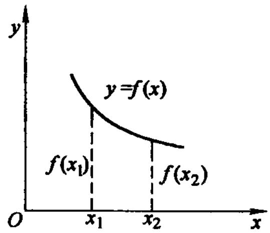


图 1-4

3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对任意 $x\in D$ 均有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**；若对任意 $x\in D$ 均有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**. 奇函数的图像关于原点对称(图 1-5)，偶函数的图像关于 y 轴对称(图 1-6).

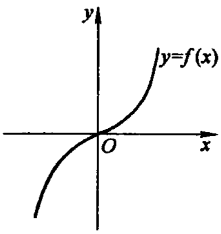


图 1-5

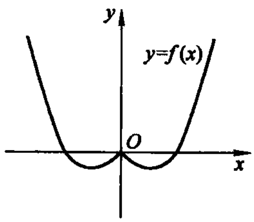


图 1-6

例 3 判断函数$f(x)=\dfrac{x}{(x+1)(x-1)}$的奇偶性.

解 因为

$$f(-x)=\frac{-x}{(-x+1)(-x-1)}=\frac{x}{(x+1)(1-x)}=-f(x),$$

所以$f(x)$是奇函数.

4. 周期性

对于函数 $y=f(x)$，若存在一个非零常数 $T>0$，使得对于一切 $x\in D$ 均有$f(x+T)=f(x)$成立，则称函数$f(x)$为**周期函数**. 例如，三角函数均为周期函数.

四、反函数

定义 2 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 W. 如果对于 W 中的每个数 y，在 D 中都有唯一确定的数 x 与之对应，且使 $y=f(x)$成立，则确定了一个 W 上的以 y 为自变量，x 为因变量的函数，称为函数 $y=f(x)$的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 W，值域为 D.

通常习惯于用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此往往将反函数中 x 与 y 互换位置，即记作 $y=f^{-1}(x)$，$x\in W$. 函数 $y=f^{-1}(x)$称为函数 $y=f(x)$的矫形反函数；函数 $x=f^{-1}(y)$称为函数 $y=f(x)$的直接反函数.

在同一坐标系中，函数 $y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$表示变量 x 与 y 之间的同一关系，它们的图形是同一条曲线；函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称.

五、基本初等函数

下列五种函数称为基本初等函数：

(1) 幂函数 $y=x^{\alpha}$ （α 为实数）；

(2) 指数函数 $y=a^{x}$ （$a>0,a\neq1$）；

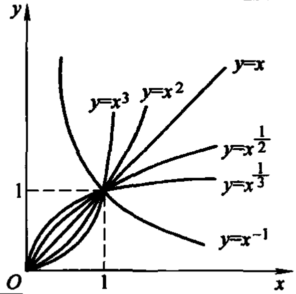
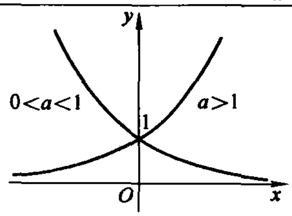
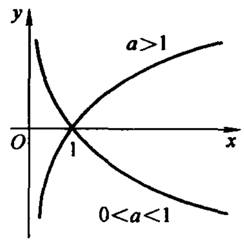
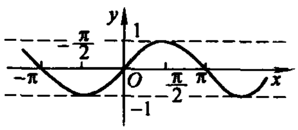
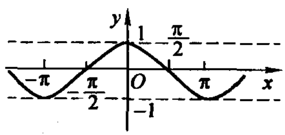
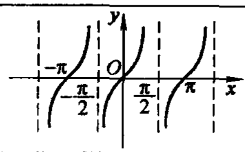
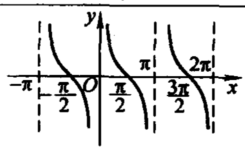
(3) 对数函数 $y=\log_a x$ （$a>0,a\neq1$）；

(4) 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

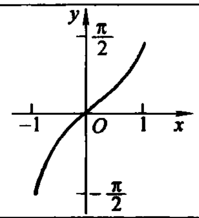
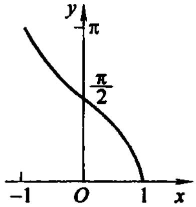
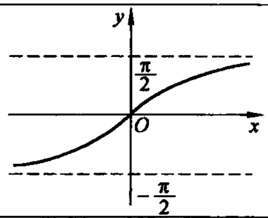
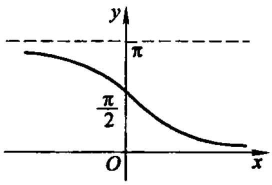
(5) 反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arccot}\, x$.

以上五类函数的定义域、值域、图像和主要特性见表 1-1. 基本初等函数是我们今后学习各类函数的基础，请同学们记住它们的图像与主要性质.

表 1-1

名称	解析式	定义域和值域	图　像	主要特性
幂函数	$y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$	依 α 不同而异，但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义		经过点(1,1) 在第一象限内，当 $\alpha>0$ 时，$y=x^{\alpha}$ 为增函数；当 $\alpha<0$ 时，$y=x^{\alpha}$ 为减函数
指数函数	$y=a^{x}$ $(a>0,a\neq1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		图像在 x 轴上方，都通过点(0,1) 当 $0<a<1$ 时，$y=a^{x}$ 是减函数；当 $a>1$ 时，$y=a^{x}$ 是增函数
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		图像在 y 轴右侧，都通过点(1,0) 当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 是减函数；$a>1$ 时，$y=\log_a x$ 是增函数
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $(0,\pi)$ 内单调减少

（续）

名称	解析式	定义域和值域	图　　像	主要特性
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\text{arccot}\,x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

六、复合函数

定义 3　设 $y=f(u)$，而 $u=\varphi(x)$，且函数 $\varphi(x)$ 的值域与函数 $f(u)$ 的定义域的交集非空，则 $y=f[\varphi(x)]$ 叫做 x 的**复合函数**，其中 u 叫做**中间变量**.

例 4　试求由函数 $y=u^3$，$u=\tan x$ 复合而成的函数.

解　将 $u=\tan x$ 代入 $y=u^3$ 中，即得所求复合函数 $y=\tan^3 x$.

有时，一个复合函数可能由三个或更多的函数复合而成. 例如，由函数 $y=2^u$，$u=\sin v$，$v=x+1$，可以复合成函数 $y=2^{\sin(x+1)}$，其中 u 和 v 都是中间变量. 一个复合函数可以有有限个中间变量.

例 5　指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=\sin x^2$；　　(2) $y=\sqrt{\ln\frac{x}{2}}$；　　(3) $y=e^{\sin\sqrt{x+1}}$.

解 (1) $y=\sin u$，$u=x^2$；

(2) $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=\frac{x}{2}$；

(3) $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{w}$，$w=x+1$.

七、初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算构成的，并且可用一个数学式子表示的函数，称为**初等函数**.

例如，$y=\sqrt{\ln 5x-3^x}$，$y=\frac{\sqrt[3]{3x}+\tan 5x}{x^3\sin x-2^{-x}}$都是初等函数. 今后我们所讨论的函数，绝大多数都是初等函数.

习题 1-1

1. 填空题.

(1) 设$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$，则$f(x)$的定义域为__________.

(2) 设$f(x)=\frac{1}{1+x}$，则$f\left(\frac{1}{x}\right)=$__________.

(3) 设$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\leqslant 0\\ \sin x & x>0\end{cases}$，则$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=$__________.

(4) 函数$y=\cos^2(1-x)$的复合过程为__________.

2. 求函数的定义域.

(1) $y=\frac{1}{1-x^2}$；　(2) $y=\frac{\sqrt{10-2x}}{3-x}$；　(3) $y=\frac{2}{\lg(3-x)}$；

(4) $y=\arcsin\frac{x-1}{5}+\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$；　(5) $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$；

(6) $y=\sqrt{2+x}+\frac{1}{\lg(1-x)}$；　(7) $y=\begin{cases}x & 0\leqslant x<1\\ 1-x & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$.

3. 指出下列函数的定义域，求函数值并作出函数的图像.

(1) $y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x & x>1\end{cases}$，求$f(0)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(1)$，$f(2)$；

(2) $y=f(x)=\begin{cases}2 & 1\leqslant x<2\\ x & 0\leqslant x<1\\ \frac{1}{x} & x<0\end{cases}$，求$f\left(-\frac{1}{3}\right)$，$f(0)$，$f\left(\frac{3}{4}\right)$，$f(1)$.

4. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=x^{-2}$; (2) $y=x\cos x$;

(3) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$; (4) $y=\frac{\sin x}{1-x^2}$.

5. 写出下列函数的复合过程.

(1) $y=e^{x^2}$; (2) $y=\sin x^3$;

(3) $y=\ln(\cos 3x)$; (4) $y=\sqrt{1-x^2}$;

(5) $y=\sqrt{\tan 2x}$; (6) $y=5^{\ln\sin x}$;

(7) $y=(1+\lg x)^7$; (8) $y=\sin^2(2x^2+3)$;

(9) $y=\arcsin\frac{x^2-1}{2}$; (10) $y=\ln^2(\ln x)$.

第二节 极限的概念

一、数列的极限

我们来观察下面四个数列$\{x_n\}$的变化趋势:

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ 通项 $x_n=\frac{1}{n}$

(2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$ 通项 $x_n=\frac{1}{2^n}$

(3) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots$ 通项 $x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$

(4) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \cdots$ 通项 $x_n=\sqrt{n+1}$

从上面四个数列的变化趋势可以看出，数列(1)、(2)当n无限增大时，数列无限接近于一个固定常数，我们把具有这种变化趋势的数列称为有极限的数列；而数列(3)、(4)不能无限接近于一个固定的常数，因而称为无极限的数列.

定义 4 对于数列$\{x_n\}$，如果当n无限增大时，x_n无限趋近于一个固定的常数A，则称该常数A为数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \quad 或 \quad x_n\to A(n\to\infty)$$

若数列$\{x_n\}$有极限，则称数列收敛；若数列$\{x_n\}$无极限，则称数列发散.

下面几个结论，可作为我们求极限的公式，请同学们记住：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$ (C为常数)； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0(\alpha>0)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{q^n}=0(|q|>1)$.

二、函数的极限

1. 当$x\to\infty$($x\to+\infty$或$x\to-\infty$)时，函数$f(x)$的极限

观察当$x\to\infty$时，函数$y=\dfrac{1}{x}$的变化趋势. 由图1-7可见，当$x\to\infty$(包括$x\to+\infty,x\to-\infty$)时，函数$y=\dfrac{1}{x}$都趋向于确定的常数0.

定义5　设函数$y=f(x)$，在$|x|>a(a>0)$时有定义. 如果当$|x|$无限增大时，函数$f(x)$无限趋近于某个确定的常数A，则称A为当$x\to\infty$时函数$f(x)$的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\quad 或\quad f(x)\to A(x\to\infty).$$

若只当$x\to+\infty$或$x\to-\infty$时，函数趋近于确定的常数A，则记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\quad 或\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

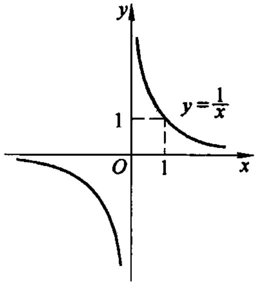


图1-7

例1　观察下列函数的图像(图1-8)，并填空.

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=(\quad)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=(\quad)$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=(\quad)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=(\quad)$.

解　从图1-8可观察到：

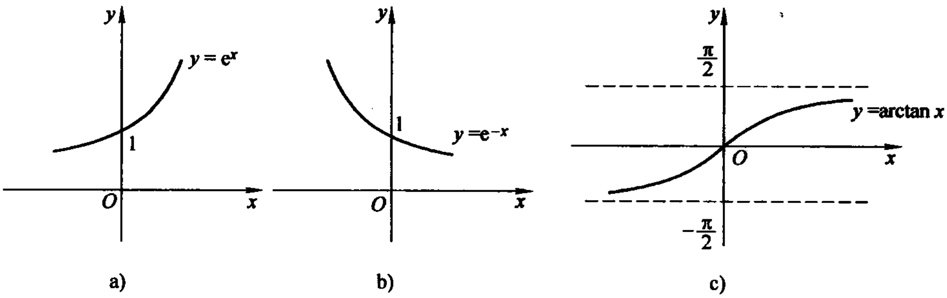


图1-8

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

显然，当$x\to+\infty$和$x\to-\infty$时，函数$y=\arctan x$不能无限趋近于同一个确定的常数，因此当$x\to\infty$时，函数$y=\arctan x$的极限不存在.

由此我们得到结论：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A.$

2. 当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

首先引入“邻域”的概念：设 x_0 与 $\delta(\delta>0)$ 是两个实数，满足不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的全体实数叫做点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$，点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

显然，点 x_0 的 δ 邻域就是以 x_0 为中心的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，如图 1-9 所示.

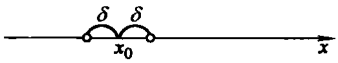


图 1-9

若在点 x_0 的 δ 邻域中去掉点 x_0，则所得集合称为点 x_0 的去心 δ 邻域，记作 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$，用区间可表示为 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$.

现在我们考察当 $x\to1$ 时，函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的变化趋势.

当 $x\neq1$ 时，函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$.

由图 1-10 可见，当 $x\to1$ 时，$y\to2$.

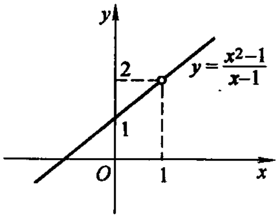


图 1-10

定义 6 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果当自变量 x 无限接近于 x_0，即 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为当 $x\to x_0$ 时函数的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0).$$

说明：(1)定义中 $x\to x_0$ 的方式是任意的，既可以从 x_0 的左侧无限接近于 x_0（记为 $x\to x_0^-$），也可以从 x_0 的右侧无限接近于 x_0（记为 $x\to x_0^+$）；

(2) 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 是否有极限与其在点 x_0 是否有定义无关；

(3) 此定义是描述性的.

定义 7 如果当 $x\to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的**右极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0+0)=A.$$

如果当 $x\to x_0^-$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的**左极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0-0)=A.$$

显然，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}x-2 & x<0\\ x+2 & x\geqslant0\end{cases}$，讨论当 $x\to0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是否存在.

解 当 x 从 0 的左侧无限接近于 0 时，有

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x-2)=-2;$$

当 x 从0的右侧无限接近于0时，有

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x+2)=2,$$

函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左、右极限都存在，但不相等，所以当 $x\to0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限不存在.

例3　设 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x<1\\ 2x & x\geqslant1\end{cases}$，讨论当 $x\to1$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是否存在.

解　当 x 从1的左侧无限接近于1时，有

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(x+1)=2;$$

当 x 从1的右侧无限接近于1时，有

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}2x=2,$$

因为 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=2$，所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$.

一般地，$\lim\limits_{x\to\infty}C=C$，$\lim\limits_{x\to x_0}C=C$，$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

习题　1-2

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{n^3}\right)$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}$；(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3^n}\right)$；(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$；

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$；　(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x$；(7) $\lim\limits_{x\to1}\ln x$；　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$，判断 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 是否存在.

3. 求分段函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & 0\leqslant x\leqslant1\\ x+1 & x>1\end{cases}$，分别当 $x\to\dfrac{1}{2}$，$x\to1$，$x\to2$ 时的极限.

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & x<0\\ 2e^x & 0\leqslant x\leqslant1\\ 4 & x>1\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to1}f(x)$，$\lim\limits_{x\to3}f(x)$.

第三节　极限的运算

一、极限的运算法则

设 $\lim f(x)$ 及 $\lim g(x)$ 都存在，则有如下法则：