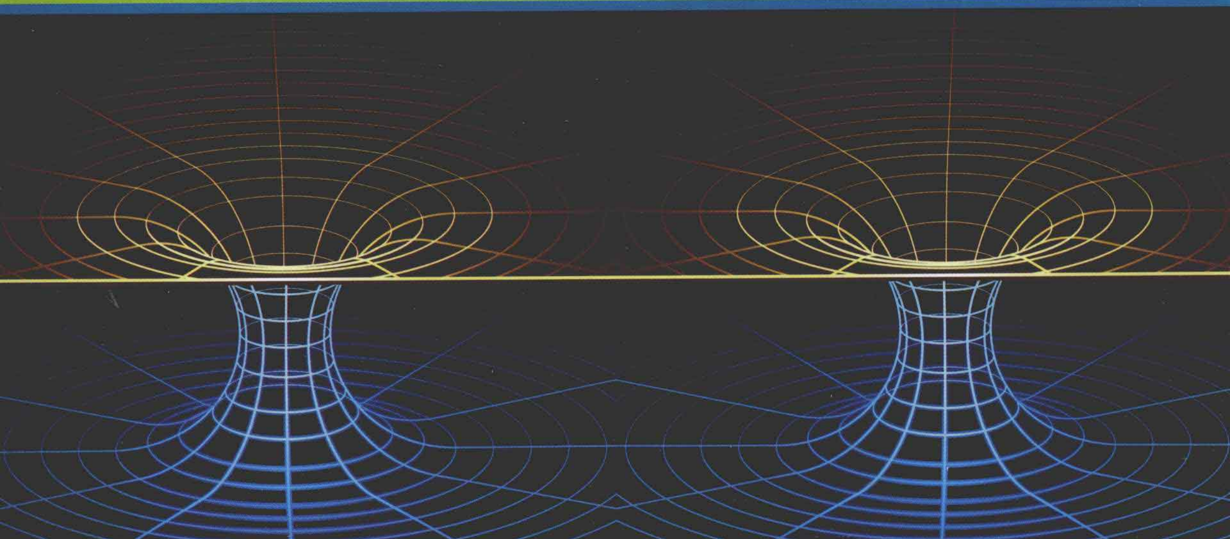
普通高等教育“十二五”重点规划教材

高等数学同步练习

刘二根 盛海波 左黎明 主编



GAODENG SHUXUE

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是按照“高等数学(微积分)课程的教学基本要求”,结合“全国硕士研究生入学考试的数学考试大纲”的要求编写而成的教材同步辅导书. 内容包括:一元函数微积分、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、微分方程等. 每章都按照高等数学(微积分)的教学过程进行分节,每一节又都分为两部分:主要知识与方法、同步练习,最后一章精选了部分高校近两年的期末考试及硕士研究生入学考试试题. 通过同步练习,将有助于提高高等数学(微积分)的解题能力.

本书可作为高等学校理工科、经济管理类学科等有关专业学习高等数学(微积分)课程的课后练习,也可作为大学生数学竞赛及考研的训练资料,并可供高等院校数学教师、自学考试人员及其他相关人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步练习/刘二根,盛梅波,左黎明主编. —上海:上海交通大学出版社,2012
普通高等教育“十二五”重点规划教材
ISBN 978-7-313-08837-6

Ⅰ. 高... Ⅱ. ①刘... ②盛... ③左... Ⅲ. 高等数学—高等学校—习题 Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 172427 号

高等数学同步练习
刘二根 盛梅波 左黎明 **主编**
上海交通大学出版社出版发行
(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)
电话:64071208 出版人:韩建民
同济大学印刷厂 印刷 全国新华书店经销
开本:787mm×960mm 1/16 印张:20.75 字数:391 千字
2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 1 次印刷
印数:1~5 030
ISBN 978-7-313-08837-6/O 定价:35.00 元

前　言

高等数学(微积分)是普通高等学校理工科、经济管理类学科等有关专业的重要基础课之一,是硕士研究生入学考试必考科目,是学习其他数学课程、理工科及经济管理类等专业课的必备数学基础,也是培养抽象思维能力、逻辑推理与判断能力、几何直观和空间想象能力、熟练的运算能力、初步的数学建模能力以及综合运用所学的知识分析和解决实际应用问题能力的强有力的数学工具.

本书是按照"高等数学(微积分)课程的教学基本要求",结合"全国硕士研究生入学考试的数学考试大纲"的要求编写而成.它包括一元函数微积分、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、微分方程等内容.每章都按照高等数学(微积分)的教学过程进行分节,每一节又都分为两部分:第一部分为主要知识与方法,着重介绍了本节的重要知识内容及相关解题方法;第二部分为同步练习,精心挑选了一些典型例题供学生进行练习,其中相当一部分例题选自部分高校高等数学(微积分)期末考试及硕士研究生入学考试的数学试题.通过本书的同步练习,将有助于学生巩固所学高等数学(微积分)的知识要点,提高学生的解题能力,为学习后续课程和考研打下扎实的数学基础.另外高等院校平时在教学过程中不会进行任何考试,为了让学生了解高等数学(微积分)课程的期末考试试题的难易程度以及考研数学一、数学二、数学三的题型、考点及难易程度,我们在最后一章精选了部分高校近两年的期末考试及硕士研究生入学考试试题,作为学生备考之用.由于微积分相对高等数学的知识点要少,所以有些章节对微积分课程是不作要求的,我们特别在相关章节中对非微积分课程内容标注了"*"以示区别.书末附有同步练习的参考答案.

参加本书编写工作的有刘二根、盛梅波、左黎明、叶晓峰、廖维川、王海龙、吴泽九、钟卫稼、陈冬华.由刘二根对全书进行审稿和统稿.

由于编者水平有限,加上时间仓促,书中存在的缺点错误,恳请读者批评指正.

编　者

2012 年 4 月

目　录

第1章 极限与连续

1.1 极限的概念与运算法则

主要知识与方法

1. 数列极限

对任意$\varepsilon>0$,存在$N>0$,当$n>N$时,有$|x_n-a|<\varepsilon$,则称a为数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时的极限,记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或 } x_n\to\infty(n\to\infty).$$

这时也称数列$\{x_n\}$收敛.

类似地,可定义函数的极限.

2. 数列极限的性质

(1) 唯一性:若数列$\{x_n\}$收敛,则其极限唯一.

(2) 有界性:若数列$\{x_n\}$收敛,则数列$\{x_n\}$有界,即存在$M>0$,有$|x_n|\leqslant M$.

注:上述结论反过来不成立,即由数列$\{x_n\}$有界不能推出数列$\{x_n\}$收敛.

(3) 保号性:若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,且$a>(<)0$,则存在$N>0$,当$n>N$时,有$x_n>(<)0$.

由保号性可得,若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,且存在$N>0$,当$n>N$时,有$x_n\geqslant(\leqslant)0$,则$a\geqslant0$ $(\leqslant0)$.

说明:对函数极限也有类似的上述三个性质.

3. 左右极限与极限的关系

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

注:若$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=B$, 且$A\neq B$, 则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在.

类似地,有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a.$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A.$$

4. 极限运算法则

设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$,则

(1) $\lim[f(x)+g(x)]=A+B=\lim f(x)+\lim g(x)$.

(2) $\lim[f(x)-g(x)]=A-B=\lim f(x)-\lim g(x)$.

(3) $\lim[f(x)g(x)]=AB=\lim f(x)\lim g(x)$.

特别,$\lim[Cf(x)]=CA=C\lim f(x)$,$\lim[f(x)]^m=A^m=[\lim f(x)]^m$.

(4) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$(其中 $\lim g(x)=B\neq 0$).

5. 一个重要结论

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0},\text{当 } n=m \text{ 时},\\ 0,\text{当 } n<m \text{ 时},\\ \infty,\text{当 } n>m \text{ 时}.\end{cases}$$

同步练习

一、填空题

1. 设 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n}{n+1}, n \text{ 为奇数} \\ \dfrac{n+1}{n}, n \text{ 为偶数}\end{cases}$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$________.

2. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=$________.

3. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+1)^3(x+3)^2}{(2x+5)^5}=$________.

4. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+3x}-2x)=$________.

二、计算题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

3. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\times(2n+1)}\right]$.

4. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$.

5. 求极限$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-2x+3})$.

6. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}}$.

7. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}[(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})]$(其中$|a|<1$).

8. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3x-1}{x+1}-ax-b\right)=2$,求 a,b.

9. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}, & x>1\\ 2x+1, & x\leqslant 1\end{cases}$,且$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$存在,求 a,b.

10. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]$.

三、证明题

设 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$,证明极限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在.

1.2　极限存在准则与两个重要极限

主要知识与方法

1. 存在准则

(1) 准则Ⅰ:设 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$,且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

类似地,设存在 $\delta>0$,当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$时,有 $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

设存在 $X>0$,当$|x|>X$ 时,有 $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且$\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

(2) 准则Ⅱ:单调有界数列存在极限.

2. 重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$,或$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$,$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

同步练习

一、填空题

1. 极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=$________.

2. 极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{x-1}=$________.

3. 极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}=$________.

4. 极限$\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=$________.

二、计算题

1. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+\pi}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2\pi}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n\pi}}\right)$.

2. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

3. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+3^n+5^n)^{\frac{1}{n}}$.

4. 求极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin \pi x}{x-1}$.

5. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 2x}$.

6. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)(x\neq 0)$.

7. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n[\ln(n+2)-\ln n]$.

8. 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{3x+2}$.

9. 设极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^{x}=8$,求 a.

三、证明题

1. $\lim\limits_{x\to 0^{+}}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

2. 设 $x_1=10$,$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\,(n\geqslant 1)$,证明数列$\{x_n\}$收敛,并求其极限.

1.3 无穷小与无穷大

主要知识与方法

1. 无穷小量

若 $\lim f(x)=0$,则称 $f(x)$为无穷小量.

2. 关于完全小量的重要结论

(1) $\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\alpha(x)$为无穷小量.

(2) 无穷小量乘有界函数仍为无穷小量.

即若 $\lim f(x)=0$,且 $|g(x)|\leqslant M$,则 $\lim[f(x)g(x)]=0$.

3. 无穷大量

(1) 若对任意 $M>0$,存在 $X>0$,当 $|x|>X$ 时,有 $|f(x)|>M$,则称函数 $f(x)$为当 $x\to\infty$时的无穷大量,记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

(2) 若对任意的 $M>0$,存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)|>M$,则称函数 $f(x)$为当 $x\to x_0$ 时的无穷大量,记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

4. 无穷小量与无穷大量的关系

(1) 设 $\lim f(x)=0$,且 $f(x)\neq0$,则 $\lim\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

(2) 设 $\lim f(x)=\infty$,则 $\lim\dfrac{1}{f(x)}=0$.

5. 无穷小量的比较

设 $\lim\alpha(x)=0$,$\lim\beta(x)=0$.

(1) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,则称 $\alpha(x)$比 $\beta(x)$为高阶无穷小,记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

(2) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$,则称 $\alpha(x)$比 $\beta(x)$为低阶无穷小.

(3) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C(C\neq0)$,则称 $\alpha(x)$比 $\beta(x)$为同阶无穷小.

(4) 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,则称 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$为等价无穷小,记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

6. 等价无穷小的性质

设 $\alpha(x)\sim\alpha'(x)$,$\beta(x)\sim\beta'(x)$,且 $\lim\dfrac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$存在,则