数学建模
实用教程

主　编　韩中庚
副主编　陆宜清　周素静

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

数学建模事业是高尚的事业——奉献精神

数学建模活动是校园的文化——敬业精神

数学建模工作是技术的创造——创新精神

数学建模竞赛是能力的展现——勤奋精神

弘扬数模文化　传承数模精神

ISBN 978-7-04-034573-5

9 787040 345735 >

定价 36.00元

数学建模实用教程

Shu xue Jianmo Shiyong Jiaocheng

主　编　韩中庚

副主编　陆宜清　周素静

编　委(按姓氏笔画排序)：

吕良军　李海燕　李新芳

李　静　范中广　周家全

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书共有10章和3个附录，主要包括三部分内容：一是基本模型部分，包括数学建模入门、连续模型、离散模型、最优化模型和随机模型等；二是常用的数学建模方法，包括层次分析方法、数据建模方法、综合评价方法、数学建模的常用算法等；三是数学建模竞赛参考内容，包括综合应用案例分析、1999—2011年全国大学生数学建模竞赛专科组的竞赛题、MATLAB软件和Lingo软件的使用简介。

全书共收录了66个应用案例，其中包含12个全国竞赛题的案例，53个应用练习的实际问题。主要特点是结合高职高专数学课程的教学实际和参加全国大学生数学建模竞赛培训工作的需要，从内容的选择、组织编排、难易取舍都充分考虑到高职高专院校教师的使用和学生的学习实际，力求做到有用、适用、能用、够用和方便使用。

本书可以用作高职高专院校数学建模课程的教材，也可以用作参加数学建模竞赛的培训教材。根据实际教学需要，从20学时至60学时都可以选择相应的内容实施教学。本书也可以用作一般本科院校数学建模课程教学和竞赛培训的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

数学建模实用教程／韩中庚主编. --北京：高等教育出版社，2012.3

ISBN 978-7-04-034573-5

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①韩… Ⅲ. ①数学模型-高等职业教育-教材 Ⅳ. ①O141.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第011934号

策划编辑 邓雁城	责任编辑 邓雁城	封面设计 于文燕	版式设计 王艳红
插图绘制 黄建英	责任校对 殷 然	责任印制 胡晓旭	

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	北京泽明印刷有限责任公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	25	版 次	2012年3月第1版
字 数	610千字	印 次	2012年3月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	36.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 34573-00

序

越来越多的事例告诉我们，如果一个大学生具有比较坚实的数学基础，那么无论他（她）将来从事的是什么样的工作，他（她）成功的机会就比较大。因为随着社会和科技的迅速发展，越来越多实际问题的解决和创造发明都需要数学的帮助。也正是在这种意义下，我们可以说“数学无处不在”。曾经在尼克松任美国总统时担任过总统科学顾问的 Edward David 在 1984 年说过：“‘高科技’本质上是数学技术”，越来越多的人认识到这句话并不是一句哗众取宠的空话、废话，而是切切实实点到了问题的要害。因此，对于一个希望将来事业有成的大学生来说，努力学好数学，打好坚实的数学基础，实在是“当务之急”。对于我们大学的数学教师来说，这样帮助学生打好坚实的数学基础既是我们的神圣使命，也实在是数学教学改革的“当务之急”。

数学建模是用数学去解决各种实际问题的“桥梁”，在某些情形中甚至起到了决定性的作用。因此掌握一定的数学建模的思想和方法应该是坚实数学基础的重要组成部分。20 年来大学生数学建模竞赛的迅速、健康的发展，包括越来越多的高职高专学生积极参加大学生数学建模竞赛，更使我们认识到让更多的学生初步学习和掌握数学建模的思想和方法不仅仅是一个扩大受益面的问题。实际上，怎样有机地把数学建模的思想和方法融入大学数学课程是当前大学数学教学改革的一个重要切入点。要做好这一工作，关键是教师，特别是能够帮助教师提高水平的培训教材的建设更为重要。

在韩中庚教授组织、指导下，由他和几位高职高专院校多年从事数学建模教学和指导数学建模竞赛的教师合作编写的这本教材，是结合学生教学、教师进修钻研和竞赛培训的一本很好的实用教程。韩中庚教授是一位在数学建模教学、竞赛和实际应用方面很有造诣的专家。他能够全心全意地和高职高专教师一起，经过多年合作编写这本书，是一件很值得我们学习的好事，而本书也是非常值得在高职高专院校中推广使用的。我也衷心希望高职高专院校在今后使用该书的教学实践中取得更多的经验，培养出更多的优秀人才。

叶其孝

于北京理工大学

2011 年 10 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

前　言

全国大学生数学建模竞赛已走过了二十个年头，这项活动从无到有，从小到大，一路走来，已深入人心。数学建模现已成为大学校园里的热门话题，相关的活动都已成为在校大学生积极参与的校园科技文化活动之一，也出现了各级领导支持数学建模、老师关心数学建模、学生热心数学建模的良好局面。由于数学建模教学内容来自于实际，数学建模方法联系于实际，数学建模的结果应用于实际，所以数学建模相关的课程也是广大同学们最喜欢的课程之一。

数学建模相关活动现已成为大学造就创新人才的大熔炉中的强化剂，进一步加速了高素质创新人才的培养进程。“数学建模的人才”正在受到社会的广泛关注，“数学建模的能力”正在实际工作中发挥着积极的作用。全国大学生数学建模竞赛走过了第20个年头，2011年已达到了1 251所院校的19 490个参赛队，现已成为名副其实的面向全国高校大学生最大规模的科技竞赛活动。数学建模竞赛似乎被认为是高校的一项指标性的工作，受到越来越多人的关注，与数学建模相关的群众性活动正在大学校园里如雨后春笋般地涌现出来。随着数学建模教学、竞赛和应用研究等活动的不断深入开展，必将对大学的数学教学改革、提高教学质量、促进创新人才培养等工作产生积极的推动作用。以时代为契机，以需求为牵引，不断推陈出新，一定会迎来数学建模活动的新发展。

目前，全国的本科院校基本都已开设数学建模相关的课程，面向本科生的教材也非常地丰富多彩。但是，一部分高职高专院校还没有正式开设相关课程，同时适合高职高专的相关教材也并不多见，很多一线的数学建模教师都渴望能有适合高职高专院校使用的配套教材。我们根据高职高专院校的数学建模课程教学和参加全国大学生数学建模竞赛培训的实际需求，组织了部分高职高专院校的8位多年从事数学建模教学、组织竞赛培训和指导竞赛并具有一定经验的教师一起编写了《数学建模实用教程》这本教材。本书立足于高职高专院校的教学实际和数学建模课程的教学需求，以及参加全国大学生数学建模竞赛培训工作的需要，也参考了国内现有本科用教材的相关内容，从内容的选择、组织编排和难易取舍都考虑到高职高专院校教师的使用和学生的学习实际，力求做到有用、适用、好用、够用，更要方便使用。

本书主要有三大部分内容：一是适用于数学建模课程教学的内容，包括数学建模的基础知识、微积分模型、解析几何模型、代数模型、矩阵模型、差分方程模型、微分方程模型、概率统计模型和优化模型等。二是适用于数学建模竞赛的培训内容，包括层次分析建模方法、数据建模方法、综合评价方法和数学建模的常用算法等。三是适用于参加数学建模竞赛的参考学习内容，包括综合应用案例分析、全国大学生数学建模竞赛专科组历年竞赛题、MATLAB和Lingo软件的使用简介。本书可以作为高职高专院校的数学建模课程的教材，也可以作为参加数学建模竞赛的培训教材。根据实际需要，可以采用20学时至60学时选择相应的内容实施教学。本书也可以作为应用性本科院校的数学建模教学和竞赛培训活动的参考书。

本书的第1章、10.7节、10.8节、附录A和附录C由解放军信息工程大学韩中庚编写；第2

章由郑州师范学院的范中广编写；第3章和10.4节由河南机电高等专科学校的李新芳编写；第4章和10.5节由郑州铁路职业技术学院的李静编写；第5章和10.2节由郑州牧业工程高等专科学校的陆宜清编写；第6章和10.1节由郑州铁路职业技术学院的周素静编写；第7章和10.3节以及附录B由黄河水利职业技术学院的吕良军编写；第8章和10.6节由洛阳理工学院的周家全编写；第9章由郑州铁路职业技术学院的李海燕编写。全书由韩中庚统稿。

在本书的编写过程中，所有参编院校的各级领导和同事都给予了大力支持，很多高职高专院校的专家和同行们也都给予了指导与帮助，并提出很多好的修改意见。北京理工大学叶其孝教授在百忙之中审阅了全书稿，并为该书作序，清华大学姜启源教授也审阅了书稿，两位老师都提出了宝贵的意见。本书编辑出版得到了高等教育出版社高等职业教育出版事业部基础分社邓雁城编辑的大力支持，使该书得以顺利出版。在此，作者一并表示衷心的感谢。

为了广大高职高专院校教师方便教学，我们精心制作了本书全部内容的教学配套课件，提供教师使用，需要者可与编者联系索取。

限于作者水平，书中难免有不妥之处，敬请读者批评指正。

编 者

2011年10月于郑州

目　录

第一篇　基本模型

第 1 章　数学建模入门 …… 2
1.1　数学建模的作用和地位 …… 2
1.2　数学建模与能力培养 …… 3
1.3　数学模型与数学建模 …… 5
1.4　数学建模方法和步骤 …… 6
1.5　数学模型无处不在 …… 9
1.6　应用案例练习 …… 22
第 2 章　连续模型 …… 24
2.1　微积分模型 …… 24
2.2　解析几何模型 …… 30
2.3　微分方程模型 …… 35
2.4　应用案例练习 …… 48
第 3 章　离散模型 …… 50
3.1　矩阵模型 …… 50
3.2　线性方程组模型 …… 57
3.3　差分方程模型 …… 61
3.4　应用案例练习 …… 68
第 4 章　最优化模型 …… 69
4.1　线性规划模型 …… 69
4.2　整数规划模型 …… 79
4.3　二次规划模型 …… 88
4.4　非线性规划模型 …… 91
4.5　应用案例:抢渡长江问题 …… 92
4.6　应用案例练习 …… 99
第 5 章　随机模型 …… 102
5.1　初等概率模型 …… 102
5.2　简单统计模型 …… 114
5.3　一元线性回归模型 …… 122
5.4　参数估计模型 …… 124
5.5　主成分分析模型 …… 128
5.6　应用案例练习 …… 134

第二篇　常用方法

第 6 章　层次分析方法 …… 138
6.1　一般问题的提出 …… 138
6.2　层次分析的一般方法 …… 140
6.3　多层次分析的方法 …… 148
6.4　不完全层次分析方法 …… 151
6.5　层次分析方法的其他问题 …… 157
6.6　应用案例:学生宿舍设计方案的评价问题 …… 160
6.7　应用案例练习 …… 168
第 7 章　数据建模方法 …… 170
7.1　数据的描述性分析 …… 170
7.2　数据的插值方法 …… 174
7.3　数据的拟合方法 …… 180
7.4　应用案例:黄河小浪底调水调沙问题 …… 184
7.5　应用案例练习 …… 191
第 8 章　综合评价方法 …… 194
8.1　综合评价的基本概念 …… 194
8.2　评价指标体系的构建及其预处理方法 …… 196
8.3　评价指标权重系数的确定方法 …… 204
8.4　常用的综合评价数学模型 …… 209
8.5　模糊综合评价方法 …… 214
8.6　应用案例练习 …… 231

第 9 章 数学建模的常用算法 …… 236
9.1 迭代算法 …… 236
9.2 数值积分算法 …… 239
9.3 常微分方程的数值解算法 …… 243
9.4 穷举算法 …… 256
9.5 蒙特卡罗(Monte Carlo)算法 …… 258
9.6 应用案例练习 …… 260

第三篇 培训参考

第 10 章 综合应用案例分析 …… 264
10.1 会议筹备问题 …… 264
10.2 赛程安排问题 …… 276
10.3 卫星和飞船的跟踪测控问题 …… 282
10.4 地面搜索问题 …… 289
10.5 输油管道的布置问题 …… 294
10.6 SARS 传播问题 …… 299
10.7 招聘公务员问题 …… 310
10.8 煤矿瓦斯和煤尘的监测与控制问题 …… 320
附录 A 全国大学生数学建模竞赛题(专科组 1999—2011) …… 326
附录 B MATLAB 软件使用简介 …… 349
附录 C Lingo 软件使用简介 …… 368
主要参考文献 …… 390

第一篇　基本模型

数学建模不能靠看书，也不能靠听老师讲，只有靠自己去做、自己去实践！

——Sol Garfunkel

第1章　数学建模入门

众所周知，“科学技术是第一生产力”，而科学技术发展的关键是靠人才. 从某种程度上讲，现代科学技术的发展主要依赖于现代“数学技术”的发展. 特别是在知识经济时代，数学科学的地位发生了巨大的变化. 经济发展的全球化和计算机技术的迅猛发展，数学理论与方法的不断扩充使得数学的应用越来越广泛和深入，它不仅运用于自然科学领域，而且已渗透到军事、经济、社会、人文等科学领域，并在运用过程中产生了许多新的学科. 数学在高科技领域中的重要地位和作用日益突出，已成为当代高科技的一个重要组成部分和思想库，也成为高科技赖以发展的重要支柱. 早在20世纪80年代初美国“数学科学资金来源特别委员会”在给美国政府的《振兴美国数学：未来的关键资源》的报告中称：“当今如此受到称颂的‘高技术’本质上是一种数学技术”(E. E. David Jr., Notices of American Mathematical Society, 1984,31(2):142). 因此，数学技术已经成为一门能够普遍实施的技术，加快培养高素质的、并能综合运用数学技术的复合型创新人才是“高技术”发展的需要.

要培养高素质的创新人才，大学教育是关键，而大学的数学教育在整个大学教育，乃至在人才的培养中都起着重要的奠基作用. 正如著名的数学家王梓坤院士所说：“今天的数学兼有科学和技术两种品质，数学科学是授人以能力的技术”(王梓坤：《今日数学及其应用》，1993). 数学作为一门技术，现已经成为能够普遍实施的技术，也是未来的高素质创新人才必须要具备的一种技术. 因此，现代大学数学教育思想的核心就是在保证打牢学生基础的同时，力求培养学生的创新意识与创新能力、应用意识与应用能力. 也就是大学数学教育应是基于传授知识、培养能力、提高素质融为一体的教育理念之下教学体系. 数学建模活动是实现这一改革目标的有效途径，也正是为大学的数学教学改革打开了一个突破口，近20年的实践证明，这一改革方向是正确的，成效是显著的.

1.1　数学建模的作用和地位

我们培养人才的目的是为了服务于社会、应用于社会，促进社会的进步和发展. 在实际的各领域中都有一些亟待解决的实际问题，而实际问题往往是复杂多变的，量与量之间的关系并不明显，也不是套用某个数学公式，或只用某个单一学科的知识就可以圆满解决的，这就要求实际工作者具有较高的数学素质，即有较强的抽象能力、归纳能力和逻辑思维能力，能够从众多事物和现象中找出共同的、本质的东西，善于抓住问题的主要矛盾，从大量数据和定量分析中寻找并发现规律，用数学的知识和思维方法以及相关知识去解决问题，为社会服务. 不仅如此，还要求实际工作者具有敏锐的洞察力、联想和抓重点的能力，团结协作联合攻关的能力和开拓创新的精神，善于发现新问题，开拓新领域，促使社会的进步和发展. 为此，加快培养既有坚实的理论基础，又有实践能力和创新精神的高素质复合型人才是社会发展的急需. 要使现在的大学生将来能适应

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

时代、高技术和社会发展的需要，高校就应该努力加快培养所需人才应具备的能力，提高他们的综合素质. 基于此，我们认为定量分析和数学建模等数学素质是面向21世纪人才所需素质的一个重要方面，是培养创新能力的一个重要方法和途径. 为此，开展数学建模课程和相关活动将会在这方面起到重要的作用.

数学科学在实际中的重要地位和作用已普遍地被人们所认识，它的生命力正在不断地增强，这主要是来源于它的应用地位. 各行各业和各科学领域都在运用数学，或是建立在数学基础之上的，正像人们所说的“数学无处不在”已成为不可争辩的事实. 特别是在生产实践中运用数学的过程就是一个创造性的过程，成功应用的核心就是创新. 大学是人才培养的基地，而创新人才培养的核心是创新思想、创新意识和创新能力的培养. 数学建模本身就是一个创造性的思维过程，从数学建模的教学内容、教学方法，以及数学建模竞赛活动的培训等都是围绕着一个培养创新人才的核心这个主题内容进行的，其内容取材于实际、方法结合于实际、结果应用于实际. 总之，知识创新、方法创新、结果创新、应用创新无不在数学建模的过程中得到体现，这也正是数学建模的创新作用所在.

另一方面，现有的科技人才可以分为工程应用与理论研究两大类，从某种意义上来讲，工程与理论存在着客观的对立. 特别是工程与数学、工程师与数学家之间在处理问题的方式方法上都客观地存在一些不同或对立的观点，于是二者之间在具体问题上缺乏共同的沟通语言. 而数学建模和数学建模的人才可以在工程与数学、工程师与数学家之间架起一座桥梁，能在二者之间建立起共同语言，使沟通无限. 因为数学建模的人才具有一种特有的能力——“双向翻译能力”，即可以将实际问题简化抽象为数学问题——建立数学模型；利用计算机等工具求解数学模型，再将求解结果返回到实际中去，并用来分析解释实际问题. 这就使得工程与数学有机地结合在一起，工程师与数学家之间可以无障碍地沟通与合作，这也是使得近些年来能起这种桥梁作用的数学建模和数学建模人才备受欢迎的主要原因.

1.2　数学建模与能力培养

近20多年来，在国内高校中数学建模活动的热潮一浪高过一浪，数学建模竞赛现已成为国内在校大学生最大规模的课外科技活动，它的影响力和诱惑力越来越大. 随着这项活动的深入开展，受到了越来越多的领导重视和工程界、学术界的专家学者的赞同和支持，更备受高校广大师生欢迎. 教育部原副部长周远清教授如此评价数学建模：“数学建模的开展有利于对学生知识、能力和素质的全面培养，既丰富、活跃了广大同学的课外生活，也为优秀学生的脱颖而出创造了条件[1]”. 著名数学家丁石孙副委员长对数学建模活动给予了很高的评价，他说：“我们教了几十年的数学，曾经花了很多力气想使大家能够认识到数学的重要性，但是我们没有找到一个合适的方法，数学建模活动是一个很好的方法，使很多的学生包括他们的朋友都能够认识到数学的真正用处[1]”. 通过数学建模的教学和数学建模竞赛相关的活动，使广大学生能够学到综合利用数学技术和计算机技术解决实际问题的本领，掌握强有力的分析问题和解决问题的知识、方法和手段，培养了他们将实际问题转化为数学问题的数学建模能力、联想抓重点的能力、计算机的操作及编程能力、文章的写作和语言表达能力、团结协作联合攻关的能力、吃苦耐劳和连续作战的能力以及创造性的思维能力等，这些都是创新人才所具备的素质和能力的重要体现.

数学建模的工作是综合性的,所需要的知识和方法是综合性的,所研究的问题是综合性的,所需要的能力当然也是综合性的.数学建模的教学就是向学生传授综合的数学知识和方法,培养综合运用所掌握的知识和方法来分析问题、解决问题的能力.结合数学建模的培训和参加建模竞赛等活动,来培养学生丰富灵活的想象能力、抽象思维的简化能力、一眼看穿的洞察能力、与时俱进的开拓能力、学以致用的应用能力、会抓重点的判断能力、高度灵活的综合能力、使用计算机的动手能力、信息资料的查阅能力、科技论文的写作能力、团结协作的攻关能力等.数学建模就是将这些能力有机地结合在一起,形成了一种超强的综合能力,我们可称之为"数学建模的能力".这就是21世纪所需要的高素质人才应该具备的能力,我们可以断言,谁具备了这种能力,必将会大有作为.

数学建模这门课程主要是为了扩大学生的知识面,培养和提高学生综合运用所学知识解决实际问题的综合能力,即"数学建模的能力".具体地讲,数学建模有利于培养以下几个方面的能力:

(1) 丰富灵活的想象能力:数学建模要解决的问题往往都需要多学科的知识和多种不同的方法,因此,需要我们具备丰富的想象能力.英国著名文学评论家柯勒津治(Coleridge,1772—1834)说过:"想象力是最高的天赋——是一种把原始经历组合成具体形象的能力,一种把握层次能力,一种把感觉、梦幻和理想等对立因素融合成一个统一整体的能力."(参见《简明不列颠百科全书·八卷》P551)

(2) 抽象思维的简化能力:实际中的问题往往都是很复杂的,数学建模的过程就是通过对问题进行抽象、简化将其转化为数学问题.因此,这种抽象思维的简化能力是必不可少的,数学建模的学习和训练有利于培养这种能力.

(3) 一眼看穿的洞察能力:洞察能力是一种直觉地领悟,是把握事物内在的或隐藏的和本质的能力,简言之就是"一眼看穿"的能力.这种能力对于数学建模是非常重要的,但需要经过艰苦的、长期的经验积累和有针对性地训练.

(4) 发散思维的联想能力:发散思维是发明创造的一个有力武器,在数学建模的过程中,通过某些关键信息展开联想,这是一种"由此及彼,由彼及此"的能力.

(5) 与时俱进的开拓能力:随着社会的进步和发展,科学技术也快速地发展,实际中的问题复杂多变,数学建模也必须要与时俱进,发扬开拓精神,培养创新能力,这也是新型创新人才素质的一部分.

(6) 学以致用的应用能力:学以致用是21世纪高素质应用型人才所具备的一种素质,因为一个人所掌握的知识总是有限的,但解决实际问题所需要的知识相对是无限的,因此,我们必须具备这种急用先学,学以致用的应用能力,数学建模是培养我们这种能力的一种有效途径.

(7) 会抓重点的判断能力:数学建模的问题所给条件和数据往往不是恰到好处,有时也可能是杂乱无章的,这就要求我们具备特有的一种会抓重点的判断能力,充分利用已知信息,寻找突破口,来解决问题.

(8) 高度灵活的综合能力:因为数学建模的问题是综合性的,解决问题所需要的知识和方法也是综合性的,因此,我们的能力也必须是综合性的.否则,我们将会是"只见树木,不见森林",不可能完整地解决问题.

(9) 使用计算机的动手能力:数学建模必须要熟练掌握计算机的操作,以及工具软件的使用

和计算编程，这是因为对实际问题进行分析和建立数学模型以后的求解都有大量的推理运算、数值计算、作图等工作，这都需要通过计算机和软件技术来实现.

(10) 信息资料的查阅能力：信息资料的查阅能力是科技人才所必备、数学建模所必需的能力.

(11) 科技论文的写作能力：论文的写作能力是数学建模的基本技能之一，也是科技人才的基本能力之一，论文是表达我们所做工作的主要方式. 通过论文，要让读者清楚地知道用什么方法解决了什么问题，结果如何，效果怎么样，等等.

(12) 团结协作的攻关能力：数学建模都是以小组为单位开展工作的，体现的是团队精神，培养的是团结协作的能力，也是未来科研工作所必备的能力，不具备这种能力的人则将一事无成.

1.3　数学模型与数学建模

著名科学家钱学森教授说："信息时代高技术的竞争本质上是数学技术的竞争."换言之，高技术的发展的关键是数学技术的发展，而数学技术与高技术结合的关键就是数学模型. 数学模型就像一把金钥匙打开了高技术的道道难关，实际中很多技术的发展都离不开数学模型，甚至技术水平的高低取决于数学模型的优劣.

1.3.1　数学模型

模型与原型是一对对偶体，原型是指人们在现实世界里关心、研究或者从事生产、管理的实际对象，而模型是指为了某个特定目的将原型的某一部分信息简缩、提炼而构造的原型替代物. 模型不是原型，既简单于原型，又高于原型. 例如，大家熟知的飞机模型，虽然在外观上比飞机原型简单，而且也不一定会飞，但是它很逼真，也足以让人想象飞机在飞行的过程中机翼的位置与形状的影响和作用. 一个城市的交通图是该城市(原型)的模型，看模型比看原型清楚得多，此时城市的人口、道路、车辆、建筑物的形状等都不重要. 但是，城市的街道、交通线路和各单位的位置等信息都一目了然，这比看原型清楚得多. 模型可以分为形象模型和抽象模型，抽象模型最主要的就是数学模型.

当一个数学结构作为某种形式语言(即包括常用符号、函数符号、谓词符号等符号集合)解释时，这个数学结构就称为**数学模型**. 换言之，数学模型可以描述为：对于现实世界的一个特定对象，为了一个特定目的，根据特有的内在规律，做出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具得到的一个数学结构. 也就是说，数学模型是通过抽象、简化的过程，使用数学语言对实际现象的一个近似的刻画，以便于人们更深刻地认识所研究的对象.

实际上，数学模型并不是新的事物，自从有了数学，也就有了数学模型. 即要用数学去解决实际问题，就一定要使用数学的语言、方法去近似地刻画这个实际问题，这就是数学模型. 事实上，人所共知的欧几里得几何、微积分、柯西积分公式、万有引力定律、能量转换定律、广义相对论等都是非常好的数学模型.

1.3.2　数学模型与数学

数学模型与数学有着密切的关系，但与数学又是不完全相同的，主要体现在三个方面：

(1) 研究内容:数学主要是研究对象的共性和一般规律,而数学模型主要是研究对象的个性(针对性)和特殊规律.

(2) 研究方法:数学的主要研究方法是演绎推理,即按照一般原理考察特定的对象,导出结论.而数学模型的主要研究方法是归纳加演绎,归纳是依据个别现象推断一般规律.归纳是演绎的基础,演绎是归纳的指导.即数学模型是将现实对象的信息加以翻译、归纳的结果,经过求解、演绎,得到数学上的解答,再经过翻译回到现实对象,给出分析、预报、决策、控制的结果.

(3) 研究结果:数学的研究结果被证明了就一定是正确的,而数学模型的研究结果未必一定正确,这是因为它们与模型的简化和模型的假设有关,因此,对数学模型的研究结果必须接受实际的检验.

然而,鉴于数学模型与数学的关系和区别,我们评价一个数学模型优劣的标准主要是:数学模型是否有一定的实际背景、假设是否合理、推理是否正确、方法是否简单、论述是否深刻,等等.

1.3.3 数学建模

在实际工作中,能够直接使用数学方法解决的实际问题是不多的,然而,应用数学知识和方法解决实际问题的第一步就是通过实际问题本身,从形式上杂乱无章的现象中抽象出恰当的数学关系,也就是构建这个实际问题的数学模型,其过程就是**数学建模的过程**.

概括地讲,数学建模就是综合运用所掌握的知识、方法和计算机等工具来解决实际问题.

具体地讲,数学建模是对于要解决的实际问题,在一定的合理简化假设之下,综合运用多种数学知识和方法进行分析研究建立数学模型,利用计算机等工具来求解这个数学模型,将其求解结果返回到实际中去检验,最后应用于解决和解释实际问题,乃至更进一步地作为一般模型来解决更广泛的问题.

数学建模所涉及的问题都是现实生活中的实际问题,范围广、学科多,包括工业、农业、医学、生物学、政治、经济、军事、社会、管理、信息技术等方面,也可以说数学建模的应用无处不在.

1.4 数学建模方法和步骤

1.4.1 数学建模方法

数学建模一般是通过问题的实际背景,给出一些已知信息,这些信息可以是一组实测数据或模拟数据,也可是若干参数、图形,或者仅给出一些定性描述,依据这些信息建立数学模型的方法有很多,但从基本解法上大致可以分为五大类:

(1) 机理分析方法:主要是根据实际中的客观事实进行推理分析,用已知数据确定模型的参数,或直接用已知参数进行计算.

(2) 构造分析方法:首先建立一个合理的模型结构,再利用已知信息确定模型的参数,或对模型进行模拟计算.

(3) 直观分析方法:通过对直观图形、数据进行分析,对参数进行估计、计算,并对结果进行模拟.

(4) 数值分析方法:对已知数据进行数值拟合,可选用插值方法、差分方法、样条函数方法、

回归分析方法等.

(5) 数学分析方法:用"现成"的数学方法建立模型,如图论、微分方程、规划论、概率统计方法等.

在实际建模的过程中,根据问题的实际背景和已知信息选择适当方法,尽量使用"现成"的数学方法.如果已知信息不明确,或不完整时,可以进行适当补充或舍弃,甚至可以修改题目的条件、参数和数据.通常是先做最简单的模型,然后再逐步地完善改进.

数学建模或参加建模竞赛一般应具备的方法和知识:一是要掌握常用的建模方法,如机理分析方法、层次分析方法、综合评价方法、差分方法、插值与拟合方法、统计分析方法、优化方法等.二是要有比较广泛的知识,特别是必备的数学知识,如高等数学、线性代数、微分方程、概率统计、规划论、数值计算、图与网络等.这些都是数学建模应该了解的内容,数学建模所需要的知识首先是"广",其次才是"精".同时,在数学建模的教学中,还应介绍一些典型的数学模型案例,以及实际中政治、经济、工业、农业、社会管理、日常生活中的建模实例等内容.

1.4.2　数学建模的一般步骤

数学建模是一种创造性的思维过程,它需要相当高程度的观察力、想象力和灵感.数学建模的过程是有阶段性的,要解决的问题都是来自于现实世界之中.数学建模就是对问题进行分析、提炼,用数学语言作出描述,用数学方法分析、研究、解决,最后回到实际中去,应用于解决和解释实际问题,乃至更进一步地作为一般模型来解决更广泛的问题.数学建模过程的一般流程为:

"从实际问题出发→经过抽象、简化问题,明确变量和参数→根据某种定律建立变量和参数间数学关系,即数学模型→用解析方法或近似数值求解数学模型→解释和验证求解结果→通过验证之后应用于实际."

直观的建模过程流程图如图1-1所示.

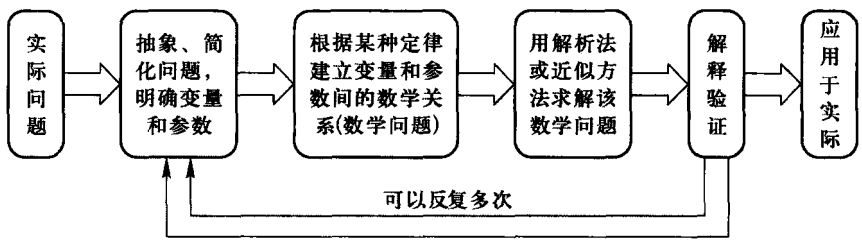

图1-1　数学建模一般过程的流程图

现在,对我们来说,这一过程为:

"针对实际问题进行分析→通过抽象简化,给出模型的假设→利用数学方法建立模型→借助于计算机等方法求解模型→对模型的结果进行分析与检验→论文写作或报告→应用于实际."

直观的一般步骤流程图如图1-2所示.

(1) 问题的分析

数学建模的问题,通常都是来自于实际中的各个领域的实际问题,没有固定的方法和标准的

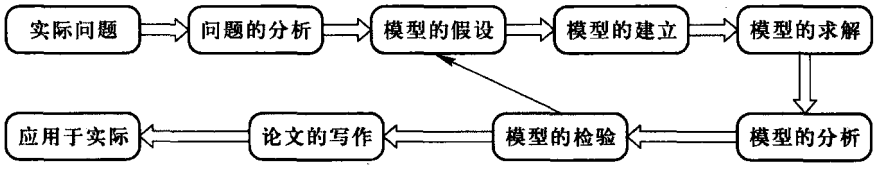

图 1-2 数学建模一般步骤的流程图

答案,因而既不可能明确要求该用什么方法,也不会给出恰到好处的条件,有些时候所给出的问题本身就是含糊不清的.因此,数学建模的第一步就应该是对问题所给的条件和数据进行分析,明确要解决的问题.通过对问题的分析,明确问题中所给出的信息、要完成的任务和所要做的工作、可能用到的知识和方法、问题的特点和限制条件、重点和难点、开展工作的程序和步骤等.同时,还要明确题目所给条件和数据在解决问题中的意义和作用,哪些是本质的和非本质的,哪些是必要的和非必要的等.从而,可以在建模的过程中,适当地对已有的条件和数据进行必要的简化或修改,也可以适当地补充一些必要的条件和数据.

(2) 模型的假设

实际中,根据问题的实际意义,在明确建模目的的基础上,对所研究的问题进行必要的、合理的简化,用准确简练的语言给出表述,即模型的假设,这是数学建模的重要一步.合理假设在数学建模中除了起着简化问题的作用外,还对模型的求解方法和使用范围起着限定作用.模型假设的合理性问题是评价一个模型优劣的重要条件之一,也是模型的建立成败的关键所在,假设做的过于简单,或过于详细,都有可能使得模型的建立并不成功.为此,实际中要做出合适的假设,需要一定的经验和探索,有时候需要在建模的过程中对已做的假设进行不断地补充和修改.

(3) 模型的建立

在建立模型之前,首先要明确建模的目的,因为对于同一个实际问题,出于不同的目的所建立的数学模型可能会有所不同.在通常情况下,建模的目的可以是描述或解释现实世界的现象;也可以是为了预报一个事件是否会发生,或未来的发展趋势;也可以是为了优化管理、决策或控制等.如果是为了描述或解释现实世界,则一般可采用机理分析的方法去研究事物的内在规律;如果是为了预测预报,则常常可以采用概率统计、优化理论或模拟计算等有关的建模方法;如果是为了优化管理、决策或控制等目的,则除了有效地利用上述方法之外,还需要合理地引入一些量化的评价指标以及评价方法.对于实际中的一个复杂问题,往往是要综合运用多种不同方法和不同学科的知识来建立数学模型,才能够很好地解决这一个问题.在明确建模目的的基础上,在合理的假设之下,就可以完成建立模型的任务,这是我们数学建模工作中最重要的一个环节.根据所给的条件和数据,建立起问题中相关变量或因素之间的数学规律,可以是数学表达式、图形和表格,或者是一个算法等,都是数学模型的表示形式,这些形式有时可以相互转换.

(4) 模型的求解

不同的数学模型的求解方法一般是不同的,通常涉及不同数学分支的专门知识和方法,这就要求我们除了熟练地掌握一些数学知识和方法外,还应具备在必要时针对实际问题学习新知识的能力.同时,还应具备熟练的计算机操作能力,熟练掌握一门编程语言和一两个数学工具软件包的使用.不同的数学模型求解的难易程度是不同的.一般情况下,对较简单的问题,应力求普遍

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com