

數 科 文 選

ESSAYS ON MATHEMATICS TEACHING
FROM THE 《 DOUSOU 》 BIMONTHLY

數學教學論叢

選文數學

叢論教學數學

江苏工业学院图书馆
藏书章

抖擻文選：數學教學論叢
梁鑑添 蕭文強等著

出版：抖擻雙月刊（香港摩利臣山郵局信箱47018號）

印刷：中華商務聯合印刷（香港）有限公司

發行：商務印書館香港分館

1981年12月 港幣10元

序 言

自從《抖擻》雙月刊在1974年1月創刊以來，已經出版了46期，約共500萬字，刊登了自然科學、人文科學、社會科學各類論文約共600餘篇。這本文集重刊的15篇中學數學教學論文，其中13篇是由八位香港專業人士為《抖擻》撰寫的，其餘兩篇是原先發表在外國專業雜誌，後來在《抖擻》刊登的譯文。

文集的部分文章重讀之下頗有“明日黃花”之感，雖然如此，它們除了歷史價值之外還有些尚未過時的參考價值的。重讀它們，一來可以藉此明瞭當時的數學教育氣候；比對於今日的情況，更能以“過去”服務於“現在”和“將來”。二來可以從總結經驗獲得寶貴的教訓；某些“陳言舊事”不失為“可鑑”的“前車”。三來証諸今日所見所聞的某些現象，或者更能了解那些文章的論點。至於時間性不那麼重要的文章，編者希望它們對數學教師們仍然能起一定的輔助作用。

大別而言，這15篇文章按照主題和內容可分為四類；當然歸納在不同類別的文章之間還是有相互關連的。

甲類：討論“新數”和有關的數學教育改革運動。無可否認，“新數”運動不只是本世紀中等數學教育的首要大事，對整個中等教育來說，它也是一次空前的大改革。這類文章佔了文集約一半的篇幅，一共七篇：【1】、【2】、【3】、【5】、【8】、【9】、【11】。文章的數目多少也反映了“新數”問題在數學教育的重要性。論文【9】探討了“新數”運動的起因和發展過程，評論了運動的得失和估計了所遺留下的問題的嚴重性。這是一篇綜合性的報導文章，它對沒有親歷其境的年青教師頗有特別的參考價值。論文【2】、【3】是兩位世界著名數學家執筆的論戰文章，其中觀點頗具論戰正反兩面的代表性和深遠的影響力。這兩篇譯文是原作發展後不久在《抖擻》刊登的，據聞最近北京新出版的《數學譯林》也重刊了這兩篇譯文。以上三篇可作一組。第二組共三篇，【1】、【5】、【8】專題討論香港一地的數學教學的變遷，報導本地數學教育界在克服一些早期的過激措施之中所獲得的課程改革的成果，文章裏也有一些還沒有過時的改良建議，可作課程策劃人員的參考資料。甲類最後一篇【11】綜合地報導美國近年數學教育概況，讀者不難發覺香港、台灣、國內和美國的情況不無共同之處。

乙類：討論國內近年的數學教育情況。在“新數”運動蔓延到世界各地的時候，中國正在進行着激烈的“文化大革命”，導至教育事業長期癱瘓。“文革”過後，國內教育事業復甦，而世界性的“新數”運動亦已進入衰退，繼而沒落的階段。七十年代末期的中國是差不多唯一的、未為“新數”所波及的國家，成為了少有的數學教學改革的“處女地”。在這種特殊情況之下，國內數學教學所面臨的問題和解決的方法和世界各地的

頗有不同之處。乙類的三篇文章【7】、【10】、【14】是幾位香港專業人士就他們的所見所聞分析國內的一些情況和提供一些改進的意見。

丙類：討論數學史在數學教學上的功用。作為人類文化活動的一部分，數學和其他自然科學都有它們的長遠的歷史。但是在自然科學的發展過程中，新的科學發現導至新的科學理論形成，淘汰了舊的理論。新舊理論和成果之間是一種新陳代謝的關係。在數學發展過程中，古老的數學理論和成果並沒有因為新的理論和成果的出現而喪失了它們的正確性，所以新舊的數學理論和成果之間是一種一脈相承的關係；新的不斷地出現而舊的也得以保留下來。這兩個不同的現象充分地反映到各科課程之上：今日的中學數學課程主要還是由十九世紀以前的數學所組成，而物理課程則是十八世紀以後的物理學。納入丙類的論文共有四篇【4】、【6】、【12】、【15】。論文【4】詳細地討論這個中心問題，其餘三篇傍及一些數學史在教學上的個別問題。

丁類文章只有一篇【13】，談論數學普及工作的經驗。作者從一套幻燈片集的製作過程說起，談到製作動機，強調了普及工作的意義。該套幻燈片製作，榮獲英聯邦科學、數學教育工作者協會（Commonwealth Association of Science and Mathematics Educators）1981年度CASME獎，對負責輔導學生課餘數學活動的教師肯定有特別的參考價值。

不容否認，大部分文章較重於理論，對於站在第一線的數學教師而言，近乎“書生論政”而非一定切實可行。但我們應該看到一點，即是作為一個好的數學教師，除了有充實的數學專業知識，除了注意新的數學教學方法之外，還應該對數學教育的趨勢和潮流有所認識，對數學的本質有所了解，以識別各種教育改革的利弊。我們把這些文章收集在一起，是為了方便數學教師們翻閱，作參考之用；既集思廣益，亦不失獨立見解。同時，更希望藉此引起數學教師們交流經驗，將來可以讀到更多關於數學教學的文章。

《抖擻》雙月刊編輯委員會

1981年11月

目 錄

序 言	《抖擻》編輯委員會	
【1】 關於香港中學數學的教育改革	梁鑑添	1
〔原載《抖擻》1期(1974)頁36—41。〕		
【2】 “新數”是教育和哲學上的錯誤嗎？	René Thom	7
〔原載《抖擻》13期(1976)頁29—35。〕		
【3】 我們應該講授“新數”嗎？	J. A. Dieudonné	13
〔原載《抖擻》13期(1976)頁35—39。〕		
【4】 數學發展史給我們的啟發	蕭文強	18
〔原載《抖擻》17期(1976)頁46—53。〕		
【5】 香港中學數學課程的回顧與前瞻	梁鑑添	26
〔原載《抖擻》22期(1977)頁35—38。〕		
【6】 概率論是源於賭博嗎？	林建 蕭文強	30
〔原載《抖擻》25期(1978)頁16—21。〕		
【7】 中學數學現代化的一些問題	林文沾	36
〔原載《抖擻》28期(1978)頁41—45。〕		
【8】 香港中學的“合併數”和使用計算器的問題	梁鑑添	41
〔原載《抖擻》30期(1978)頁66—68。〕		
【9】 評論近二十年來中學數學課程改革	梁鑑添	44
〔原載《抖擻》38期(1980)頁64—75。〕		
【10】 對國內中學數學教學大綱的一些意見		
——兼談數學教育之目的	陳鳳潔 周錫昌 蕭文強	57
〔原載《抖擻》38期(1980)頁76—83。〕		

【11】	《中小學數學教學總觀分析報告書》簡介……………周錫昌	65
	〔原載《抖擻》39期（1980）頁77—85。〕	
【12】	一門與數學發展史有關的課程……………梁鑑添 蕭文強	74
	〔原載《抖擻》41期（1980）頁38—44。〕	
【13】	“1, 2, 3, ……以外”——一點數學普及工作的經驗……………	
	……………蕭文強 丁南僑	81
	〔原載《抖擻》42期（1981）頁69—74。〕	
【14】	談國內中學數學教學大綱（試行草案）及初中數學課本……勞國維	87
	〔原載《抖擻》43期（1981）頁71—76。〕	
【15】	數學教學上如何“古為今用”……………蕭文強	93
	〔原載《抖擻》44期（1981）頁70—73。〕	

關於香港中學數學的教育改革

梁鑑添*

在五十年代末期，歐美各地都先後發起了大規模的中小學數學教學改革運動，當時提出了很多改革口號：如（一）縮短在近十多年間，漸漸增加了的，中學數學和大學數學之間的距離；（二）現代化中小學的數學課程，以適應現代社會的需要；（三）減少死板的講學式授課方法，介入各種生動的啟發式數學方法；（四）徹底革新整個歐基里德幾何課程等等。這些純教育性的口號，不但放之四海皆準，而且在什麼時間提出，都會被認為是順理成章的。

如所週知，在西方國家裏，一切學術研究、教學改革等等的事務，都是非財不行的。那麼，當時西方政府和財團基金會，對這項教學改革的大量財政支持，是出於什麼動機呢？不善忘的人還會記得五十年代末期蘇聯人在太空事業的成功，那一連串的，舉世矚目的成功，對西方社會不是產生很大的沖擊嗎？那時候，西方的學者和教育界不是就掌握了這個時機，在六十年代裏，大大地擴張了大學教育和各項科學研究活動嗎？現在還在各地的中小學裏流行着所謂“新數”，也就是在那時候，動用了大量的資金和人力所產生的。

一襲國王的新衣

在香港的情況當然就不一樣了。雖然此地也不缺乏高思遠見之士，但本地政府和財團，都沒有撥款支持非生產性的學術或教育活動的習慣。可是這也難不倒本地以急求改革為己任，而且足智多謀的教育界先進者。他們急不及待地響應了西方改革家，援用了他們的改革口號，在未有足夠批判和考慮的情況下，套用了當時西方一般試用中的課程和辦法，在未必恰當的地方稍加修改，推出了一套中學的“新數”課本。另一方面，他們把現代數學神秘化，不但社會人士以為它是不可觸摸的，一般中小學教師也以為是高深莫測的東西。在官、商、學的支持之下，這套“百鳥歸巢”式的課本，就風靡一時。因其錯漏太多，教師們很快便對它失了信心。但是外來的“新數”課本，又因為語文或日常生活習慣都不適合本地的要求，所以這套本地的“新數”課本，就在教師們無可奈何之下，控制了香港的“新數”局面了。稍後面世的小學“新數”也因此沒有獲得一般教師的接納，所以在香港是小學“舊數”，中學

* 梁鑑添博士，任教於香港大學數學系

“新數”。根據最近政府教育司署的估計，大約有百分之七十左右的中學生在學“新數”，而只有極少數的小學生受到這個教學改革的影響。

“新數”就以這樣開始，而在香港也實行了差不多十年了。那麼“新數”在香港所得的效果是怎樣呢？無可否認，這項措施曾得過廣大的數學教師和關心教育人士的擁護。假如我們將數學教學改革正確地看成一個長期性的事務，則“新數”的推行，是產生過從靜止到活動的作用；這一記功勞是應該被肯定的。目前一般教師對課程和教材的關心，對數學和其他學科的關係的討論，“新數”也有它不可抹煞的功勞。比較具體一點，“新數”也確實地消除了在香港的一些數學教學上傳統性的弊漏。如以往那些不合理的英國貨幣、衡量的煩瑣運算，是不再會出現了。現在也再沒有人堅持把在代數、三角、幾何上極其複雜，而且應用很少的部份，包括在中學數學課程裏面了。

雖然“新數”的確解決了一些傳統性的問題，但它也帶來了更多的，程度更深的困難。在下文我們將對其中比較重要的加以討論。在香港，我們不難觀察到，在“新數”培育下的中學生，對數學理解而言達不到改革家的期望，對數學作為一種科學工具而言也不能滿足其他自然科學教師的要求。很多教師面對學生們日漸降低的數學能力而擔心，但是對這個已成僵局的“新數”局面還未有完善的對策。一些條件比較好的學校，採取了以“舊”補“新”的措施。這就是以“新數”為主導教材，適量地補充“舊數”（尤其是代數方面）的材料。可是要使“新”“舊”教材銜接起來，不是單方面的加插工夫可以辦得到的；所以實行這項措施的老師，不但感覺到選擇教材方面吃力，而且總不能相信這項緊急措施能消除旦夕之憂。在學生方面的嚴重性就更不待言了。也有一些學校完全放棄了“新數”回復教“舊數”去了；這個看來是比較消極，但和前者一樣都不失為苟安之計。在香港是這樣一片淒涼氣派，但在其他各地也不見得太好，據說在美國有一位先進的“新數”大學教授，早期擔任過某著名“新數”企業的頭子，當年意氣風發，自以為為人類創造了幸福。可是幾年之後，當他的兒子在中學身受這“幸福”之害時，他發覺大局已成、局面已經超越了他的控制範圍，無法挽救了。前年逝世時，雖然不是身敗名裂，但總難免飲恨終身。

有些憤世嫉俗的人把“新數”事件比作安徒生童話集裏的一個故事，說“新數”是二十世紀的一襲國王的新衣。

失在於制，不在於政

無可否認，香港“新數”的僵局，主要是課本所造成的。可是有人却要把大部份的責任推到教師，尤其是低年級教師的身上。他們說：未經正途訓練過的教師不能把“新數”傳授給學生，所以只要政府願意大搞各式各樣的師訓班，則所有問題都能迎刃而解了。當然，原則上師訓班是一件好事，但是當前問題卻不在教師，而是在教材。比較老實一點的人認為現存課本都大有等待改善的餘地，並且，經過改善了課本便能緩和現局，減輕教師和學生的負擔。不過在努力於改善課本的同時，而

不嚴格地審查“新數”的本質和其教育價值，恐怕也只是徒勞無功，解決不了基本問題。

“新數”的確是一個十分漂亮而具有吸引力的名稱，顧名思義，“新數”應該是新的數學。但是除了一些皮毛地涉及電子計算機的教材之外，其他“新數”的數學內容，最新的也有一百幾十年的年紀，最老的就有幾千年的高齡。所以“新數”的新是因為它是中學數學課程的一項新試驗，在本文的討論範圍裏，“新數”是指五十年代以後產生的，與傳統有所不同的中學數學課程。為求方便起見，傳統式的中學數學課程被稱作“舊數”。在“新數”的範疇裏，也有各家各門。門派之間也有學術上，商業上或權勢上的爭執。在下文我們列出幾個主流“新數”的主要特徵，加以討論。

基礎論 差不多所有“新數”課本都標榜着數學理論的結構，和這結構的嚴緊性。作者們看準了現代數學理論是通過集合論的語言，和理論邏輯的推理方法而展開的，所以他們就把這兩個項目看成爲整個數學課程的兩根支柱。他們認爲，中學生在學習數學之前，先要搞清楚了嚴格的邏輯推理方法，和熟習了集合論裏面的術語和符號運算。（因此一般社會人士常常把“新數”和集合論聯成一起，以爲非集合則不爲新了。）另一方面，他們又認爲嚴密性和準確性都不可被犧牲，所以在他們介紹集合論和理論邏輯時，就採取了正規化陣地戰的方式，動用了一大堆使剛從小學升級到中學的學生感覺到莫名其妙的定義。因爲這種教學法比較板滯，再加上學生們的數學經驗的貧乏，所以獲得的效果是十分使人失望的。學生們根本沒有摸索到學習的動機，也不知道這些晦澀的東西的用途；我們不難想像得到，他們在這個極端被動的學習狀態之下的困擾。

集合論在高等數學上，無可否認地是起了語言簡潔化，問題統一化，處理過程經濟化等等的作用。但是，把它放在最初級的課程裏，就像學英語先學文法再學字母一樣的滑稽了。同樣地，牽強地注入理論化了的推理方法，不但沒有鞏固了學生已有的認識，而是混亂了這些還是比較脆弱的認識，使學生面對具體問題時不知所措。

其實這種基礎論，不外是從大學數學課程上移植到中學課程上的一種風氣。即使在大學數學課程裏，有不少人已經對它存有懷疑了。

形式化 “新數”的另一個顯著的特徵是它的過度形式化。這個特徵，其實也是上述的基礎論的教育宗旨下的必然產品。在教學方法上形式化表現得尤其顯著。“新數”課本編著者們，對似嚴格、半準確的定義和數學名詞都有偏愛。我們試舉一個，不算是最極端的例子，如一個很簡單的一元一次方程式 $2x = 4$ 。

對這個很普通的課題，我們有一些合理的要求；我們要求學生在學習中，明瞭什麼是未知數，和明瞭方程是對未知數的一個條件。我們也要求學生盡快地掌握了解方程式的技術，並且要求他們能從具體情況列出方程式來。一個很自然而且很有效的方法，是通過具體實例作爲學習動機，介紹出有關的討論要點。例如我們可以引用，某物價從一月至六月漲了一倍；已知六月的物價是四元，求一月時的物價。通過幾個相似的例子和適量的習題，這個課題的目的都不難達到。

“新數”課本的作者却另有他們的一手；爲求引出一個絕無瑕疵（最少他們是認爲如是）的方程式的定義，他們不嫌其煩地拖出一連串的形式概念。首先是命題和其真值，再而是複雜命題的邏輯結構。更困難的一個概念是開命題，最後才能把開命題數學化作出方程式。根據這個方式， $2x = 4$ 只是一開命題，作爲一個開命題，它的真值是依持位者（*place holder*） x 的值而決定的。於是他們說：當 $x = 1$ 時，這個開命題就變成一個命題 $2 \times 1 = 4$ 了。這個命題的真值是負，所以 $x = 1$ 就不能是開命題 $2x = 4$ 的真集（*truth set*）中的一個元素。當 $x = 2$ 時，開命題 $2x = 4$ 變成命題 $2 \times 2 = 4$ ；而這個命題的值是正，所以 $x = 2$ 是在開命題 $2x = 4$ 的真集內。再進一步，他們指出單元集 $\{2\}$ 就是開命題（也就是方程式） $2x = 4$ 的解集（*solution set*）了。

對這種曲折而又間接的課文和教學法，我們總不免覺得它是不着實際和吹毛求疵。而其效果也很低。因爲在整個課程裏充滿了相似的定義鏈，所以在整理定義，介紹概念上要做的工夫，超過了做在操練基本數學技術的工夫。這樣做成了學生只會強記概念的定義，而不明白其本質，更談不上數學知識的應用。所以只看表面不理內涵的人，看過了課程大綱便以爲數學程度是提高了；這樣就中了“新數”的計。

系統論 無可否認，現代數學在理論上和應用上都有了很大的進展。但是將它向中學生吹噓成爲人類智慧最完善的理論系統，就太過份了。而且從這個構思出發，就會造成課程的凝固。其最顯著的表現，莫如在各個數系統的處理。本來初中代數應該是在小學的算術基礎上，推廣運算的應用，同時提高學生對運算的認識。在“新數”的課本裏，我們可以看到的，是各個數系統的逐一介紹：自然數系統，整數系統，有理數系統，實數系統，複數系統。在處理這些數系統時，它們的代數結構被看成學習的大前題。於是乎，就繁複地搬出，可換律，結合律，分配律等。

聞說某地也曾發生過這樣一個鬧劇。教師正在想通過問答的方式講授整數的加法。在課室有這樣一段對話。

教師說：“瑪莉，二加三是什麼？”

瑪莉：“二加三是五。”

教師說：“不對！約翰，二加三是什麼？”

約翰：“二加三是三加二。”

教師說：“對了！但是，爲什麼是這樣呢？”

瑪莉和約翰一齊說：“整數的加法是符合可換律的。”

通過各種運算規律的驗證，學生當然學不到在初中階段上有用的工夫。相反地他們可能會獲得了一個印象，以爲數學學習的過程是，先作出一個框框，然後把各種莫名其妙的東西填充上這個預先做好了框框裏面。這樣就完全地誤解了公義在處理數學結果的作用，把數學歪曲成一門必須通過“大胆假設，小心求證”的“治學法”來研究的學問。

上述三點是主流“新數”的幾個比較顯著而且影響較大的特徵。這都是沒有根據

香港的社會環境和需要，從外國人毫無批判地硬搬和模仿過來的。（我們以前不是多次吃過這樣的虧嗎？並且再吃虧的危險還存在着。）

概括地說：在六十年代的“新數”潮流下，香港的數學教學把理論放在實踐的前面；同時在濫用概念和教條主義的傾向之下，使數學嚴重地脫離了現實和應用。所以在這個不健全的制度下，單求師資訓練和課本修改，只是治標而不是治本的辦法。

大眾的願望

香港的中學生和教師所期望的是一個怎樣的數學課程呢？毫無異議，對課程的第一個要求是精簡。爲了提高學習效率，目前在繁重功課壓力下學習的中學生，他們的負擔應該適量地減輕。年來各科都有一個傾向，在提高程度，適應社會要求等的口號下，把課程逐年加重。結果學生們爲了應付考試，只有把錯綜複雜的教材勉強地記憶起來。這樣做成了危險的腦袋交通擠塞（有人把接近會考的學生的腦袋比作一個快要破裂，裝滿着各式各樣破爛雜物的殘舊塑膠手提包）。其實在現行的課程裏，可以刪去的材料是不少的。例如所有在低年級的集合論和數理邏輯、抽象代數的概念、繁雜得連在大學課程裏也難找到的代數式、三角式的運算和很多的整數論的材料等等。勾消了這樣的一大堆，就提供了重新安排主導內容很好的條件，只有依照一個精簡的課程，學生才能從容不迫地建立基本數學觀念，熟習其基本性質與應用。

數學課程不應該是整個學校課程裏面的一個獨立王國。歷史上，數學的發展是人類思想發展的一個重要環節。人類在生存鬥爭中，不斷地須要克服自然界和社會裏的困難；數學在這個鬥爭中產生，和長成，也是人類在這個鬥爭中的武器。近年來有人把數學吹噓成純理智的產物，把數學藝術化起來，千方百計地找尋其獨立存在的理論根據。這都和現實不大符合的。在中學數學課程裏，最初步的要求是，將數學和其他自然科學，社會科學加強聯繫起來，達成各學科的互利互助。其實不單只數學是學習其他科學的主要工具，其他科學還可以提供學習數學的動機和應用場所。直接或間接地提高學習興趣和鞏固對數學的觀念。更進一步學生應該通過學習數學，加強認識人類思想發展過程。近年有人在中學課程裏加插上幾個古今數學名家的畫像，個人歷史和他們的成就，使學生得到了一個不大正確的印象，以爲數學不是靠人類智慧的積累而是由幾個數學大家所創造的，而且以爲學數學是靠天份，而創造數學則非天才莫問。這種思想灌注真是大有問題。

既然要把數學貫徹到各個學科裏面，中學數學課程也要突出數學的特殊性。這就是確立空間、函數等基本數學觀念，並且兼顧到數學和個別學科互相聯結上的特殊性，務使學生對數學獲得健全的認識，並且在合理程度上熟練演繹推理和有意義的數學運算。（其實演繹推理能力和運算技巧，並不是互相排斥而是相輔相成的。）

結 語

教學改革是一項連綿不斷的事務，它是不能長久地停留在任何一個階段之中的。在每一個地方，每一個時候，教學都要根據當時、當地的客觀環境進行改革，六十年代的數學教學改革，已經完成了它的歷史任務。雖然從此時此地的觀點來判斷，它具有很多缺點，而且亦引起了一連串的不良後果；但是在那時、那地，它曾經扭轉了凝固了數十年的局面，所以對長久的改革事務它立了一個大功。在總結六十年代的數學教學改革的當時，我們亦有同時把改革再推前一步的任務。儘管現在還存在對進一步改革的阻力，但是一個新課程的創立，似乎是大勢所趨，人心所向。關心香港教育的人都希望這樣一個新課程能振作起年來漸趨頹廢的情緒，而且香港教師也有足夠的能力，在“新數”和“舊數”的教學經驗基礎上，取長補短，興利除弊，改弦易轍，創出一個新局面。

新數學課程的爭議

編者按：自從“新數”在中、小學課程出現以來，雖然大多數的教育工作者都關心到“新數”與“舊數”之間的選擇，教學方法，考試成績等問題，但是在理論水平上較為有見地的觀點論戰是甚為少見的。本期的兩篇譯文可算是一個罕見的激烈論戰的紀錄。第一篇原文先刊於法國的《*L'Age de la Science*》，後為《*American Scientist*》59卷譯載；第二篇原文則刊於後者第61卷。本刊譯文均譯自《*American Scientist*》。事隔數年，但其中的精湛論點還是受人注目的。

從充滿改革熱情和信心的六十年代，過渡到審慎和穩定的七十年代，數學課程改革在彌補前期的缺陷和吸取過去的經驗中，走上了新的道路。本刊編者希望這兩篇譯文能為讀者們提供一些關於數學認識論的資料。

原文作者都是當代著名的法國數學家。*R. Thom*以可微流型上的拓撲學的貢獻馳名於世。*J.A. Dieudonné*的數學研究範圍很廣，他也是舉足輕重的 *N. Bourbaki* 學派創始人之一。

“新數”是教育和哲學上的錯誤嗎？ René Thom

通俗作家把控制論和信息論，富有欺騙性地吹噓為現代技術的精華，促進未來科學知識發展的不可缺少的工具。所謂“新數”，已在我們大部分同輩的心中，攫取了介乎這二者之間的崇高地位。從另一個方向看，自中學課程現代化以來，許多家長因再沒有能力幫助他們的子女而擔憂。從他們的兒女的口語中，再聽不到古老而熟識的概念，面對着新的術語，一片茫然。部分家長感覺困惑，認為這是代溝的又一個象徵，因而對新的觀念採取阻撓的姿態。另外一部分，特別是教育界人士，則熱情地接受了新的課程、觀念與符號。我們應該怎麼辦？

重訂課程。 讓我們簡單地羅列課程的改革項目。

1. 新增的教材：(a) “初級”集論，符號如 $\emptyset, U, \cap, \subset$ ，集與集之間的映射，量詞等。最突出的地方是，今天集論已普遍地包含在幼稚園到中學最後一年的課程之內。稍後，我們再討論這一點。(b) 代數概念的展開：

集內的合成律；羣、環、域。(c) 較早地介紹了微積分的綱要，導數、不定積分，對數、指數等初等函數。

2. 刪掉的教材：傳統的歐幾里得幾何，尤其是平面幾何中內容複雜的部分。

總括起來，讀者將會察覺到中學課程因增加大量教材而改變。在大學教學中，犧牲幾何而強調代數的傾向，尤為明顯。

代數與幾何

刪掉傳統的歐幾里得幾何，是基於如下兩個論點。第一點是理論的：由 *Hilbert* 的《幾何學基礎》而來的公理化的工作，已證明了為大眾所公認的歐幾里得的《幾何原本》的嚴謹性，大部分只是幻覺；它其實經常地引用了直觀。其結果是迴避了歐幾里得幾何，代之以能夠嚴謹地闡述的代數學。第二點是現實的。經典平面幾何詳盡研究了既無用處又迂腐的三角形的性質。在一生之中，誰會用上了“*Simpson*

線”或者“九點圓”？

讓我們首先由實用的角度討論。有人以為，代數比幾何更有用處，更符合需要。我們無須否定線性代數或是部分多線性代數的概念在科學上的功能。但對於一般的交換代數，如多項式等等，我們就要小心。在日 常 的 生 活 中，誰有求解二次方程，或明確地運用環上模的概念的需要？代數的功能，並不如想像中的那麼大。至於微積分（上文〔c〕），則是論述古典物理學時不能缺少的。無疑地，在初等的水平上，運用代數能把事情簡化。憑“推理方法”去解答，一些像我們十二歲時所遇到過的“文字題”，是需要過人的機智，而代數方法則純粹是機械的。在這個問題上，代數能使我們少動腦筋是無可否認的。隨着情況變得複雜，代數的優點漸趨消失。*Descartes* 創造了解析幾何，爲了將幾何歸納爲代數。但是每一個曾經爲了在大學入學試數學科中得到優良成績而下過苦功的學生都熟悉這個事實：對於帶本質性的理論問題，解析方法優於幾何方法的論點，距離成爲定論還差很遠。

“現代化”。對於專業的數學家，把代數作爲證明命題的工具，是極爲重要的，甚至必須的。當代的數學家，深爲 *Bourbaki* 主張所影響，都有在中學、大學課程中加上代數理論、代數結構的自然傾向，因爲這些理論對於他們的工作甚爲有用，並且在今天的數學思維中佔有最重要的位置。可是還有理由提出這個問題：專家們所需要的，和他們的最新發現，應否放在中學課程之內？並不是只有數學家才屈從於這個誘惑。我讀了一些生物學的課本——初級的和高級的——裏面都把 *Watson* 和 *Crick* 的脫氧核糖核酸雙螺旋鍵和製造它的酶素機制，作爲肯定的科學事實加以論述。沒有一段時間的等待，新發明是不應該放進一般課程裏的。在法國，我們本當可以信賴中學監督機構，使課程能夠獲得必要的穩定。但是由於恐懼爲人們把真正的懷疑態度視爲年老的血管硬化症，這個機構不能起着它所應起的全部作用。話雖如此，課本是要改的，編輯也需要吃飯。

幾何學的問題。 課程裏教材的實用性

可能還不是關鍵的論點。讓我把“文化”——這唯一地不會被遺忘的東西——作爲過去年代的一個遺跡而置諸不理。有些人還堅持這個想法，即教學的目標之一是，作爲某種形式的選擇。換句話說，決定每個學生的自然傾向，使他們，尤其是資質過人的學生，能夠發展至最高的水平。我認爲，訓練的綱要，最低限度也要包括一些無用處的，無報酬的組成部份，否則這個任務是不能完成的。爲了要全面地考查學生的材幹，有必要促使他擔當一個積極的角色，喚起他個人的自發性及進取精神。在一個只包含“有用”部份的學習課程綱要裏，上述的措施是不能履行的。因爲有技術效能的教材是以教條方式講授，而成績優異是以教材的準確和快捷的記憶爲標誌。所以只有帶“遊戲”性質的課題才有教育價值。而在所有的遊戲之中，歐幾里得幾何經常的牽涉到對基礎部分的直觀理解，是最無報酬但是最富意義的。

遵循這條思想路線，目前以代數取代幾何的趨勢，是對教育有害的，應當扭轉過來。理由很簡單，我們只有幾何的難題而沒有代數的難題。一個所謂代數的難題只不過是個盲目地運用算術法則和模仿早已定型的程序的簡單練習。除了極少的特別例子，我們不能要求學生證明代數的定理，因爲若不是答案差不多明顯只需要直接將定義代入就可獲得，就是問題屬於理論代數的範疇，而它的解答超乎最聰明的學生的能力。稍爲誇大一點，我們可以說，任何代數的問題都是淺而易見的或者是不可以解答的。和它相反，古典的幾何問題，提供了各種不同難易程度的挑戰。

解答幾何問題需要時間、努力、精神集中及少數學生才有的聯想力。可能如翻譯拉丁文一樣，歐幾里得幾何是局限於優秀分子之內的既崇高又陳腐的練習之一，與普及教育相悖。若果真是如此，那麼課程中取消了幾何，就主要地變成爲一個社會問題，這個問題，我不想在這裏討論。儘管如此，若果希望廣泛地、過早而沒有經過足夠的啓發就講授代數結構，以代替幾何，使達到簡化學習數學的目的，其

錯誤是可悲的。

嚴謹性。 讓我轉到反對歐幾里得幾何，批評《幾何原本》中的公理體系因缺乏嚴謹性而有缺陷的問題。我們可以指出，首先是幾何課本很早以前就放棄了歐幾里得的累贅又難於理解的修辭方法。有些人殷切期望一本 *Hilbert* 的《幾何學基礎》的簡本可以替代了現存的一般幾何課本。因為工作極為複雜，致使希望成空，這是不會令人感到驚異的。面對這個爭論，在採取任何立場之前，都要回答下述的哲學問題：我們應當怎樣理解數學的嚴謹性？有三種可能的態度：（1）形式主義的觀點。在一個形式系統 S 裏，命題 P 是真的若果它能夠從 S 的公理開始，經過有限的， S 所允許的步驟演繹出來。（2）實在論者或柏拉圖觀點。如柏拉圖的理念，數學的實體，能夠脫離思維而獨立存在。命題 P 是真的如果它表達了實際上存在於各種理念之間的關係。即是說，它是高一層次的觀念，而且組織起一羣從屬於它的觀念。（3）經驗主義的或社會學的觀點。證法 P 是被認為嚴謹的假如它得到當時居領導地位的專家的批准。

在這三種態度之中，今天的數學家喜愛第一種。驟眼看來，它是最引人入勝的，它不會像第二種那樣導致本體論的困難，又不像第三種那樣模糊、模稜兩可。羅素說過“數學是門既永遠不知道我們說些什麼，又不知道所說的是真是假的學科。”不幸地，純粹的形式主義觀點是難於堅持的；說來很矛盾，這是基於形式上的理由。因為我們知道 *Gödel* 定理的有關算術形式化時所產生的困難。*Kreisel* 教授最近在他的文章中將形式主義的觀點審查。對我來說，我滿足於以下例子：假設我們能夠作出某一形式理論 S ，和一具能以驚人的速度把 S 中的基本步驟進行運算的電子計算機 M 。假設我們要驗證某一公式 F 的正確性，而 M 在幾秒鐘之內作出了 10^{30} 次基本運算之後，並且給予我們肯定的答覆。當然我們不能將每個步驟逐一加以驗證，那麼數學家們能毫不猶豫地接受“證明”的有效性麼？

數學的“意義”。 任何稍有知識分

子的誠實的數學家都會認識到，對每一個論證中所採用的符號，他都能夠加以解釋。由於這個原因，他的工作與理論物理學家的不同。後者許多時候毫不遲疑地信任盲目的形式，期望（經常被騙）隧道盡頭的曙光，能把在工作過程中的暗黑清除。

如果放棄了嚴謹的形式主義定義，我們必須在剩下來的兩種可能中選擇。其實數學家都應該基於他們的信仰，有勇氣去肯定數學的形式確是獨立於思考它的人腦而存在。這個存在，毫無疑問與外在世界的物質存在不同，但又是和它微妙地深刻地互相連繫着。如果數學是個隨意的遊戲，即大腦活動中的隨機產物，我們又怎樣解釋它在描述宇宙時的不可質疑的成就？數學不獨存在於神秘、有秩序的物理定律之中，而且較隱晦地，但同樣肯定地存在於生物與非生物形態的無限繼承，和這些形態的對稱形成與破壞之中。儘管它的外表缺乏說服力，這是為什麼柏拉圖的理念賦予宇宙以形象這個設想是最自然的，哲學上是最經濟的。

然而在任何指定的瞬息，數學家對理念的世界，只有一個不完整的，肢離的視覺。因此每一個論證，首要是一種新結構的揭露，它的本原，直至以理性連繫起來之前，是孤立地存在於人的直覺之中。在這個意義上，每個論證是個蘇格拉底式的經驗，要求這個論證的讀者重新創造某些心理上的過程，這些過程，是使不明顯的真理揭露出來所不可少的。而這些真理的要素早以不系統的形態蘊藏於讀者心中。在這個意義上，第二、三種觀點並無矛盾。理念的世界，不能一舉就披露出來，我們必須永久地不斷地在我們的意識中把它重新創造。

本體論觀點的反對者，如能反省下述的事實，倒不失為善策。在數學的歷史上，從未有因一人的錯誤，導致整個領域陷於歧道的事例。許多時候，數學在沒有意義和沒有趣味的理論的形式發展中迷失了方向。過去是這樣，今天也是這樣，將來肯定還是這樣。但沒有一個有重要性的錯誤不為人們立即發覺而混入結論之中。假如上述的一致性，與從心靈對那些永久的、無始無終的、概括的因素的鬥爭中所

產生的共通概念不相關連，我們又如何解釋上述的一致性？數學家對理念世界的存在充滿信心，無須過分憂慮形式程序的局限；同樣地，他也可以不再顧慮無矛盾性的問題。理由是理念的世界，無限地超越我們“技術的能力”。我們對定理真確性的信心可以在直觀之中找出最原始的理性依歸。用一種今天已被遺忘的語源來說：定理首先是視覺的對象。

沒有一個嚴格的“嚴謹性”定義，每個人必須自己決定。因此我們判斷一個論證是嚴謹的如果它為受過足夠的教育，並準備去理解它的全體讀者所接受。還有，說服別人的證據，是來自對每個引用的符號能夠明確地理解，使它們的組合能令讀者信服。從這個角度看，嚴謹性（或者它的對立——不精確性）主要是數學推理的“微觀”或“局部”性質。要判斷某一推理的思想路線是否有效，並不需要詳盡的公理結構或精細的概念機器，只要明白每一個牽涉在內的符號，能夠清楚了解它們怎樣組合起來就是了。

公理化的範圍及需要。 這樣的論點表示我們由公理化稍為後退一些。將理論形式化是指從理論的內容開始，先把這內容組織為直觀的“形態” T ，然後，給出一個符號與法則的集合，使由這些符號與法則所產生的形式系統 S 同構於形態 T ；同構 $S \rightarrow T$ 只不過是賦予 S 中每個符號 s 以某種意義，即是使 s 與 T 中某些直觀內容相對應（也就是邏輯學家所說的語意學上的體現）。我們能夠合理地期望，理論 T 的直觀內容，可以為 S 內的符號式完整地代替嗎？我們可以立即舉出自然語言作為例子。形式主義學派的語言學家付出很大氣力，嘗試把自然語言的文法與句法還原為公理。這樣做，他們達成一些形式的程序——再生性的、可變換的文法——從主體內句語的形式表達這一水平上看，它們的有效性是不可否認的。但是，如果把程序系統地歸納為一系列法則，然後盲目地跟隨這些法則直至到它們的邏輯結論，其結果是，所得的句語很快就變為又冗長又複雜，使它們失去了一切意義。我看不到有任何理由認為相同的現象不會在數學上發

生。把某一形式的機制外延至它再生能力的極限的時候，不需多久，所構成的公式又冗長又複雜，使它們的一切直觀解釋的可能都消失。這樣得來的“定理”，形式上可能是正確的，然而在語意學上是無意義的。因此對於某一給出的直觀理論 T ，我們必須準備幾種，不是一種，“局部”的公理化；每一種局部公理化 S 與形態 T 之間有一個接觸區域 Z_s ，在該區域裏， S 是有效的；但一當在 S 中所作的公式變為過長，或太繁時，可理解性立即消失。在接觸區域 Z_s 的邊界， S 與 Z_s 之間的語意聯系喪失了；這樣防止了以某種意義定義的同構 $S \rightarrow T$ 伸延至 Z_s 以外。一個形式系統 S 可以產生整個理論 T 的想法，先驗的說，正和地球是平的，或單以一個坐標系來覆蓋一個曲面的想法一樣不可能。更清楚地了解這個語意學上的失敗會是一個有趣的問題。下面，我們將看到一個觸目的例子，它指出當組合的法則與已符號化的實體的語意學上的含義不相容時，會發生什麼事情（這是 *Boole* 形式論應用於普通語言）。以數學來說，語意上的失敗，是以循序漸進的姿態，模糊的面貌出現的（例如集論裏的“超限數”理論）。

局部公理化的不可抹煞的優點是，它許多時候能把直觀上理解到的觀念變得精確，並且對數學家之間的溝通是最不能缺少的。由於各式樣的溝通工具，書面語或者是口語，應用了一維形態，致有需要把直觀形態 T （一般地定義於多維空間）化為一維符號的形式系統。在過去數年間，公理化作為系統化及發現新事物的工具得到很廣泛的重視。作為系統化的方法，它肯定是有效的；對於發現新事物，則令人懷疑。沒有新而有重要性的定理由 *Bourbaki*（它本身不是真正形式化了，因為 *Bourbaki* 應用了非形式的元語言）花在系統化上面的巨大努力中產生是個特徵。如果數學家參看 *Bourbaki*，他們通常在習題中（作者把具體的材料都放在習題裏）所找到的思想糧食，比在課文中的演繹部分為多。我們必須清楚地說明：公理化是專家的工作，除了在那些專門研究數學基礎的專業人士之中，在中學及大學的數學教學裏，