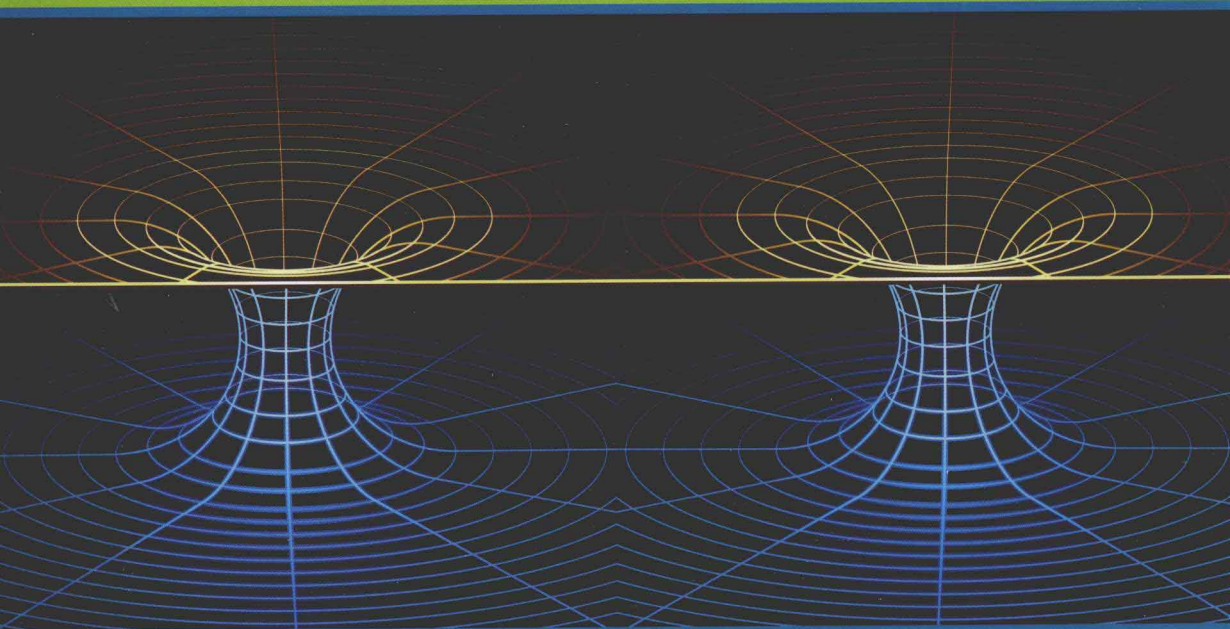


普通高等教育“十二五”重点规划教材

高等数学 同步练习

刘二根 盛海波 左黎明 主编



GAODENG SHUXUE



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是按照“高等数学(微积分)课程的教学基本要求”,结合“全国硕士研究生入学考试的数学考试大纲”的要求编写而成的教材同步辅导书.内容包括:一元函数微积分、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、微分方程等.每章都按照高等数学(微积分)的教学过程进行分节,每一节又都分为两部分:主要知识与方法、同步练习,最后一章精选了部分高校近两年的期末考试及硕士研究生入学考试试题.通过同步练习,将有助于提高高等数学(微积分)的解题能力.

本书可作为高等学校理工科、经济管理类学科等有关专业学习高等数学(微积分)课程的课后练习,也可作为大学生数学竞赛及考研的训练资料,并可供高等院校数学教师、自学考试人员及其他相关人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步练习/刘二根,盛梅波,左黎明主编. —上海:上海交通大学出版社,2012

普通高等教育“十二五”重点规划教材

ISBN 978-7-313-08837-6

I. 高... II. ①刘... ②盛... ③左... III. 高等数学—高等学校—习题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 172427 号

高等数学同步练习

刘二根 盛梅波 左黎明 主编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话:64071208 出版人:韩建民

同济大学印刷厂印刷 全国新华书店经销

开本:787mm×960mm 1/16 印张:20.75 字数:391 千字

2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 1 次印刷

印数:1~5 030

ISBN 978-7-313-08837-6/O 定价:35.00 元

版权所有 侵权必究

告读者:如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系
联系电话:021-65982320

前 言

高等数学(微积分)是普通高等学校理工科、经济管理类学科等有关专业的重要基础课之一,是硕士研究生入学考试必考科目,是学习其他数学课程、理工科及经济管理类专业课的必备数学基础,也是培养抽象思维能力、逻辑推理与判断能力、几何直观和空间想象能力、熟练的运算能力、初步的数学建模能力以及综合运用所学的知识分析和解决实际问题能力的强有力的数学工具。

本书是按照“高等数学(微积分)课程的教学基本要求”,结合“全国硕士研究生入学考试的数学考试大纲”的要求编写而成。它包括一元函数微积分、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、微分方程等内容。每章都按照高等数学(微积分)的教学过程进行分节,每一节又都分为两部分:第一部分为主要知识与方法,着重介绍了本节的重要知识内容及相关解题方法;第二部分为同步练习,精心挑选了一些典型例题供学生进行练习,其中相当一部分例题选自部分高校高等数学(微积分)期末考试及硕士研究生入学考试的数学试题。通过本书的同步练习,将有助于学生巩固所学高等数学(微积分)的知识要点,提高学生的解题能力,为学习后续课程和考研打下扎实的数学基础。另外高等院校平时在教学过程中不会进行任何考试,为了让学生了解高等数学(微积分)课程的期末考试试题的难易程度以及考研数学一、数学二、数学三的题型、考点及难易程度,我们在最后一章精选了部分高校近两年的期末考试及硕士研究生入学考试试题,作为学生备考之用。由于微积分相对高等数学的知识点要少,所以有些章节对微积分课程是不作要求的,我们特别在相关章节中对非微积分课程内容标注了“*”以示区别。书末附有同步练习的参考答案。

参加本书编写工作的有刘二根、盛梅波、左黎明、叶晓峰、廖维川、王海龙、吴泽九、钟卫稼、陈冬华。由刘二根对全书进行审稿和统稿。

由于编者水平有限,加上时间仓促,书中存在的缺点错误,恳请读者批评指正。

编 者

2012 年 4 月

目 录

第 1 章 极限与连续	1	4.3 分部积分法	84
1.1 极限的概念与运算法则 ...	1	4.4 几类特殊函数的积分	90
1.2 极限存在准则与两个重要 极限	7	第 5 章 定积分	95
1.3 无穷小与无穷大	12	5.1 定积分的概念与微积分 基本公式	95
1.4 连续与间断	17	5.2 定积分的换元法	102
第 2 章 导数与微分	23	5.3 定积分的分部积分法	108
2.1 导数的概念与计算	23	5.4 广义积分	113
2.2 高阶导数	30	第 6 章 定积分应用	118
2.3 隐函数与由参数方程确定 函数的导数	34	6.1 定积分在几何上的应用 ...	118
2.4 微分及其应用	39	6.2 定积分在物理上的应用 ...	124
第 3 章 中值定理与导数应用	45	6.3 定积分在经济上的应用 ...	127
3.1 中值定理与泰勒公式	45	第 7 章* 向量代数与空间解析 几何	129
3.2 洛必达法则	52	7.1 向量及其运算	129
3.3 函数的单调性与极值	58	7.2 曲面与空间曲线	136
3.4 曲线的凹凸性与拐点	64	7.3 平面及其方程	140
3.5 函数作图与曲率	67	7.4 空间直线及其方程	145
3.6 边际分析与弹性分析	71	第 8 章 多元函数及其应用	151
第 4 章 不定积分	74	8.1 多元函数极限与连续	151
4.1 不定积分的概念与性质 ...	74	8.2 偏导数与全微分	155
4.2 换元积分法	78	8.3 多元复合函数求导与	

隐函数求导	161	判别	219
8.4* 几何应用与方向导数	167	11.2 幂级数及其展开	228
8.5 多元函数极值	173	11.3* 傅立叶级数及其展开 ...	236
第 9 章 重积分	178	第 12 章 微分方程	240
9.1 二重积分的概念与计算 ...	178	12.1 微分方程的基本概念	240
9.2* 三重积分的概念与计算 ...	185	12.2 一阶微分方程	242
9.3* 重积分应用	192	12.3 可降阶的高阶微分 方程	248
第 10 章* 曲线积分与曲面积分 ...	196	12.4 二阶线性微分方程	251
10.1 曲线积分的概念与 计算	196	第 13 章 期末考试及硕士研究生 入学考试试题	258
10.2 格林公式及其应用	205	13.1 高等数学及微积分期末 考试试题	258
10.3 曲面积分的概念与 计算	211	13.2 硕士研究生入学考试 数学试题	279
10.4 高斯公式与斯托克斯 公式	216	参考答案与提示	299
第 11 章 无穷级数	219		
11.1 常数项级数的概念与			

第1章 极限与连续

1.1 极限的概念与运算法则

主要知识与方法

1. 数列极限

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限, 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty).$$

这时也称数列 $\{x_n\}$ 收敛.

类似地, 可定义函数的极限.

2. 数列极限的性质

(1) 唯一性: 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则其极限唯一.

(2) 有界性: 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则数列 $\{x_n\}$ 有界, 即存在 $M > 0$, 有 $|x_n| \leq M$.

注: 上述结论反过来不成立, 即由数列 $\{x_n\}$ 有界不能推出数列 $\{x_n\}$ 收敛.

(3) 保号性: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 且 $a > (<) 0$, 则存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $x_n > (<) 0$.

由保号性可得, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 且存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $x_n \geq (<) 0$, 则 $a \geq 0$ (≤ 0).

说明: 对函数极限也有类似的上述三个性质.

3. 左右极限与极限的关系

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

注: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = B$, 且 $A \neq B$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在.

类似地, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = a$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$$

4. 极限运算法则

设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$, 则

$$(1) \lim[f(x)+g(x)]=A+B=\lim f(x)+\lim g(x).$$

$$(2) \lim[f(x)-g(x)]=A-B=\lim f(x)-\lim g(x).$$

$$(3) \lim[f(x)g(x)]=AB=\lim f(x)\lim g(x).$$

特别, $\lim[Cf(x)]=CA=C\lim f(x), \lim[f(x)]^m=A^m=[\lim f(x)]^m$.

$$(4) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \text{ (其中 } \lim g(x)=B \neq 0 \text{)}.$$

5. 一个重要结论

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n = m \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } n < m \text{ 时,} \\ \infty, & \text{当 } n > m \text{ 时.} \end{cases}$$

同步练习

一、填空题

1. 设 $x_n = \begin{cases} \frac{n}{n+1}, n \text{ 为奇数} \\ \frac{n+1}{n}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1)^3(x+3)^2}{(2x+5)^5} = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2+3x}-2x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、计算题

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right)$.

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

3. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \times (2n+1)} \right]$.

4. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right]$.

5. 求极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 3})$.

6. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n}{3^{n+1} + 4^{n+1}}$.

7. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} [(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})]$ (其中 $|a| < 1$).

8. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3x - 1}{x + 1} - ax - b \right) = 2$, 求 a, b .

9. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+ax+b}{x-1}, & x > 1 \\ 2x+1, & x \leq 1 \end{cases}$, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 求 a, b .

10. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]$.

三、证明题

设 $f(x) = \frac{|x|}{x}$, 证明极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

1.2 极限存在准则与两个重要极限

主要知识与方法

1. 存在准则

(1) 准则 I : 设 $y_n \leq x_n \leq z_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

类似地, 设存在 $\delta > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, 有 $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) =$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

设存在 $X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

(2) 准则 II : 单调有界数列存在极限.

2. 重要极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

同步练习

一、填空题

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{x-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、计算题

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + \pi}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2\pi}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n\pi}} \right)$.

2. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \right)$.

3. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 3^n + 5^n)^{\frac{1}{n}}$.

4. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1}$.

5. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 2x}$.

6. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right) (x \neq 0)$.

7. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n [\ln(n+2) - \ln n]$.

8. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{3x+2}$.

9. 设极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x = 8$, 求 a .

三、证明题

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$.

2. 设 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6+x_n} (n \geq 1)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

1.3 无穷小与无穷大

主要知识与方法

1. 无穷小量

若 $\lim f(x)=0$, 则称 $f(x)$ 为无穷小量.

2. 关于完全小量的重要结论

(1) $\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 为无穷小量.

(2) 无穷小量乘有界函数仍为无穷小量.

即若 $\lim f(x)=0$, 且 $|g(x)| \leq M$, 则 $\lim[f(x)g(x)]=0$.

3. 无穷大量

(1) 若对任意 $M>0$, 存在 $X>0$, 当 $|x|>X$ 时, 有 $|f(x)|>M$, 则称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷大量, 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=\infty$.

(2) 若对任意的 $M>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)|>M$, 则称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大量, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)=\infty$.

4. 无穷小量与无穷大量的关系

(1) 设 $\lim f(x)=0$, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\lim \frac{1}{f(x)}=\infty$.

(2) 设 $\lim f(x)=\infty$, 则 $\lim \frac{1}{f(x)}=0$.

5. 无穷小量的比较

设 $\lim \alpha(x)=0, \lim \beta(x)=0$.

(1) 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, 则称 $\alpha(x)$ 比 $\beta(x)$ 为高阶无穷小, 记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

(2) 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, 则称 $\alpha(x)$ 比 $\beta(x)$ 为低阶无穷小.

(3) 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C(C \neq 0)$, 则称 $\alpha(x)$ 比 $\beta(x)$ 为同阶无穷小.

(4) 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, 则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

6. 等价无穷小的性质

设 $\alpha(x) \sim \alpha'(x), \beta(x) \sim \beta'(x)$, 且 $\lim \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$ 存在, 则