2013

全国硕士研究生入学考试辅导教材

陈殿友 主编

数学

清华大学出版社

http://www.tup.com.cn

陈殿友 主编

2013 全国硕士研究生入学考试辅导教材

数学

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是按照教育部制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”编写的2013年考研数学辅导教材，全书共分三部分.第一部分：高等数学；第二部分：线性代数；第三部分：概率论与数理统计.

本书按内容分块，每一块为一讲，在每讲中先讲基本理论，再讲典型例题，在每讲的后面配备了类型全面的习题，用以检查读者学习掌握知识的程度.

本书内容丰富适当，解题方法典型，习题全面新颖，适合于理工类和经管类所有准备参加硕士研究生入学考试的考生复习之用.

图书在版编目（CIP）数据

2013全国硕士研究生入学考试辅导教材.数学 / 陈殿友主编. --北京：清华大学出版社，2012.3
ISBN 978-7-302-28252-5

Ⅰ.①2… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①G643

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第034899号

责任编辑：佟丽霞
封面设计：常雪影
责任校对：赵丽敏
责任印制：杨 艳

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦A座 **邮 编**：100084
社 总 机：010-62770175 **邮 购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：清华大学印刷厂
装 订 者：北京国马印刷厂
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm **印 张**：33.75 **字 数**：812千字
版 次：2012年3月第1版 **印 次**：2012年3月第1次印刷
印 数：1～4000
定 价：48.00元

产品编号：046480-01

前　言

本书是为迎接2013年全国硕士研究生入学考试而编写的数学辅导教材.我们注意到，在准备考研的考生中，大家共同感到数学(包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计)是比较难复习的科目.从2003年起，教育部对硕士研究生入学考试进行了改革，考试科目数减少到4科，数学卷面总分为150分，加重了数学在研究生入学考试中(理工、经管类专业)的分量.因此，如何进行数学课程的复习成了所有考生十分关心的问题.为了帮助广大考生能在研究生入学考试中得到理想的分数，实现自己的梦想，我们编写了《2013全国硕士研究生入学考试辅导教材——数学》.

为了使读者获得良好的复习效果，我们在编写中贯彻了如下指导思想：

1. 严格按照教育部制定的"全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲"的要求编写.

2. 力争做到：跟踪命题走向，抓住出题者心理，研究考题思路，贴近考研题型.通过对辅导教材的学习，使考生达到事半功倍的效果.

根据上述指导思想编写的《2013全国硕士研究生入学考试辅导教材——数学》具有如下特色：

1. 本书融进了多年考研辅导班授课教师的授课经验和积累的丰富材料；

2. 本书通过对研究生入学考试知识点的精选总结和典型例题的深入分析，突出体现数学的思想、方法和技巧，使考生不但通过复习能够熟悉试题的类型，更能掌握解决问题的方法；

3. 本书深入地分析了历年来研究生入学考试数学试题的特点，从试题内容的分类和解决方法上进行了认真的研究，使得本书适合理工类和经管类的所有考生；

4. 本书在典型例题的编写中，对历年研究生入学数学试题都在例题的右上角用①②③④做了标注，用以表示是历年研究生入学考试数学一、二、三、四试卷中的试题(从2009年开始，数学三、四合并为数学三)；

5. 书后附有2011年和2012全国硕士研究生入学统一考试数学试题及参考答案，有利于考生对最新考试情况的了解.

参加本书编写的教师有白岩(高等数学)、张朝凤(行列式、矩阵、向量)、陈殿友(线性方程组、特征值与特征向量、二次型)、高彦伟、术洪亮(概率论与数理统计).清华大学出版社对本教材的编辑和出版工作给予了大力支持，在此表示感谢.

由于时间比较仓促，书中的疏漏和不妥，敬请读者不吝赐教.

编　者

2012年3月

目　　录

第一部分　高等数学

根据工学、经济学、管理学各学科和专业对硕士研究生入学所应具备的数学知识和能力的要求，我国硕士研究生入学考试数学统考试卷分为数学一、数学二和数学三. 高等数学是数学一、数学二和数学三的考试科目之一. 在数学一试卷中高等数学内容约占 56%，在数学二试卷中高等数学内容约占 78%，在数学三试卷中高等数学内容约占 56%.

第一讲　函数、极限与连续

本讲要点：1. 函数的概念及函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性；
2. 反函数及复合函数、分段函数、初等函数；
3. 极限的概念、无穷小和无穷大；
4. 极限的性质和运算法则；
5. 极限存在的两个准则、两个重要极限；
6. 无穷小的比较；
7. 洛必达法则；
8. 函数的连续性与间断点；
9. 连续函数的性质和初等函数的连续性；
10. 闭区间上连续函数的性质.

一、内容提要

1. 极限

1）极限的定义

（1）数列极限　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^+$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

（2）函数极限

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

仔细区分，又有 $f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，$f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 等.

（3）重要关系　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

(4) 海涅(Heine)定理　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$对满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$x_n\neq x_0$ 的任何$\{x_n\}$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

2) 极限的性质和运算法则

(1) 有界性　若$\{x_n\}$收敛，则$\{x_n\}$有界.

若$\lim f(x)=A$，则存在$\mathring{U}$，在$\mathring{U}$内$f(x)$有界(对于$x\to x_0$，$\mathring{U}$表示$0<|x-x_0|<\delta$；对于$x\to\infty$，$\mathring{U}$表示$|x|>X$).

(2) 保号性　若$\lim f(x)=A>B$，则存在$\mathring{U}$，在$\mathring{U}$内$f(x)>B$.

推论　若存在$\mathring{U}$，在$\mathring{U}$内$f(x)\geqslant B$，且$\lim f(x)=A$，则$A\geqslant B$.

(3) 极限的四则运算法则　设$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$；$\lim[f(x)g(x)]=AB$；$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq0)$.

设$\lim f(x)$存在，$\lim g(x)$不存在，则$\lim[f(x)\pm g(x)]$不存在.

(4) 复合函数的极限　设$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且$\exists\,\delta>0$，当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时，$\varphi(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]\xlongequal{u=\varphi(x)}\lim_{u\to u_0}f(u)=A\text{(称为变量代换法)}.$$

3) 极限存在的两个准则、重要极限

(1) 单调有界原理　若数列$\{x_n\}$单调增加(减少)且有上界M(下界m)，则$\{x_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant M(\geqslant m)$.

(2) 夹逼准则　设三个数列满足$u_n\leqslant x_n\leqslant v_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}v_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

夹逼定理对于函数极限也成立.

(3) 两个重要极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e},\quad\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},\quad\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

2. 无穷小和无穷大(以$x\to x_0$为例)

1) 无穷小和无穷大的定义

(1) 无穷小　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，称$f(x)$为$x\to x_0$时的无穷小.

(2) 无穷大　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty\Leftrightarrow\forall M>0,\exists\,\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)|\geqslant M$.

仔细区分，又有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$等.

(3) 无穷小与极限的关系

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),\quad\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

(4) 无穷小与无穷大的关系

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0;\quad\lim_{x\to x_0}f(x)=0,\text{且 }f(x)\neq0\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty.$$

2) 无穷小和无穷大的运算性质

(1) 有限个无穷小的和、差、积也是无穷小.

(2) 无穷小与有界函数的积是无穷小.

(3) 设$\lim f(x)=+\infty$,$\lim g(x)=+\infty$,则$\lim[f(x)+g(x)]=+\infty$.

设 $\lim f(x)=-\infty$,$\lim g(x)=-\infty$,则$\lim[f(x)+g(x)]=-\infty$.

3) 无穷小的比较

(1) 无穷小的比较　设$\lim\alpha=\lim\beta=0$,且 $\alpha\neq0$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小(或$\alpha$是比$\beta$低阶的无穷小),记作 $\beta=o(\alpha)$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq0$,称$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小;当$c=1$时,称$\beta$与$\alpha$是等价无穷小,记作$\beta\sim\alpha$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq0(k>0)$,称$\beta$是$\alpha$的$k$阶无穷小.

(2) 重要的等价无穷小　当 $x\to0$ 时,

$$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad \arcsin x\sim x,$$

$$\arctan x\sim x,\quad a^x-1\sim x\ln a\ (a>0,\ a\neq1),\quad e^x-1\sim x,$$

$$\ln(1+x)\sim x,\quad (1+x)^m-1\sim mx.$$

(3) 求积、商的极限时的等价无穷小代换

设在同一极限过程中 $\alpha(x)\sim\alpha'(x)$,$\beta(x)\sim\beta'(x)$且$\lim\dfrac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}f(x)$存在(或为$\infty$),则

$$\lim\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}f(x)=\lim\frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)}f(x).$$

4) 洛必达法则

(1) $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$ 设①$\lim f(x)=\lim g(x)=0$; ②$f(x)$和 $g(x)$在 $\mathring{U}$ 内可导,且$g'(x)\neq0$;

③$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或为$\infty$). 则$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(2) $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$ 洛必达法则对$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限($\lim f(x)=\lim g(x)=\infty$)也成立.

3. 函数的连续性

1) 连续与间断

(1) $f(x)$在点 x_0 连续$\Leftrightarrow$①$f(x)$在 $U(x_0)$内有定义; ②$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在; ③$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

(2) $f(x)$在点 x_0 左连续$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$.

$f(x)$在点 x_0 右连续$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.

$f(x)$在点 x_0 连续$\Leftrightarrow f(x)$在点 x_0 左连续且右连续.

(3) $f(x)$在开区间(a,b)内连续$\Leftrightarrow f(x)$在(a,b)内每一点都连续.

$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续$\Leftrightarrow f(x)$在(a,b)内连续,且$f(a^+)=f(a),f(b^-)=f(b)$.

(4) 间断点分类

设x_0是$f(x)$的间断点,若$f(x_0^-)=f(x_0^+)$,则x_0为可去间断点,若$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$,则x_0为跳跃间断点.可去间断点和跳跃间断点统称为第一类间断点.

不是第一类间断点的间断点称为第二类间断点,包括无穷间断点、振荡间断点等.

2) 连续函数的运算

(1) 设$f(x),g(x)$在点x_0连续,则$f(x)\pm g(x),f(x)g(x),\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$都在点$x_0$连续.

(2) 连续函数的反函数是连续函数.

(3) 连续函数的复合函数是连续函数.

(4) 一切初等函数在其定义区间内都连续.

3) 闭区间上连续函数的性质

设$f(x)$在$[a,b]$上连续,则

(1)(有界性定理) $f(x)$在$[a,b]$上有界.

(2)(最值定理) $\exists \xi_1,\xi_2\in[a,b]$,使

$$f(\xi_1)=M=\max_{x\in[a,b]}f(x),\quad f(\xi_2)=m=\min_{x\in[a,b]}f(x).$$

(3)(介值定理) $\forall \mu:m\leqslant\mu\leqslant M,\exists \xi\in[a,b]$,使$f(\xi)=\mu$.

(4)(零点定理) 若$f(a)f(b)<0$,则$\exists \xi\in(a,b)$,使$f(\xi)=0$.

二、典型例题

【例 1】 选择题

(1)[①] 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=(\quad)$.

(A) 1 (B) e (C) e^{a-b} (D) e^{b-a}

(2)[③] 若$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1$,则$a$等于$(\quad)$.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(3) 当$x\to 0$时,变量$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$是$(\quad)$.

(A) 无穷小 (B) 无穷大

(C) 有界的,但不是无穷小 (D) 无界的,但不是无穷大

(4)[③④] 函数$f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$在区间$(\quad)$内有界.

(A) $(-1,0)$ (B) $(0,1)$ (C) $(1,2)$ (D) $(2,3)$

(5) 设函数$f(x)=x\tan x e^{\sin x}$,则$f(x)$是$(\quad)$.

(A) 偶函数 (B) 无界函数

(C) 周期函数 (D) 单调函数

(6)[3] 设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ (　　).

(A) 存在且等于零　　(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在　　(D) 不一定存在

(7) 当 $x\to1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限(　　).

(A) 等于 2　　(B) 等于 0

(C) 为 ∞　　(D) 不存在但不为 ∞

(8) 设 $x\to0$ 时，$(1+\sin x)^x-1$ 是比 $x\tan x^n$ 低阶的无穷小，而 $x\tan x^n$ 是比 $(e^{\sin^2x}-1)\ln(1+x^2)$ 低阶的无穷小，则正整数 n 等于(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

(9)[1][2] 把 $x\to0^+$ 时的无穷小 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\,dt$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是(　　).

(A) α,β,γ　　(B) α,γ,β　　(C) β,α,γ　　(D) β,γ,α

(10)[2] 设 $y=y(x)$ 是二阶线性常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to0$ 时，函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限(　　).

(A) 不存在　　(B) 等于 1　　(C) 等于 2　　(D) 等于 3

(11) 设 $0<a<b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=$(　　).

(A) a　　(B) a^{-1}　　(C) b　　(D) b^{-1}

(12) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则(　　).

(A) $a=-1,b=-4$　　(B) $a=1,b=4$

(C) $a=1,b=-4$　　(D) $a=-1,b=4$

(13) 设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则(　　).

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

(14) 设 $a\neq\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$(　　).

(A) $\dfrac{1}{1-2a}$　　(B) $1-2a$　　(C) $\dfrac{1}{1+2a}$　　(D) $1+2a$

(15) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为(　　).

(A) 不存在间断点　　(B) 存在间断点 $x=1$

(C) 存在间断点 $x=0$　　(D) 存在间断点 $x=-1$

(16) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有意义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 (　　).

(A) $x=0$ 是 $g(x)$ 的第一类间断点

(B) $x=0$ 是 $g(x)$ 的第二类间断点

(C) $x=0$ 是 $g(x)$ 的连续点

(D) $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

(17)[②] 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(18)[③] 设 $f(x)=\ln^{10}x,g(x)=x,h(x)=e^{\frac{x}{10}}$,则当 x 充分大时有(　　).

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$　　(B) $h(x)<g(x)<f(x)$

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$　　(D) $g(x)<f(x)<h(x)$

(19) 设 $x\to 0$ 时,$ax^2+bx+c-\cos x$ 是比 x^2 高阶的无穷小,其中 a,b,c 为常数,则(　　).

(A) $a=\dfrac{1}{2},b=0,c=1$　　(B) $a=-\dfrac{1}{2},b=0,c=0$

(C) $a=-\dfrac{1}{2},b=0,c=1$　　(D) $a=\dfrac{1}{2},b=0,c=0$

(20) 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数,且 $f'(0)$ 存在,则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$(　　).

(A) 在 $x=0$ 处左极限不存在　　(B) 在 $x=0$ 处右极限不存在

(C) 有跳跃间断点 $x=0$　　(D) 有可去间断点 $x=0$

【解】 (1) 应选(C).

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{x^2-(x-a)(x+b)}{(x-a)(x+b)}\right]^x.$$

因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2-bx^2+abx}{(x-a)(x+b)}=a-b,$$

所以

$$\text{原式}=e^{a-b}.$$

(2) 应选(C). 因为

$$1=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x}+\lim_{x\to 0}ae^x=-1+a$$

所以 $a=2$.

(3) 应选(D). 本题关键在于弄清无穷大与无界变量之间的区别,无界变量不一定是无穷大. 如果取数列 $x_n^{(1)}=\dfrac{1}{n\pi},x_n^{(2)}=\dfrac{1}{\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi},n=1,2,\cdots$,则

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n^{(1)})=\lim_{n\to\infty}(n\pi)^2\sin n\pi=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n^{(2)})=\lim_{n\to\infty}\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi=+\infty,$$

表明当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 无界但不是无穷大.

(4) 应选(A). 本题中 $x=0,x=1,x=2$ 是 $f(x)$ 的间断点,其中 $x=1,x=2$ 是无穷间断点,故 $f(x)$ 在 $x=1,x=2$ 的邻域内无界;而 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点,$x=-1$ 是 $f(x)$ 的

连续点，故 $f(x)$在$(-1,0)$内有界.

(5) 应选(B). 由于$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}x\tan xe^{\sin x}=\infty$，则 $f(x)$无界.

(6) 应选(D). 由题设知 $0\leqslant f(x)-\varphi(x)\leqslant g(x)-\varphi(x)$，再由$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$ 及夹逼准则，有$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$. 从而$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在与否取决于$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$是否存在.

(7) 应选(D). 对于$\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{1}{x-1}}$，应考虑左、右极限，而

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=0,\quad \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty.$$

(8) 应选(B). 当 $x\to0$ 时，$(1+\sin x)^x-1\sim e^{x\ln(1+\sin x)}-1\sim x\sin x\sim x^2$，$(e^{\sin^2x}-1)\ln(1+x^2)\sim\sin^2x\cdot x^2\sim x^4$. 而 $x\tan x^n\sim x^{n+1}$. 因此 $2<n+1<4\Rightarrow n=2$.

(9) 应选(B). 分别求出 α,β,γ 关于 x 的阶数，由洛必达法则得

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2}{1}=1\Rightarrow\alpha\text{ 是 }x\text{ 的一阶无穷小},$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\beta}{x^k}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t}{x^k}=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan\sqrt{x^2}\cdot2x}{kx^{k-1}}$$

$$=\frac{2}{k}\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x}{x^{k-2}}\xlongequal{\text{取 }k-2=1}\frac{2}{3}\Rightarrow\beta\text{ 是 }x\text{ 的三阶无穷小},$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\gamma}{x^k}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t}{x^k}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{kx^{k-1}}$$

$$=\frac{1}{2k}\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{x^{k-1}}=\frac{1}{2k}\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^{k-2}}\xlongequal{\text{取 }k=2}\frac{1}{4}\Rightarrow\gamma\text{ 是 }x\text{ 的二阶无穷小}.$$

(10) 应选(C). 不需要解微分方程，条件只是变相地告诉我们 $y''(0)=1$，从而

$$\lim_{x\to0}=\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{y(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{y'(x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{\frac{y'(x)-y'(0)}{x-0}}=\lim_{x\to0}\frac{2}{y''(0)}$$

$$=2.$$

(11) 应选(B). 因为

$$\lim_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left[a^{-n}\left(1+\frac{b^{-n}}{a^{-n}}\right)\right]^{\frac{1}{n}}=a^{-1}\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}=a^{-1}.$$

(12) 应选(C).

由$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，$\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$，有$\lim\limits_{x\to0}(e^x-a)=0$，故 $1-a=0$，$a=1$.

又因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}(\cos x-b)=5,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}(\cos x-b)=1-b=5,\quad 得\quad b=-4.$$

故 $a=1,b=-4$.

(13) 应选(D).

(A)、(B)显然不对,因为由数列极限的不等式性质只能得出数列"当 n 充分大时"的情况,不可能得出"对任意 n 成立"的性质.(C)不对,因为"$0\cdot\infty$"是未定式,极限可能存在也可能不存在,故应选(D).

(14) 应选(A). 由于

$$\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n=n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right],$$

利用等价无穷小代换,有

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}.$$

(15) 应选(B).

$$由\ f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}0, & x\leqslant -1,\\ 1+x, & -1<x<1,\\ 1, & x=1,\\ 0 & x>1,\end{cases}$$

可知 $x=1$ 为间断点.

(16) 应选(D).

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,所以

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}f\left(\frac{1}{x}\right)\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to\infty}f(t)=a.$$

又因为

$$g(0)=0,$$

故 $a=0$ 时,$g(x)$在 $x=0$ 处连续;$a\neq 0$ 时,$g(x)$在 $x=0$ 处不连续.

(17) 应选(B).

$f(x)$有间断点 $x=0,\pm 1$.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}},$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1,\quad \lim_{x\to 0^-}f(x)=-1.$$

所以 $x=0$ 为第一类间断点.

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$,所以 $x=1$ 为可去间断点.

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\infty.$$

(18) 应选(C). 本题考查当 $x\to+\infty$时,比较趋于无穷的速度.

(19) 应选(C).

由题意得 $$\lim_{x\to 0}(ax^2+bx+c-\cos x)=0,$$

得 $c=1$. 又因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=0$$

所以 $b=0, a=-\frac{1}{2}$. 故选(C).

也可以这样考虑. 由麦克劳林公式有

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2),\quad x\to 0,$$

于是

$$ax^2+bx+c-\cos x=(c-1)+bx+\left(a+\frac{1}{2}\right)x^2+o(x^2).$$

因此, $a=-\frac{1}{2}, b=0, c=1$. 故选(C).

(20) 应选(D). 因为 $f(x)$ 是奇函数, 有 $f(0)=0$, 所以

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0),$$

故 $x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点.

【例 2】 填空题

(1) 设 $\forall x, f(x)+2f(1-x)=x^2-2x$, 则 $f(x)=$________.

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, 则 $f(x)=$________.

(3) 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}, f[\varphi(x)]=1-x$, 且 $\varphi(x)\geqslant 0$, 则 $\varphi(x)=$________.

(4) 数列极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=$________.

(5) $[x]$ 表示取小于等于 x 的最大整数, 则 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\frac{2}{x}\right]=$________.

(6) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=$________.

(7) $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)=$________.

(8) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=$________.

(9) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$, 则 $a=$________, $b=$________.

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right]=$________.

(11) 设函数 $f(x)=a^x(a>0, a\neq 1)$, 则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

(12) $\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=$________.

(13) 设当 $x\to 0$ 时, $F(x)=\int_0^{x-\sin x}\ln(1+t)\mathrm{d}t$ 是 x^n 的同阶无穷小, 则 $n=$________.

(14) 设函数 $f(x)$在 $x=1$ 连续，且 $f(1)=1$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln[2+f(x^{\frac{1}{x}})]=$________.

(15) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\ln(1+2x)}{x}+b, & x>0,\\ a, & x=0,\\ \dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________，$b=$________.

(16) 设 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$有无穷间断点 $x=0$ 及可去间断点 $x=1$，则 $a=$________，$b=1$.

(17) 设 $f(x)$在 $x=0$ 处可导，$f(0)=0$，且 $f'(0)=b$，若函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，则常数 $A=$________.

【解】 (1) 应填$\frac{1}{3}(x^2+2x-2)$. 由已知式有 $f(1-t)+2f(t)=(1-t)^2-2(1-t)=t^2-1$，即 $2f(x)+f(1-x)=x^2-1$. 与已知式联立，消去 $f(1-x)$可解得 $f(x)$.

(2) 应填 $x-1$. 注意到$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ 为常数，记 $a=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=x+2a$. 两边积分，得

$$a=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x+2a)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+2a.$$

解上式得 $a=-\frac{1}{2}$，故 $f(x)=x+2\left(-\frac{1}{2}\right)=x-1$.

(3) 应填$\sqrt{\ln(1-x)}$. 因为 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$，故 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$.

(4) 应填 2. 将求数列的极限转化为求函数的极限.

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot 2x}{1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2x\cdot\frac{1}{x}=2.$$

注意到，当 $x\to+\infty$时，$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x}$.

(5) 应填 2.

$\frac{2}{x}-1\leqslant\left[\frac{2}{x}\right]\leqslant\frac{2}{x}$，因此，

$$\text{当 } x>0 \text{ 时，}\quad 2-x<x\left[\frac{2}{x}\right]\leqslant 2,$$

$$\text{当 } x<0 \text{ 时，}\quad 2-x>x\left[\frac{2}{x}\right]\geqslant 2,$$

又$\lim\limits_{x\to 0}(2-x)=2$，于是$\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{2}{x}\right]=2$.

(6) 应填-1.

$$原式=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{xe^{-\frac{1}{x}}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1.$$

(7) 应填-50.

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to-\infty}\frac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{100}{-\sqrt{1+100x^{-2}}-1}\\&=\frac{100}{-1-1}=-50.\end{aligned}$$

(8) 应填 0.

$$原式=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}}=0.$$

(9) 应填 $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$.

方法 1　用泰勒公式.

$$\begin{aligned}\ln(1+x)=(ax+bx^2)&=\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-(ax+bx^2)\\&=(1-a)x-\left(\frac{1}{2}+b\right)x^2+o(x^2),\end{aligned}$$

由题设条件有

$$\begin{cases}1-a=0,\\-\left(\dfrac{1}{2}+b\right)=2.\end{cases}$$

由此 $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$.

方法 2　用洛必达法则

$$原式左边=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-a-2bx}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)-(a+2b)x-2bx^2}{2x(1+x)}=2.$$

从有 $1-a=0,-\dfrac{a+2b}{2}=2,\Rightarrow a=1,b=-\dfrac{5}{2}$.

(10) 应填$\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i\pi}{n}}.$$

由定积分定义有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i\pi}{n}}&=\int_0^1\sqrt{1+\cos\pi x}\,dx=\int_0^1\sqrt{2\cos^2\frac{\pi x}{2}}\,dx\\&=\sqrt{2}\int_0^1\cos\frac{\pi x}{2}\,dx=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.\end{aligned}$$

(11) 应填$\dfrac{1}{2}\ln a$.