经典教材配套丛书

配套·高教社·吴传生《经济数学——概率论与数理统计（第二版）》

概率论与数理统计同步辅导与习题全解

（高教社·吴传生·第二版）

秦　衍　主编

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

经典教材配套丛书

配套·高教社·吴传生《经济数学——概率论与数理统计(第二版)》

概率论与数理统计
同步辅导与习题全解

秦 衍 主编

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计同步辅导与习题全解/秦衍主编. —上海：华东理工大学出版社，2012.5

ISBN 978-7-5628-3245-4

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①秦… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第038664号

经典教材配套丛书

概率论与数理统计同步辅导与习题全解

主　　编 / 秦　衍

责任编辑 / 郭　艳

责任校对 / 李　晔

出版发行 / 华东理工大学出版社

地　址：上海市梅陇路130号，200237

电　话：(021)64250306(营销部)　64252174(编辑部)

传　真：(021)64252707

网　址：press.ecust.edu.cn

印　　刷 / 常熟华顺印刷有限公司

开　　本 / 787 mm×1092 mm　1/16

印　　张 / 18

字　　数 / 489千字

版　　次 / 2012年5月第1版

印　　次 / 2012年5月第1次

书　　号 / ISBN 978-7-5628-3245-4/O·243

定　　价 / 36.00元

前言 PREFACE

为了帮助广大在校生和自学者学好概率论与数理统计这门课程，掌握这个有力的数学工具，我们总结在教学中积累的大量资料和汇集的考题，编写了这本配套吴传生主编的《经济数学——概率论与数理统计》同步辅导书。本书对原教材内容进行了归纳总结并逐章编写，对部分知识点做了有益的扩展延伸，对重点难点进行了剖析，对所有的习题进行了详尽的解答。每章包括：大纲要求、本章知识总结构图、本章基本内容、重点难点剖析及典型例题解析、习题全解、总习题全解、补充习题七个栏目。

大纲要求——符合国家教育部制定的《概率论与数理统计课程教学基本要求》，同时根据教学实践作了个别适当修改。

本章知识总结构图——将知识点有机地联系起来，从整体到细节呈现知识点之间的关系。

本章基本内容——按照既“由浅入深、系统全面、脉络清晰”，又“突出重点、简明扼要、详略得当”的理念，对内容和方法进行归纳总结。

重点难点剖析及典型例题解析——对每章的重点、难点内容进行具体分析，并通过具有代表性的典型例题的分析、求解，使抽象的知识变得具体。

习题全解、总习题全解——对每章的习题、总复习题均给出了详细解答，解答过程详细而具体，跳跃度很小，大部分题目在解答之前给出了“解题指导”。同时，对部分题目给出了两种或三种不同的解法，从不同的角度对同一个问题进行不同的求解，有利于知识的综合和交叉应用，从而使读者开阔视野，真正地锻炼数学思维，提高对知识掌握的熟练程度。

补充习题——在全面掌握基本知识与解答技巧的基础上，通过这部分的习题练习，巩固知识点，并考查对题目的掌握程度。

由于编者水平有限，书中错误和不当之处在所难免，还望各位专家、读者不吝赐教，斧正谬误，以期本书能及时进行修正并不断完善。

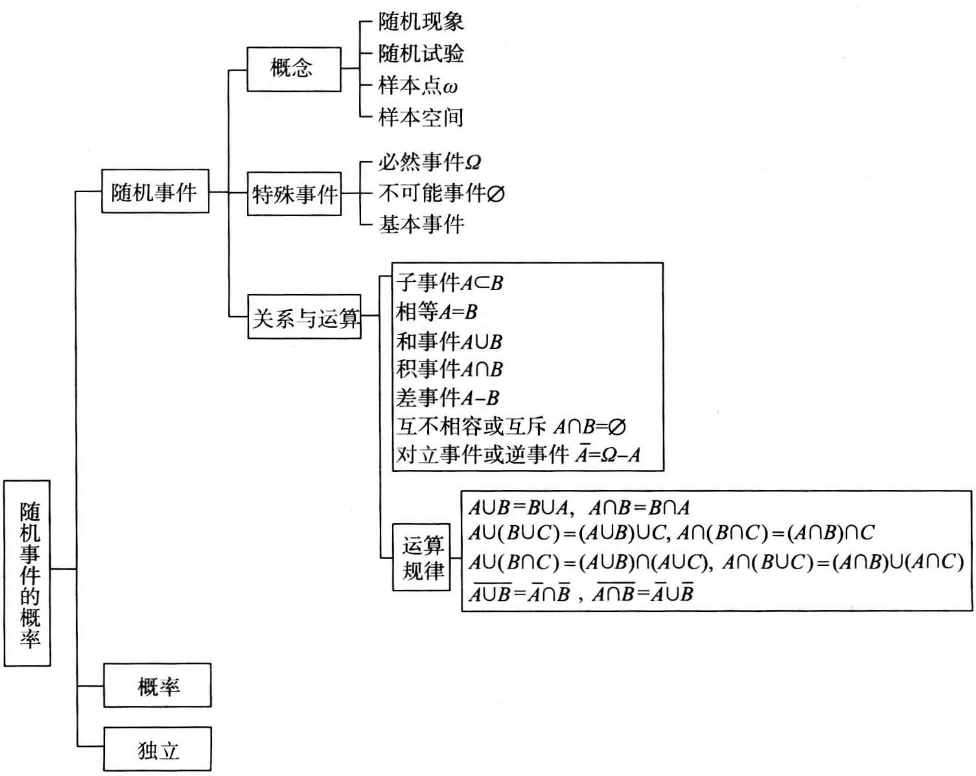
目录 CONTENTS

第1章 随机事件的概率

一、大纲要求

1. 了解随机现象与随机试验，了解样本空间的概念.
2. 理解随机事件的概念，掌握事件之间的关系及运算.
3. 了解概率、条件概率的概念，理解概率的基本性质.
4. 了解概率的古典定义，会计算简单的古典概率.
5. 掌握概率的加法定理、乘法定理、全概率公式和贝叶斯公式.
6. 理解事件的独立性概念.

二、本章知识总结构图



- 随机事件的概率
  - 随机事件
  - 概率
    - 概率的统计定义 — 频率 — $f_n(A)=\dfrac{A\text{出现的次数}n_A}{\text{总的试验次数}n}$
    - 概率的公理化定义 — 集合函数 $P(\cdot)$ 满足：
      - 非负性：$P(A)\geqslant 0$
      - 规范性：$P(\Omega)=1$
      - 可加性：设 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，则有 $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(A_n)$
    - 概率的古典定义 — $P(A)=\dfrac{A\text{中的样本点个数}k}{\Omega\text{中的样本点总数}n}=\dfrac{A\text{所包含的基本事件数}}{\Omega\text{中基本事件总数}}$
    - 概率的几何定义 — $P(A)=\dfrac{S(A)}{S(\Omega)}$，其中 $S(\cdot)$ 为几何度量
    - 条件概率 — $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$
    - 计算公式
      - 性质
        - $P(\varnothing)=0$
        - $0\leqslant P(A)\leqslant 1$
        - 若 $A_1,\cdots A_n$ 两两互不相容，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$
        - $P(\bar{A})=1-P(A)$
        - $P(B-A)=P(B)-P(AB)$，特别地，若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$
      - 加法公式
        - $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
        - $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$
      - 乘法公式
        - $P(AB)=P(A)P(B|A)$
        - $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$
      - 全概率公式 — $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$，其中 $B_1,\cdots,B_n$ 是样本空间的一个划分
      - 贝叶斯公式 — $P(B_i|A)=\dfrac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}$，其中 $B_1,\cdots,B_n$ 是样本空间的一个划分
  - 独立
    - 定义 — $P(AB)=P(A)P(B)$
    - 计算公式 — 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$，$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)$

三、本章基本内容

(一) 随机事件及其运算

表 1-1 基本概念

名称	定义	说明
随机现象	可以进行大量重复试验或观察，且结果呈现出某种规律性的不确定现象	
随机试验	试验的可能结果有多种，且能事先明确试验的所有可能结果，在试验之前不能确定何种结果将会发生的试验	一般要求满足：(1) 相同条件下可重复试验；(2) 试验的结果是可观察的；(3) 每次的试验结果是事先不可预知的
样本点	随机现象的每种可能的结果，记为 ω	
样本空间	由随机现象的所有结果(样本点)的全体构成，记为 Ω	
随机事件	由某些样本点 ω 构成的集合，即 Ω 的子集，记为 $A,B,\cdots$	随机事件一个可观察的特征
事件 A 发生	A 是一个事件，当且仅当试验中出现样本点 $\omega\in A$	
必然事件	所有样本点构成的集合，用 Ω 表示	试验中一定发生的事件

续　表

不可能事件	不包括任何样本点的空集，用$\varnothing$表示	试验中一定不发生的事件
基本事件	由一个样本点组成的单点集	

表 1-2　事件间的关系和运算

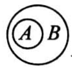
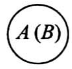
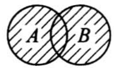
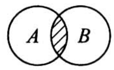
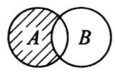
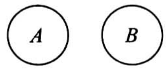
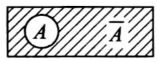
名称	定义	图例与说明
子事件	如果事件 A 发生，必然导致事件 B 发生，则称 A 是 B 的子事件，或称 B 包含了 A，记为 $A\subset B$	 一般有$\varnothing\subset A\subset\Omega$
事件的相等	若 $A\subset B$，$B\subset A$ 同时成立，此时 A 与 B 称为相等，记作 $A=B$	
和事件	"A 与 B 中至少有一事件发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的和事件，记作 $A\cup B$	
积事件	"A 与 B 同时发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的积事件，记作 $A\cap B$ 或 AB	
差事件	事件"A 发生而 B 不发生"称为事件 A 与事件 B 的差事件，记作 $A-B$	 $A-B=A-AB=A\overline{B}=A(\Omega-B)$
互不相容（互斥）	如果事件 A、B 不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则 A、B 称为互不相容	
对立事件（逆事件）	事件 A 不发生，即事件 $\Omega-A$ 称为事件 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$	 一般有 $\overline{A}=\Omega-A$，$\overline{\overline{A}}=A$，$A$、$B$ 互为对立事件当且仅当(1) $AB=\varnothing$；(2) $A+B=\Omega$
划分	设 Ω 为试验 E 的样本空间，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 E 的一组事件，若(1) $B_iB_j=\varnothing$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots,n$；(2) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=\Omega$，则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间的一个划分	

表 1-3　运算律

交换律	$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$
结合律	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
分配律	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
对偶律（德莫根公式）	$\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n$， $\overline{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\cdots\cup\overline{A}_n$

(二) 概率的定义及性质

表 1-4 概率

名称	定义
频率	在 n 次试验中，事件 A 发生的次数为 n_A，则称 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 在 n 次试验中发生的频率
概率的统计定义	在相同的条件下重复做 n 次试验，记 n 次试验中事件 A 发生的次数为 n_A，当试验次数 n 很大时，如果频率 $f_n(A)$ 趋于一个稳定值，则该稳定值就是随机事件 A 发生的概率，简单地说“概率是频率的稳定值”
概率的公理化定义	设 Ω 为一个样本空间，A 为其中的任一随机事件，实值集合函数 $P(A)$ 称为 Ω 中事件 A 的概率，如果它满足以下三个公理： 公理 1：(非负性) $P(A)\geqslant 0$； 公理 2：(规范性) $P(\Omega)=1$； 公理 3：(可列可加性)对于可列个互不相容的随机事件 $A_1,A_2,\cdots$ 有 $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(A_n)$
概率的古典定义	如果样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，其中 n 是有限数(有限性)，且 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 发生的机会相等(等概性)，即 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=\frac{1}{n}$，定义随机事件 A 的概率为 $P(A)=\frac{A\text{ 包含的样本点个数}}{\Omega\text{ 中样本点总数}}=\frac{A\text{ 包含的有利事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件总数}}=\frac{k}{n}$
概率的几何定义	如果样本空间 Ω 是某几何区域，该区域的“测度”(一维时指“长度”，二维时指“面积”等)为 $S(\Omega)(<\infty)$，假设任意一点落入测度相等的子区域(形状可以不同)是等可能的，以事件 A 表示 Ω 的某个子区域，$S(A)$ 为子区域 A 的测度，则事件 A 发生的概率定义为 $P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}$

表 1-5 概率的性质

不可能事件的概率	$P(\varnothing)=0$	
非负性	$0\leqslant P(A)\leqslant 1$	
有限可加性	如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$	对于任意事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$
对立事件的概率	$P(\overline{A})=1-P(A)$	
减法公式	$P(A-B)=P(A)-P(AB)$	如果 $B\subset A$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$
单调性	如果 $B\subset A$，则 $P(B)\leqslant P(A)$	
加法定理	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$	$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$

(三) 条件概率

表 1-6　条件概率

定义	若 $P(B)>0$,则 $P(A\|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 称为在事件 B 发生条件下,事件 A 发生的条件概率
性质	(1) 满足概率的三条公理: 公理 1:(非负性) $P(A\|B)\geqslant 0$; 公理 2:(规范性)$P(\Omega\|B)=1$; 公理 3:(可列可加性) 对于可列个互不相容的随机事件 $A_1,A_2,\cdots$有 $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \mid B) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n \mid B)$ (2) 满足概率的其他性质(见表 1-5)

表 1-7　乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式

乘法公式	两个事件	若 $P(A)>0$,则 $P(AB)=P(A)P(B\|A)$
	n 个事件	若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则 $P(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=P(A_1)P(A_2\|A_1)P(A_3\|A_1A_2)\cdots P(A_n\|A_1A_2\cdots A_{n-1})$
全概率公式	设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间的一个划分,若 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则对任一事件 A,有 $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$	
贝叶斯公式	设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间的一个划分,若 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,$P(A)>0$,则 $P(B_i\|A)=\dfrac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)}$	

(四) 独立性

表 1-8　独立性

名称	定义	性质
两个事件的相互独立	若 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称随机事件 A 与 B 相互独立	若事件 A 与 B 相互独立,则 A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立
有限个事件的相互独立	对于 n 个随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,若其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$个不同的事件都满足: $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$ 则称这 n 个随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立	若 n 个随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则将其中任何 $m(1\leqslant m\leqslant n)$个事件换成相应的对立事件,形成的 n 个新的事件仍相互独立

表 1-9　n个相互独立事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的和(积)的概率计算

和事件的概率	$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$
积事件的概率	$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)$ $=1-(1-P(A_1))(1-P(A_2))\cdots(1-P(A_n))$

四、重点难点剖析及典型例题解析

在概率论中要讨论的是随机事件的概率，因此我们需要研究这些事件间的关系和运算，以便能够通过简单事件(符号)来探求复杂事件，进而计算事件的概率. 学会用一组符号表述所讨论的事件是非常重要的. 读者不但要知道事件的并、交、差等定义及其运算规律，而且还要学会将复杂事件用简单事件的并、交、差等运算来表示.

例 1　设A,B,C表示三个事件，用A,B,C表示如下事件：

(1) A发生且B与C至少有一个发生；(2) A与B发生而C不发生；

(3) A,B,C中至少有两个发生；　(4) A,B,C中至多有两个发生；

(5) A,B,C中不多于一个发生；　(6) A,B,C中恰有一个发生.

【分析】　可以从事件的关系及其运算的定义入手，构建上述事件的表达式.

【解】　(1) 由于$B\cup C$表示B与C至少有一个发生，AB表示A与B同时发生，故答案为$A\cap(B\cup C)$；

(2) 同样由于A与B发生表示A和B同时发生，即AB发生，$\overline{C}$表示事件C发生的对立事件，即事件C不发生，故答案为$AB\overline{C}$；

(3) A,B,C中至少有两个发生，可以是AB，也可以是AC或BC，这三个事件至少有一个发生，因此答案是三个事件AB、AC、BC和事件，为$AB\cup BC\cup AC$；

(4) A,B,C中至多两个发生的逆事件为A、B、C都发生，即ABC发生，故答案为$\overline{ABC}$；

(5) A,B,C中不多于一个发生意味着没有两个或两个以上事件同时发生，它的逆事件为A,B,C中至少有两个发生，即本题的(3)，故答案为$\overline{AB\cup AC\cup BC}$；

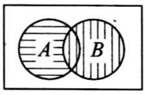
(6) 按照A,B,C发生的次序，依次有三个事件$A\overline{B}\,\overline{C}$，$\overline{A}B\overline{C}$，$\overline{A}\,\overline{B}C$，这三个事件的和事件就是“$A,B,C$中恰有一个发生”，故答案为$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

例 2　A,B是两个随机事件，则下列关系正确的是(　　).

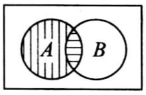
(A) $(A-B)+B=A$　(B) $AB+(A-B)=A$

(C) $(A+B)-B=A$　(D) $(AB+A)-B=A$

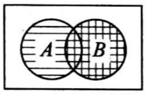
【分析】　事件(集合)运算与代数运算有较大的区别. 在事件运算中，和、差运算不能简单地正负抵消，事件的结合律和交换律只有在纯粹的并运算或纯粹的交运算中成立，不能随便去掉运算中的括号. 解决这类问题的关键在于正确理解事件运算的定义和性质，分析时可以借助文氏图. 注意到本题的四个选项的等式右边都是A，故分别给出四个选项左边的文氏图. 下图中横线表示选项左边的第一个事件，竖线表示选项左边的第二个事件，可见选项(A)的左边的运算结果为$A+B$，选项(C)为$A-B$，选项(D)也是$A-B$，而选项(B)的左边实际上等于$AB+A\overline{B}=A$.



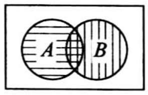
(A) 的文氏图



(B) 的文氏图



(C) 的文氏图



(D) 的文氏图

【答案】 选 B

利用概率的性质进行概率的运算是常见的题目．解题的关键是要理解基本概念，掌握运算公式．我们需要记住一些概率性质，例如对立事件的概率 $P(A)=1-P(\overline{A})$；概率的加法公式 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；概率的减法公式 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$等．

例 3　设 A,B 是随机事件，$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=$________．

【分析】 由对立事件的概率和事件的运算规律 $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{AB}$知，$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)$，注意到性质 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，于是有 $P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.4$，得到 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=0.6$．

【答案】 0.6．

例 4　设 A,B,C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$，试求 A,B,C 都不发生的概率．

【分析】 A,B,C 都不发生即为$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$，从题目的条件无法直接求出它的概率，因此我们只能考虑它的对立事件 $A\cup B\cup C$ 的概率计算．对于 $A\cup B\cup C$ 的概率计算，容易联想到加法定理，由于 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$，于是需要求 ABC 的概率，注意到 $P(AB)=0$，这个条件蕴含了 $P(ABC)=0$，这是因为 $ABC\subset AB$，利用概率的非负性及单调性知 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，从而可以计算 $A\cup B\cup C$ 的概率．

【解】 由于 $P(AB)=0$ 且 $ABC\subset AB$，故由概率的非负性及单调性知 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，从而 $P(ABC)=0$，再由加法公式，得

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{3}{4}-\frac{2}{16}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8},\end{aligned}$$

从而"A,B,C 都不发生"的概率为

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}.$$

【注】 从 $P(AB)=0$ 一般不能得出 $AB=\varnothing$．这里初学者一定要小心．

在古典概型的计算中，随机事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的样本点个数}}{\Omega\text{ 中样本点总数}}=\frac{A\text{ 包含的有利事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件总数}}=\frac{k}{n}$$

其中关于样本点个数的计数问题有很大的技巧性，例如常讨论的问题：从 n 个元素中抽取 r 个元素 $(1\leqslant r\leqslant n)$ 有多少种抽法？这就需要按每次抽取后是否放回以及所抽到的 r 个元素是否要考虑不同次序而分成四种情况：

样本点的计数	计序	不计序
放回	n^r	$\binom{n+r-1}{r}$
不放回	$n(n-1)\cdots(n-r+1)$	$\binom{n}{r}$

此外还要根据具体问题利用加法原理、乘法原理、排列、组合等方法来计数. 另外记住几个有用的模型也是必要的，例如摸球问题、超几何分布等.

例 5 （摸球问题）袋中有 a 只黑球，b 只白球，现把球一只一只摸出，求第 k 次摸出黑球的概率（$1\leqslant k\leqslant a+b$）.

【分析】 这是一个古典概率问题. 其抽样方式是不放回抽样，下面将根据黑白球是否各有区别可分为两种情况讨论.

①总数为 $a+b$ 个球中不仅区分黑白，而且黑球之间有差别，白球之间也有差别，即不放回且记序. 于是样本空间的基本事件总数为排列数 $(a+b)!$. 现在考虑“第 k 次摸出黑球”所含的基本事件数，把摸出的球按先后次序排成一行，形成如下形式

$$* * \cdots * \text{ 黑 } * \cdots *,$$

其中第 k 个位置要求是黑球，于是对该位置应该有 a 种选择，而一旦取定某黑球以后，余下的球可在 $a+b-1$ 个球中，利用排列数得到“第 k 次摸出黑球”所含的基本事件数为 $a\times(a+b-1)!$，接下来按照古典概率公式来计算.

②仅区分黑白，而黑球之间无差别，白球之间也无差别，即不记序不放回. 那么样本空间的基本事件总数为组合数 $\binom{a+b}{a}$. 而事件“第 k 次摸出黑球”所含的基本事件数，则要求第 k 个位置要求是黑球，再在余下的 $a+b-1$ 个位置中选择 $a-1$ 个位置放置黑球，即组合数 $\binom{a+b-1}{a-1}$，所求概率用古典概率公式来计算.

【解法 1】 设事件 A 表示“第 k 次摸出黑球”，得所求概率为

$$P(A)=\frac{a\times(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

【解法 2】 所求概率为

$$P(A)=\frac{\binom{a+b}{a}}{\binom{a+b-1}{a-1}}=\frac{a}{a+b}.$$

【注 1】 注意答案与 k 无关，这就说明不管 k 如何，可用 $k=1$ 时的结果来计算，该结论应记住.

【注 2】 本问题还有另外一种解法，用于 k 较小时的情况，下面以 $k=3$ 时情况①为例加以说明，设 A_i 为第 i 次抽到黑球，$i=1,2,3$，所求的是 A_3 的概率，先把事件 A_3 分解为 $A_1A_2A_3+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$，从而利用加法公式可有 $P(A_3)=P(A_1A_2A_3)+P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}A_2A_3)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$. 由于涉及不放回抽样，故独立性在此不适用，从而对交事件概率要用条件概率计算，例如 $P(A_1A_2A_3)=P(A_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)=\frac{a-2}{a+b-2}\times\frac{a-1}{a+b-1}\times\frac{a}{a+b}$，类似可得另外三式，把它们相加可得 $p=\frac{a}{a+b}$. 这里仅讨论了 $k=3$ 前面的各种可能. 但解法 1 中却讨论了 $k=3$ 的前后各种情况，表面上看似乎不同，但实际上用全概率公式后易知两者所得的结果是一样的.

例 6 某批产品中有 a 件次品，b 件正品，我们分别采用放回、不放回两种抽样方式从中抽取 n 件产品（$1\leqslant n\leqslant a+b$），问正好抽到 k 件次品（$0\leqslant k\leqslant a$）的概率为多少？

【分析】 对于放回抽样当然有计序和不计序之分，但在题目不明确时往往用计序法，故本题

样本空间的基本事件总数为$(a+b)^n$，为考虑"n 件产品恰有 k 件次品"的基本事件数，分两步：第一步是抽位置，用组合数$\binom{n}{k}$种；一旦位置取定为某一种后，再考虑正品与次品的各种放回计序结果为 a^kb^{n-k}，从而"n 件产品恰有 k 件次品"的基本事件数共有$\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$，把两个结果相除可得概率.

对于不放回抽样的情况，这里讨论不计序场合. 严格讲对正品之间不再区分，对次品之间也不再区分，因而用组合数计算.

【解】 设事件 A 表示"n 件产品恰有 k 件次品"，对于放回抽样的情况，有

$$P(A)=\binom{n}{k}\left(\frac{a}{a+b}\right)^k\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k}.$$

对于不放回抽样的情况，样本空间的基本事件总数为组合数$\binom{a+b}{n}$，k 件次品从 a 件次品中取，有$\binom{a}{k}$种方法，余下的从 b 件正品中取，有$\binom{b}{n-k}$种方法，从而"n 件产品恰有 k 件次品"的基本事件数共有$\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$，相除就得到要求的概率为

$$P(A)=\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}\bigg/\binom{a+b}{n}$$

【注 1】 有放回的结果称为二项分布，这是由于如记 $p=\frac{a}{a+b}$，$q=\frac{b}{a+b}$，则它与第二章中二项分布公式 $P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$是完全一样的.

【注 2】 不放回的结果常被称为超几何分布，它被广泛地应用于产品检查中. 实际使用中，常用图来帮助记忆，其中的文字形式亦可灵活改变(图 1－1). 而公式可记为正品抽正品、次品抽次品、总数抽总数.

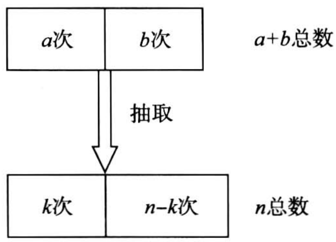


图 1－1

这种表示有利于不同形式下的概率公式的记忆. 例如若记 $a+b=N$，$a=M$，则

$$P(A)=\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}\bigg/\binom{N}{n},\quad k=1,2,\cdots,\min(n,M).$$

在几何概型中概率计算公式为

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{\text{区域 } A \text{ 的几何度量}}{\text{区域 } \Omega \text{ 的几何度量}}$$

例 7 将长为 a 的细棒折成三段，求这三段能构成三角形的概率.

【分析】 设三段长为 x,y,z，它们满足 $x+y+z=a$，$x>0,y>0,z>0$. 上述条件可简写为 $x>0,y>0,x+y<a$(由于 $z=a-x-y>0$). 所以，样本空间(图 1－2)为

$$\Omega=\{(x,y)\mid x>0,y>0,x+y<a\},$$

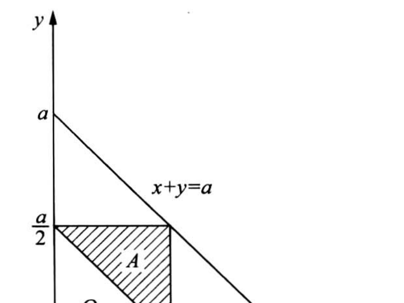


图 1－2

注意到三段长要构成一个三角形，必须满足，$x+y>z$，$y+z>x$，$x+z>y$，由于 $z=a-x-y$，上述条件等价于 $x+y>$

$a/2, x<a/2, y<a/2$.在图中给出满足这三个条件的区域A.

【解】 如图1-2所示,Ω对应的区域是一个直角边长为a的等腰直角三角形,故面积为$S(\Omega)=a^2/2$;又事件A表示"三段长能构成三角形",其对应的区域为图1-2中的阴影部分,面积为$S(A)=a^2/8$.因此,所求的概率为$P(A)=\dfrac{S(A)}{S(\Omega)}=\dfrac{a^2/8}{a^2/2}=\dfrac{1}{4}$.

在条件概率定义概率$P(A|B)$时,必先要求$P(B)\neq 0$.可以利用数学展开式$P(A|B)=P(AB)/P(B)$计算,也可以直接观察B的样本中A所占样本的个数,它与B的样本个数之比即为概率$P(A|B)$,要根据所讨论的问题具体分析.

例8 袋中装有a个黑球,b个白球,先后两次从袋中各取一球(不放回).

(1) 已知第一次取出的是黑球,求第二次取出的仍是黑球的概率;

(2) 已知第二次取出的是黑球,求第一次取出的也是黑球的概率;

(3) 已知取出的两个球中有一个是黑球,求另一个也是黑球的概率.

【分析】 问题(1)可以直接观察第二次取球时,白、黑球的个数来计算;问题(2)利用数学展开式$P(A_1|A_2)=P(A_1A_2)/P(A_2)$计算,其中$A_i$表示第$i$次取到黑球,$P(A_1A_2)$,$P(A_2)$可利用古典概率的方法计算;问题(3)取出的两个球中有一个是黑球就是取出的两个球中至少有一个是黑球,记为$A_1\cup A_2$,在取出的两个球中有一个是黑球的条件下,另一个也是黑球,即两个都是黑球,即利用数学展开式$P(A_1A_2|A_1\cup A_2)=P(A_1A_2)/P(A_1\cup A_2)$计算,可用加法定理计算$P(A_1\cup A_2)$.

【解】 设事件A_i表示"第i次取到的是黑球",$i=1,2$,则

(1) $P(A_2|A_1)=\dfrac{a-1}{a+b-1}$;

(2) $P(A_1|A_2)=P(A_1A_2)/P(A_2)=\dfrac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}\Big/\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{a-1}{a+b-1}$;

(3)
$$P(A_1A_2|A_1\cup A_2)=P(A_1A_2)/P(A_1\cup A_2)=P(A_1A_2)/(P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2))$$
$$=\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}\Big/\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+b}-\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}\right)=\frac{a-1}{a+2b-1}.$$

全概率公式适用于整体计算困难,但分开计算容易的场合.在全概率公式中,对于$B_1,B_2,\cdots,B_n$是一个划分,事件B_i的概率$P(B_i)$以及条件概率$P(A|B_i)(i=1,2,\cdots,n)$已知,则事件A发生的概率可以由$P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$求出.而贝叶斯公式(也称为逆概率公式)适用于条件概率正解不易而逆解容易的场合.它的已知条件与全概率公式一样,即事件B_i的概率$P(B_i)$以及条件概率$P(A|B_i)(i=1,2,\cdots,n)$已知,只是要求计算在事件A发生的条件下事件B_i发生的条件概率$P(B_i|A)$,贝叶斯公式为$P(B_i\mid A)=\dfrac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)}\ (i=1,2,\cdots,n)$.

例9 两台车床加工同样的零件,第一台出现废品的概率是0.03,第二台出现废品的概率是0.02.加工出来的零件放在一起,并且已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍.

(1) 求任意取出的零件是合格品的概率.

(2) 如果已知任意取出的零件是废品,求它是第二台车床加工的概率.

【分析】 取出的零件是合格品的概率无法直接计算,但是在取自第一台(或第二台)条件下的条件概率已知,且第一台、第二台生产的零件的概率可以利用第一台与第二台的比例计算,因此利用全概率公式可计算问题(1);而问题(2)讨论的是在取出零件是废品的条件下,它是第二台车床加工的条件概率,故用贝叶斯公式.