G 高等数学杂谈

AODENG SHUXUE ZATAN

孙家永 著

西北工業大學出版社

高等数学杂谈

孙家永　著

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书特别着重于基本概念之论述，是作者长期从事数学教学工作的心得与经验之精华. 全书包括 100 个小题目，每个小题目有 1～2 个新鲜的内容，其中大部分是一般书中很难见到的，经作者提取消化，并加了自己的见解而得的，也有少部分是作者独创的. 取材以对学生有用、能看懂且深、广度大体符合教学基本要求为原则.

本书是理、工科院校一年级师生的一本别开生面的数学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学杂谈/孙家永著. —西安：西北工业大学出版社，2012.2
ISBN 978-7-5612-3322-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①孙… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 029590 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号　　**邮编**：710072
电　　话：(029)88493844　88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西向阳印务有限公司
开　　本：850 mm×1 168 mm　1/32
印　　张：4.375
字　　数：109 千字
版　　次：2012 年 2 月第 1 版　2012 年 2 月第 1 次印刷
定　　价：16.00 元

前　　言

我的老学长潘鼎坤教授要我为学习高等数学的同学写些易看易懂的东西，我同意了. 但是写些什么呢？现在各种习题题解、辅导材料、考研指南等已经很多，用不到再写了. 写些澄清基本概念、加强基本功力、提高数学素养的东西，虽然很有必要，我也愿意写，但长篇大论，往往枯燥无味，怎么办？苦想了许久，觉得还是写杂谈为好，这样一本书就可以分成许多题目，每个题目只讲 1～2 个新鲜内容，易于阅读，并且都以谈话的方式出现，既轻松，又随便，可能会使学生乐意看些. 我挑选的题目专拣那些学生容易搞错，或者容易有疑问，或者有较大帮助的内容，并不面面俱到. 所以，虽然这些题目大体上也有一个体系，但基本上还是很松散，像一盘休闲果子那样，同学们可以随意挑来吃，吃不了的，暂时剩下，以后再吃，日积月累，有毅力的同学总有一天把这盘果子都吃完，到那时，他们将会在高等数学方面，有着比学习教材更多的体会与提高，这也是我深切期望与感到欣慰的了.

这本书是我长期从事数学教学工作的心得与经验之精华，也非常值得高等数学教师参考.

孙家永

2004 年国庆前夕于西安

目　录

1. 什么是实数?

在高等数学教材中,虽然经常和实数打交道,但却几乎都不说什么是实数.那么什么是实数呢? 简单地说,实数就是无尽小数.

例如:

$$\frac{12}{3}=4.000\ 0\cdots,\quad \frac{17}{5}=3.400\ 0\cdots$$

$$\frac{20}{7}=2.857\ 142\ 857\ 142\ 857\ 142\cdots$$

都是无尽小数.因此,它们都是实数,但这些无尽小数都循环,我们称这种实数为有理数,它们是我们很早就熟悉的一种实数.

$$\sqrt{2}=1.414\cdots,\quad \pi=3.141\ 59\cdots,\quad e=2.718\ 28\cdots$$

也都是无尽小数.因此,它们也都是实数,但这种无尽小数不循环,我们称这种实数为无理数.这又是一种实数,实数只有有理数和无理数两种.

2. 实数有哪些根本特性?

实数之间有四则运算、顺序关系,以及它们的有关规律.这些都和我们所熟悉的有理数的情形完全相同,这叫实数的代数特性.了解这些代数特性,对实数的特性也就了解得差不多了,但是实数还有一个在高等数学中非常重要的特性.这就是所有实数能填满整个数轴.这叫实数系统的完备性,也可以说成是实数的几何特性,它也是实数能与数轴上的点一一对应的依据,实数的代数特性及几何特性就是实数的最根本的特性.实数的其他性质都是由这些根本特性推出来的.

3. 什么叫实数的 Dedkind 性质?

这个性质是在高等数学中很有用的一个性质，是由 Dedkind 首先提出来的，所以叫 Dedkind 性质.

若非空的实数集 E 有上界 m(即 $m \geqslant E$ 中任一数)，则 E 必有最小的上界 l(即 l 是 E 的上界，但小于 l 之数就不是 E 的上界).

证 所有实数可以分成两个互斥部分，一部分是 $M=\{z \mid z \geqslant$ 所有 $x \in E\}$，即 M 是所有 E 的上界组成的部分，另一部分是

$$L=\{y \mid y < \text{某个 } x \in E\}$$

小于 E 中任一个数的数都属于 L；L，M 都非空集，且

(1) 在数轴上，M 位于 L 之右，因为任何 $y \in L$ 必小于某个 $x \in E$，所以集合 L 中的数必小于集合 M 中之任何数；

(2) 在数轴上，L 不可能有最右点，因为如 L 有最右点 y，则 $y <$ 某个 $x \in E$，但 $y < \dfrac{y+x}{2} < x$，故 $\dfrac{y+x}{2} \in L$，矛盾.

现在，如 M 无最左点，则 L 与 M 之间至少要空掉一点，与 $L \cup M$ 填满整个数轴矛盾，如图 1 所示.

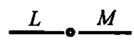

图 1

所以 M 必须有左端点 l，这 l 就是 E 的所有上界中的最小者，故 E 有最小的上界 l. E 的最小上界，通常记为 $\sup E$.

同理，若非空的实数集 E 有下界，则 E 必有最大的下界，E 的最大下界，通常记为 $\inf E$.

4. 什么叫 $\pm\infty$?

$\pm\infty$ 都是为了便于讨论极限而引进的理想数，它们都不是实数. 对它们都不能进行任何运算. 我们只设想 $+\infty$ 大于任何实数 a，记作 $+\infty > a$ 或 $a < +\infty$；$-\infty$ 小于任何实数 a，记作 $-\infty < a$ 或 $a > -\infty$. $\pm\infty$ 分别对应于数轴正向和负向的无穷远点.

5. 为什么要把$(a-\delta,a+\delta)\backslash\{a\}$叫做$a$的净邻域?

$(a-\delta,a+\delta)\backslash\{a\}$ 在英文中为 deleted neighborhood of a,指的是除掉了 a 的a 的邻域. a 的邻域里除掉了a 就是清一色的a 的邻近点了,所以叫净邻域. 这样,把$(M,+\infty)$,$(-\infty,-M)$ 分别叫做$+\infty$ 的净邻域、$-\infty$ 的净邻域,就没有什么可奇怪的了.

有一次我不小心把 a 的净邻域,说成了 a 的去心邻域. 稍后,在讲到$\pm\infty$ 的净邻域时,就使同学产生了困扰. 以后,我就不讲去心邻域这个名词了. 我把 a 的净邻域记作 $N^0(a)$,如需要说明这净邻域的半径是 δ,就记作 $N_\delta^0(a)$. 这和通用教材的记法不同,它是从德文来的. 这里用 $N^0(a)$ 的是从英文来的.

6. 函数的新定义

在探讨函数定义之前,先咬文嚼字说些术语. 量是指在研究过程中可以取为数的东西. 这个数就叫这个量取得的值,如果这个量在研究过程中所取的值都不改变,就叫常量,常量常用字母 $a,b,c\cdots$ 来表示;如果这个量在研究过程中所取的值可以改变,就把它叫做变量,变量常用字母 $x,y,z\cdots$ 来表示.

在 18 ~ 19 世纪,数学界已经研究了一些函数但还不能把握住函数的宽泛定义,甚至大数学家 Euler 还说函数是解析表达式,直到罗巴切夫斯基开始提出了函数的定义,并且逐渐得到了数学界的承认. 现今的高等数学中都沿用这个定义. 即:

设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集,如果对于每个 x 在 D 中所取的值,变量 y 按照一定的法则,总有唯一确定的数值与之对应,则称 y 是x 的函数,记作 $y=f(x)$,确定在 D 上,并把 D 称为它的定义域.

而我却有一个离经叛道的新定义(这也是现代数学的定义):

一个量，如果它的值随着另一个变量 x 在某个给定数集 D 中所取之值而唯一确定，那么就把这个量叫做另一个变量 x 的函数，记作 $f(x)$，确定在 D 上（x 叫自变量，D 叫此函数的定义域）.

比较这两种定义可见，新定义把老定义中最令人费解的"按照一定法则"去掉了，使得函数的定义很干净利落.

由于新定义的函数，并不管函数是按照什么法则随 x 之值而相应地唯一确定的，所以它比老定义的函数更宽泛. 例如，火车从始发站开出，它的速度 v 及离发站的距离 d 都随时间 t 之确定而唯一确定，所以照新定义，v，d 都是 t 的函数，确定在发车时刻到到达站时刻的区间上；照老定义，就什么都不好说，当然不方便.

但是新定义下的函数，如果不知道函数之值是如何随自变量之值而定的法则（简称函数的定值法则），也很难作深入研究，所以我们要再谈函数的定值法则问题.

照新定义，一个量，如果它的值随着自变量在 D 中所取之值而唯一确定，那么这个量就叫自变量的函数，当它还有一个从自变量的值来决定它的相应之值的法则时，这个量就成了老定义下的函数. 所以，也可以说，新定义下的函数，有了定值法则，也就是老定义下的函数，但是新定义下的函数，再让它有定值法则，讲起来，条理清楚，更容易为同学所接受.

7. 函数有哪些基本运算?

要讲函数的定值法则，必须先讲函数的基本运算，因为函数的定值法则离不开函数的基本运算.

不管新定义还是老定义下的函数都有 5 种基本运算，即加、减、乘、除及复合.

两个 x 的函数之间的加、减、乘、除运算.

设 $f_1(x)$ 确定在 D_1 上，$f_2(x)$ 确定在 D_2 上，则 $f_1(x) \pm f_2(x)$，$f_1(x)f_2(x)$ 是一个 x 的函数，确定在 $D_1 \cap D_2$ 上，因为对 x 在

$D_1 \cap D_2$ 上所取的值，$f_1(x) \pm f_2(x)$，$f_1(x)f_2(x)$ 都有唯一确定之值，$f_1(x)/f_2(x)$ 也是一个 x 的函数，确定在 $D_1 \cap D_2 \backslash \{x \mid f_2(x)=0\}$ 上. 因为对 x 在 $D_1 \cap D_2 \backslash \{x \mid f_2(x)=0\}$ 所取之值，$f_1(x)/f_2(x)$ 都能有唯一确定之值.

另外，还有一种叫复合的基本运算，它和两个 x 的函数的加、减、乘、除不同，它是把一个 u 的函数 $f(u)$ 中的 u 以 $u=g(x)$ 代入而得的函数.

设 $f(u)$ 确定在 E 上，$g(x)$ 确定在 D 上，将 $f(u)$ 中之 u 代以 $u=g(x)$ 可得

$$f(u)\mid_{u=g(x)}=f(g(x))$$

它为 x 的函数，确定在 $D \cap \{x \mid u=g(x) \in E\}$ 上，因为对 x 在 $D \cap \{x \mid u=g(x) \in E\}$ 中所取之值

$$f(u)\mid_{u=g(x)}=f(g(x))$$

都有唯一确定之值.

在 $f(u)\mid_{u=g(x)}=f(g(x))$ 中，u 就称中间变量.

实用中一些比较复杂的函数往往由一些简单函数通过基本运算而得到. 所以，今后在考虑较复杂函数之极限、连续及导数时，我们都利用一些相应的定理，将它们归结为考虑一些简单函数的情况，来加以解决.

8. 函数的定值法则及基本初等函数

通常实用中碰到的绝大部分函数都是在数轴上，或几个区间上可以写成表 1 所列简单函数及常数（常函数），经基本运算而得的结果. 可以这样写的函数称为可简单表达的函数或可分段简单表达的函数.

简单函数表见表 1（表中所列函数，统称基本初等函数）.

表 1　基本初等函数

x^μ（称幂函数），在初等函数里，已经知道它确定在 I 上，则 $I=\begin{cases}(-\infty,+\infty)，当\ \mu>0\ 且分母是奇数的分数时；\\ [0,+\infty)，当\ \mu>0\ 且分母不是奇数的分数时；\\ (-\infty,+\infty)\backslash\{0\}，当\ \mu<0\ 且分母是奇数的分数时；\\ (0,+\infty)，当\ \mu<0\ 且分母不是奇数的分数时\end{cases}$
a^x（$a\neq1$，称指数函数），确定在 $(-\infty,+\infty)$ 上
$\log_a x$（$a\neq1$，称对数函数），确定在 $(0,+\infty)$ 上
$\cos x$，$\sin x$（称三角函数），确定在 $(-\infty,+\infty)$ 上
$\cos^{-1}x$，$\sin^{-1}x$，$\tan^{-1}x$，…（称反三角函数），分别确定在 $[-1,1]$，$[-1,1]$，$(-\infty,+\infty)$，… 上

基本初等函数的图形如图 2 至图 6 所示.

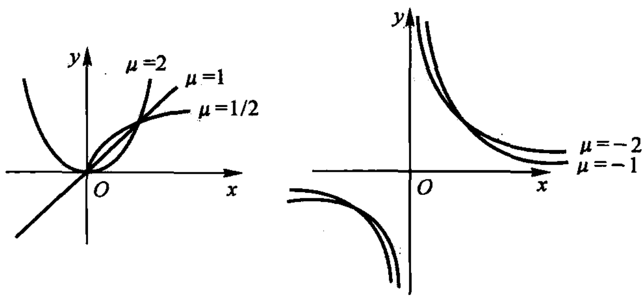

图 2　幂函数 $y=x^\mu$ 的图形

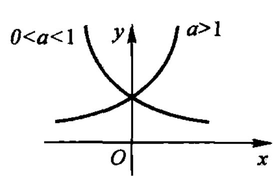

图 3　指数函数 $y=a^x$（$0<a\neq1$）的图形

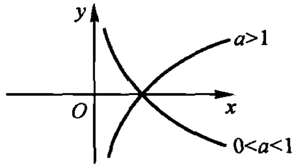

图 4　对数函数 $y=\log_a x(0<a\neq 1)$ 的图形

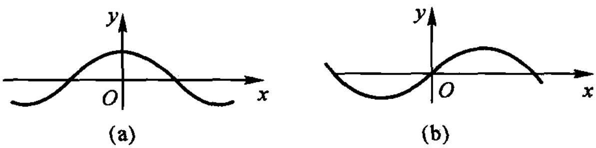

图 5　三角函数的图形

(a)$y=\cos x$ 的图形；(b)$y=\sin x$ 的图形

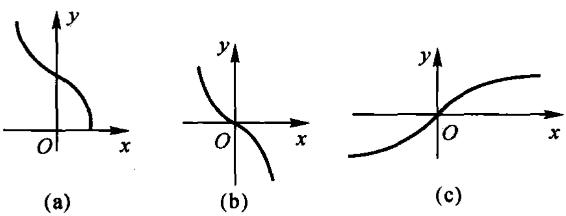

图 6　反三角函数的图形

(a)$y=\cos^{-1}x$ 的图形；(b)$y=\sin^{-1}x$ 的图形；(c)$y=\tan^{-1}x$ 的图形

例 1　一个宽 1m，高 1m 的窗子，其采光面积 A，是其帘子卷起高度 x 的函数，如图 7 所示，确定在[0,1]上，试表达此函数.

解　对[0,1]中任一数 x，$A=1\cdot x=x$，所以 $A=x$，确定在[0,1]上.

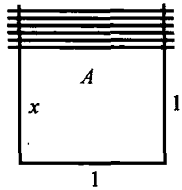

图 7

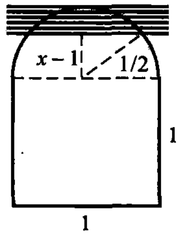

图 8

例 2 如果例 1 的窗子上方还有一个半圆形的窗孔，如图 8 所示，其采光面积 A 也是其帘子卷起高度 x 的函数，确定在 $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ 上，试表达此函数.

解 对 $[0,1]$ 中任一数 x，

$$A=1\cdot x=x$$

对 $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ 中任一数 x，

$$A=1\times1+2\times\text{小直角三角形面积}+2\times\text{小扇形面积}=$$

$$1+(x-1)\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}-(x-1)^{2}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\sin^{-1}\frac{x-1}{\frac{1}{2}}$$

或即

$$A=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 1+(x-1)\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}-(x-1)^{2}}+ & \\ \quad\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\sin^{-1}2(x-1), & 1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2} \end{cases}$$

当然，不从实用出发，函数的定值法则几乎是随心所欲的. 例如，

$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$ 是确定在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数(Dirichlet).

$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\0, & x<0\end{cases}$ 是确定在 $(-\infty,+\infty)\backslash\{0\}$ 上的函