■於道 著

有限群的局部性

——对群结构的影响

南京大学出版社

有限群的局部性
——对群结构的影响

■於 遒 著

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

有限群的局部性：对群结构的影响 / 於遒著. 一 南京：南京大学出版社，2012.1

ISBN 978-7-305-09556-6

Ⅰ. ①有… Ⅱ. ①於… Ⅲ. ①有限群一研究 Ⅳ. ①O152.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 001152 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　编 210093
网　　址 http://www.NjupCo.com
出 版 人 左　健

丛 书 名
书　　名 有限群的局部性——对群结构的影响
著　　者 於　遒
责任编辑 惠　雪　　编辑热线 025-83594087

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 南京人民印刷厂
开　　本 787×1092 1/16 印张 12.5 字数 300 千
版　　次 2012 年 1 月第 1 版 2012 年 1 月第 1 次印刷
印　　数 1000
ISBN 978-7-305-09556-6
定　　价 37.00 元

发行热线 025-83594756 83686452
电子邮箱 Press@NjupCo.com
Sales@NjupCo.com(市场部)

前　言

就代数研究方法而言，研究给定代数系统及其之间变换（如：群的正规子群可看成对群的内自同构都保持不变的子群），以及研究引申的相关代数（子）系统（如第12章的集合及获取新集合的几类方法）及其元素性质的再弱化而产生的新概念（如本书中所提到的一系列定义），一直是抽象代数产生新思想、新研究领域的源泉之一。而对于抽象代数系统的研究，往往可以通过作用的思想与表示理论等，在抽象的代数系统与“具体”的代数系统之间建立联系，从而达到研究的目的。由于具体的代数系统能为研究对象提供形象的、直观的、具体的模型，因此，对具体的代数系统的研究可以大大推进我们对代数结构的认识。

置换群和典型群作为常见的两类不同的拓扑群[1]，分别是关于置换的复合运算和可逆矩阵的乘法形成系统，它们都具有具体化的特征。当然，对于对称群 S_n，其生成元集为 $\{(1,2),(1,3),\cdots,(1,n)\}$，如果将其与矩阵集 $\{E_{12},E_{13},\cdots,E_{1n}\}$ 建立一一对应关系，不难发现，S_n 可同构嵌入 $GL(n,F)$，从这个意义上讲，通过 Cayley 定理，有限群的研究可纳入典型群的范畴[2]。此外，根据 1938 年 R. Frucht 的文献[3]中的定理：对于任意给定的抽象群都存在一个图以它为自同构群，所以，研究典型群及其自同构群对于有限群具有重要意义。

事实上，从有限群的发展来看，显然遵循以下研究逻辑：首先从具体的群着手，然后逐步走向抽象。其研究方法是先对具体的置换群（Cayley 定理）与典型群（群表示理论）进行研究，并随着抽象研究的不断深入，发展出多种研究方法，如群的局部化特征方法，几何的和组合的方法[4]以及广泛运用的群系理论方法[5]等。

针对研究方法而言，本书是有限群局部化研究方法的一个实例。全书从程序性知识的角度，对研究有限群局部性问题进行了系统的归纳和总结。

群的概念源于19世纪30年代 Galois 证明有理系数多项式——$P_n(x)$，$n\geqslant 5$ 时无有限形式的根表达式，此后，包括有限群在内，群的概念得到进一步发展，其研究也逐步从舍弃元素的具体内容转向抽象系统的研究。群理论的研究可以归结为三个主要方面：群结构的一般研究、群表示研究以及 Galois 理论。由于群概念和理论的普适性，因此广泛运用于编码理论、晶相理论及动力系统等领域，同时也极大地推动几何学的发展。

在有限群的研究过程中，群的结构的研究占有重要地位，而用群的各类子群描述群的特征则具有方法论的意义，显然，子群及其性质是群重要的局部特征，因此，所谓有限群的局部性问题是指利用有限群的子群及其性质，讨论其对有限群构造影响的问题，如利用子群的局部性质研究有限群的可解性、超可解性、幂零性是群论中的一个重要内容，特别地，利用群 G 的某些特殊子群，如极大子群、极小子群、Sylow 子群、Sylow 子群的极大子群、Sylow 子群的 2-极大子群、4 阶循环子群等满足某些特性的子群，甚至群系的上根等来判断群的可解性、超可解性、幂零性，方法有效，结果丰富。

众所周知，在有限群的研究过程中，正规子群是群论中一个极其重要的概念，多年来，人们围绕这个概念从两个方面进行扩展。

第一个方面是对正规子群施加更多的限制，例如一个正规子群可看做对群 G 的所有内自同构都保持不变的子群，在这个方向上提出两个更强的概念：若 H 对群 G 的所有自同构都保持不变，称群 G 的子群 H 为 G 的特征子群；若 H 对群 G 的所有自同态都保持不变，称群 G 的子群 H 为 G 的全不变子群。

第二个方面是对正规子群或其具有的性质减弱某些限制。在对正规子群具有的性质减弱方面，国内外群论专家已经引进比正规性更弱的一些定义，如拟正规性（置换子群）、s-拟正规性、半正规性（半置换子群）、s-半正规性（s-半置换子群）、苏-半正规性、c-正规性、弱 c-正规性、s-正规性、s^*-拟正规性、条件置换、完全条件置换、c^*-正规子群、弱 s-置换嵌入子群、Φ-补子群等。事实上，如何用较弱的条件刻画群的结构，即用群的各类子群描述群的特征，不仅具有方法论上的意义，而且还是目前研究的一个新热点。归纳地讲，该方向至少有两个子方向：一是可补子群方向；二是可置换子群方向。其中，可补子群方向考虑补子群的特殊性，又可以分为一般型、对偶性和商群型，分别如第 3 章的 c-正规子群、第 2 章的 Φ-补子群、第 5 章的 $\mathfrak{J}$-s-补子群；而可置换子群方向考虑补子群的特殊性，又可以分为一般型和共轭型，分别如第 7 章的 s-半置换子群和第 8 章的完全条件置换，当然也存在两者交叉的内容，被称为综合型，如第 6 章的 c^*-正规子群和弱 s-置换嵌入子群。特别需要指出的是，利用文献[5]覆盖子群等研究有限群的超可解性与幂零性，其批处理的方法独立于上述分类思想。

基于上述分类思想，本书选取具有典型意义的定义和定理进行陈述和诠释。

第 1 章前三节给出有限群的基本概念与性质，第四节阐述有限群局部性问题，具体包括：有限群局部性问题的由来以及研究范围的界定、研究子方向、研究中出现的概念以及它们之间的联系，并从程序性知识的角度，对所研究的问题类型进行分类。

第 2 章给出补子群方向对偶型的一个实例：Φ-补子群。首先引进 Φ-可补定义，在给出 Φ-可补的两个实例后，考察了该定义与其他一些概念之间的关系，并给出 Φ-可补的性质，此后，利用 Sylow 子群的极大子群以及 p^2, p^3 阶子群的 Φ-可补性，研究群为 p-幂零、可解群和超可解的条件以及一个群是 $\mathfrak{J}$-群及超可解群的一系列判别准则。

第 3 章介绍补子群方向一般型中极具经典意义的一个实例：c-正规子群，在给出 c-正规子群定义及性质后，分别选取几类特殊的子群，包括极大性子群、极小性子群、Sylow 对象等，利用它们的 c-正规性，讨论了其对有限群可解性、超可解性以及幂零性的影响，第四节讨论了属于局部群系的 c-正规性的条件。

第 4 章讨论苏-半正规子群，其引入的意义主要表现在两个方面：一是概念的经典性以及研究方法的代表性；二是苏-半正规子群与第 2 章 Φ-补子群在概念上实现某种对偶。其中，研究方法的代表性是将“苏-半正规”与第 3 章不同的概念“c-正规子群”相结合，即通过用“苏-半正规或 c-正规”代替许多定理中的“苏-半正规”或“c-正规”，实现有限群结构研究方法上的统一。

第 5 章介绍补子群方向商群型一个实例：$\mathfrak{J}$-s-补子群。在构造子群的 $\mathfrak{J}$-s-补的概念后，利用子群的极大子群，2-极大子群等重要 Sylow 对象的 p-幂零 s-补、超可解 s-补，对 p-幂零群、超可解群的结构进行广泛研究。此外还结合群系理论，利用群的 p-阶子群、p^2-阶子群、p^3-阶子群等准素子群的 $\mathfrak{J}$-s-可补性质，对 p-幂零群进行详细描述。

第 6 章选取补子群方向的其他一些具有代表性的概念，包括弱 c-正规子群、群的 $\mathfrak{J}$-z-补、综合型的 c^*-正规子群和弱 s-置换嵌入子群，利用这些有限群的局部特征，探讨了它们对

有限群结构的影响。

第 7 章围绕可置换子群方向一般型的代表概念：s-半置换子群展开论述，主要包括 s-半置换性与饱和群系的一些结果以及 s-半置换子群对有限群可解性、超可解性和幂零性的影响，其中在研究超可解性中，系统整理了 s-半置换与其他置换类子群的关系，包括正规、拟正规、s-拟正规、半置换与苏-半正规等。

第 8 章考虑置换子群方向的共轭型的一个概念：完全条件置换子群。在讨论基本概念与性质后，重点利用群系的有关理论，揭示了有限群的完全条件置换性，具体包括：群的上根的准数子群的完全条件置换性；与子群相关的准数子群与群的群系结构；利用 Sylow 对象的完全条件置换性讨论群的超可解性。

第 9 章选取置换子群方向的其他一些具有代表性的概念和结果，包括色 s-拟正规、s^*-拟正规性、s-半置换子群、条件置换子群。通过利用这些有限群的局部性特征，探讨了它们对有限群结构的影响。

第 10 章讨论了 π-闭-Sylow 塔群类。在介绍 π-闭-Sylow 塔群类为 π-局部的饱和群系和 Fitting 类后，利用上述有关局部性概念，包括有限群的 c-正规性、弱 c-正规性和 s-拟正规性，讨论了它们对 π-闭-Sylow 塔群的结构的影响。另外还讨论了 π-闭-Sylow 塔群与 π-超可解群、可解群的关系。

第 11 章是某些专题的集合，如 Fitting 类的模性、典型群上的结果等。

第 12 章给出了集合论观点下的几个数学结构的刻画，包括序结构、代数结构、拓扑结构、微分结构，并利用范畴的范式给出常见数学系统的描述。

由于有限群局部性的发展较快，发表论文较多，因此难以做到全面介绍，有兴趣的读者可参考相关文献进行细致研究。

感谢在本书完成过程中给予作者帮助、支持，包括同意引用文献的前辈、同仁。感谢导师郭文彬教授、王登银教授多年来的指导；感谢董晓波教授、李长稳副教授、查明明副教授、缪龙教授、唐娜老师、高金星老师、张雪梅老师、张新建博士、李宝军博士的帮助；感谢石国亮教授从编辑的角度指点本书的撰写；感谢缪恬、杨家帅、李发前、吴大鹏、施桂清、王舒畅等同学在本书录入和校对方面给予的合作。特别要感谢我的爱人罗海霞和女儿於若含为我创造了美好的家庭氛围，这是我一直在研究道路上不断前行的动力和源泉。尤其是我爱人罗海霞，冬天天冷，她坐在被窝里帮我完成了最后的组稿和录入工作，这让我感觉到无比的欣慰。

由于作者水平有限，尽管已努力，但疏漏仍然难免，敬请读者指正。

编　者

目　录

第 1 章　有限群的基本概念及性质

本书内容考虑的群都是有限群。为叙述方便，本章前三节主要介绍本书中常见的一些符号、概念和性质，最后一节给出有限群局部性质中的若干概念以及它们之间的联系。需要说明的是本书中未指出的符号请参见文献[5—7]。

1.1　符号与基本概念

1.1.1　常见符号约定

设 $\mathcal{P}$ 为全体素数集合，p 表示某个素数，p' 表示不等于 p 的所有素数的集合，即 $p'=\mathcal{P}\backslash\{p\}$；用 π 表示某一非空的素数集合，π' 表示 π 在所给素数集合 $\mathcal{P}$ 中的补集。符号 $\pi(n)$ 表示自然数 n 的所有素因子的集合；自然数 n 称为 π-数（πd-数），如果 $\pi(n)\subseteq\pi$（相应地，$\pi(n)\cap\pi\neq\varnothing$）。用 n_π 表示能整除 n，并且素因子全是在 π 中的最大整数。

设 G 为群，用 $|G|$ 表示群 G 的阶，$|G:H|$ 表示子群 H 在群 G 中的指数，$\pi(G)$ 表示 $\pi(|G|)$；一个群称为 π-群（πd-群），如果它的阶是 π-数（πd-数）；$H\leqslant G$ 表示 H 是群 G 的子群，$H<G$ 表示 H 是群 G 的真子群，$N\trianglelefteq G$ 表示 N 是群 G 的正规子群，$N\trianglelefteq\trianglelefteq G$ 表示 N 是群 G 的次正规子群，N char G 表示 N 是群 G 的特征子群，$M<\cdot G$ 表示 M 是群 G 的极大子群，$N\cdot\trianglelefteq G$ 表示 N 是群 G 的极小正规子群；子群 G_π 称为 G 的 Hall π-子群，如果 $|G_\pi|$ 为 π-数，且 $|G:G_\pi|$ 为 π'-数；一个子群称为 Hall 子群，若对某个素数集合 π，它是 p-Hall 子群，显然，所有 Sylow 子群均为 Hall 子群。用 G_p 表示群 G 的 Sylow p-子群；如果 G 中有一个 Hall π-子群，称 $G\in E_\pi$；如果 G 中任意两个 Hall π-子群在 G 中共轭，称 $G\in C_\pi$；如果 $G\in C_\pi$ 且每一个 π-子群都包含在群 G 的某个 Hall π-子群中，称 $G\in D_\pi$；如果群 G 的阶是某个素数 p 的方幂，称群 G 为准素群。

用 H_G 表示子群 H 在群 G 中的核，它是包含在 H 中的群 G 的最大正规子群，显然 $H_G=\bigcap_{g\in G}H^g$；$O_p(G)$ 表示群 G 的最大正规 p-子群，$O_\pi(G)$ 表示群 G 的最大正规 π-子群；$F_p(G)$ 表示群 G 的最大正规 p-幂零子群，$F_\pi(G)$ 表示群 G 的最大正规 π-幂零子群，$F(G)$ 表示群 G 的 Fitting 子群，即 G 的最大正规幂零子群，它是 G 的所有幂零正规子群的乘积，$\Phi(G)$ 表示群 G 的 Frattini 子群，即群 G 的所有极大子群的交。

设 n 为正整数，A_n 表示 n 次交错群。$GL(n,R)$ 表示 R 上 n 阶一般线性群，$SL(n,R)$ 表示 R 上 n 阶特殊线性群；$Aut(G)$ 表示群 G 的自同构群，$Inn(G)$ 表示群 G 的内自同构群。

设 G 为群，$g\in G$，H,K 分别为 G 的子群。用 $\langle g\rangle$ 表示由元素 g 生成的循环群，$N_G(H)$ 表示 H 在 G 中的正规化子，$C_G(H)$ 表示 H 在 G 中的中心化子。若 $g_1,g_2\in G$，定义 g_1 与 g_2 的换位子 $[g_1,g_2]$ 为 $g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$，$G'=\langle[g_1,g_2]\rangle$ 为 G 的换位子群；定义 $[H,K]$ 为由元素 $[x,y]$ 生成的 G 的子群，其中，$x\in H$，$y\in K$，$[H]K$ 表示正规子群 H 和子群 K 的半直积。

1.1.2 基本定义

定义 1.1.1 设 A,B 为两个集合，如果通过一个法则 φ，对于 A 中每一个元 a 都有 B 中唯一的元 b 与之对应，则称 φ 是 A 到 B 的一个**映射**，并记为 $\varphi:A\to B$。此时称 b 为 a 在 φ 作用下的**像**，记为 $b=\varphi(a)$，a 称为 b 在 φ 下的一个**逆像**（或**原像**）。

假设 f 为 A 到 B 的一个映射，则

(1) 如果 $a\neq b$ 时，有 $f(a)\neq f(b)$，$\forall a,b\in A$，称 f 是 A 到 B 的一个**单射**；

(2) 如果对于任意 $b\in B$，都存在 $a\in A$，使 $f(a)=b$，称 f 为 A 到 B 上的一个**满射**；

(3) 若一个映射 f 既是单射又是满射，称 f 为**一一映射**。

定义 1.1.2 群 G 到群 H 的一个映射 $\varphi:G\to H$ 称为**同态映射**，如果 $\forall g_1,g_2\in G$，$\varphi(g_1g_2)=\varphi(g_1)\cdot\varphi(g_2)$。

同态映射 $\varphi:G\to H$ 在不同条件下可称为：

(1) 如果 φ 是满射，则为**满同态映射**；

(2) 如果 φ 是单射，则为**单同态映射**；

(3) 如果 φ 是一一映射，则为**同构映射**；

(4) 如果 $G=H$ 且 φ 为同构映射，则为**自同构映射**。

如果存在群 G 到群 H 的一个同构映射，则称这两个群**同构**，并记为 $G\cong H$。

定义 1.1.3 群列

$$1=G_0\subseteq G_1\subseteq\cdots\subseteq G_{t-1}\subseteq G_t=G \tag{1}$$

称为**正规群列**，如果对于任意 $i=1,2,\cdots,t-1$ 总有 $G_i\lhd G$；正规群列的因子称为**正规因子**。正规群列（式(1)）称为群 G 的**主群列**，如果对于任意 $i=1,2,\cdots,t$，满足下列条件：$G_i\neq G_{i-1}$，且如果 $G_{i-1}\subseteq T\subseteq G_i$ 以及 $T\lhd G$，那么 $T\in\{G_i,G_{i-1}\}$，此时，主群列的因子称为**主因子**。

定义 1.1.4 G 为群，令 $Z_0(G)=1$，$Z_1(G)=Z(G)$，递归定义

$$Z_{k+1}(G)/Z_k(G)=Z(G/Z_k(G))。$$

显然 $Z_i(G)$ char G，则称下面群列

$$1=Z_0(G)\leqslant Z_1(G)\leqslant Z_2(G)\leqslant\cdots$$

为群 G 的**上中心列**。

定义 1.1.5 令 $K_1(G)=G$，$K_2(G)=[K_1(G),G]=[G,G]$，归纳定义

$$K_n(G)=[K_{n-1}(G),G]。$$

显然 $K_i(G)$ char G。称下面群列

$$G=K_1(G)\geqslant K_2(G)\geqslant\cdots$$

为群 G 的**下中心列**。

定义 1.1.6 若 G 和 H 为给定的群，φ 是 H 到 $Aut(G)$ 内的一个同态映射，称映射 φ 为 H 在 G 上的一个**作用**。

定义 1.1.7 设 φ 为 H 在 G 上的一个作用，$K\leqslant G$，如果对于 $h\in H$，有 $K^{\varphi(h)}\subseteq K$，称 K 为 **H-不变的**。

定义 1.1.8 设 φ 为 H 在 G 上的一个作用，如果 G 中存在非平凡的 H-不变子群，称作用 φ 为**可约的**，否则称 φ 为**不可约的**。

定义 1.1.9 如果群 H 为群 G 的一个子群的同态像，称群 H 为群 G 的一个**截断**。

定义 1.1.10　如果群 G 含有一个循环正规子群使得对应的商群循环，称群 G 为**亚循环群**；如果群 G 含有一个交换正规子群使得对应的商群交换，称群 G 为**亚交换群**。

定义 1.1.11　如果群 G 的任意子群的商群都不同构于四次交错群 A_4，称 G 是 **A_4-自由的**。

1.2　有限群的可解性、超可解性与幂零性

1.2.1　有限群的可解性

定义 1.2.1　如果群 G 的每个非交换主因子都是 p'-群，群 G 是 **p-可解的**；如果对于所有素数 $p\in\pi$，群 G 是 p-可解的，群 G 是 **π-可解的**；如果对于所有素数 p，群 G 是 p-可解的，群 G 是**可解的**。

性质 1.2.1　设 $K\lhd G$ 且子群 K 与 G/K 都为 p-可解群，则群 G 也为 p-可解群。

性质 1.2.2　p-可解群的子群和商群都为 p-可解群。

性质 1.2.3　设 A,B 为群 G 的正规 p-可解子群，则其积 AB 也是 p-可解的。

定理 1.2.1　设 G 为 π-可解群，则 G 至少有一个可解的 Hall π-子群 G_π，且对于 G 的任意 π-子群 A 可找到一个元素 $x\in G$ 使得 $x^{-1}Ax\subseteq G_\pi$。特别地，任意两个 Hall π-子群在 G 中共轭。

定理 1.2.2　设 G 为 π-可解群，那么 G 至少有一个 Hall π'-子群 $G_{\pi'}$，且对于 G 的任意 π'-子群 A 存在 $x\in G$，使得 $x^{-1}Ax\subseteq G_{\pi'}$。特别地，任意两个 Hall π'-子群在 G 中共轭。

定理 1.2.3　设 G 为可解群，π 为任意非空的素数的集合，那么在 G 中至少有一个 π-Hall 子群 G_π，且对于任意 G 的 π-子群 A，存在 $x\in G$，使 $x^{-1}Ax\subseteq G_\pi$。特别地，任两个 π-Hall 子群共轭。

定理 1.2.4　设 G 为 p-可解的 pd-群，且 M,T 为 G 的两个极大子群，则下列结论成立：

(1) $|G:M|$ 或为 p'-数或为 p-数；

(2) 如果 $M_G=P_G$，且 $|G:M|$ 和 $|G:T|$ 都为 p-数，则 $M=T^x$，对于某 $x\in G$；

(3) 在 G 中存在这样的极大子群，它在 G 中的指数为 p-数。

定理 1.2.5　设 G 为可解群，则下列结论成立：

(1) 群 G 的任意极大子群在 G 中的指数为某素数的幂；

(2) 对于每个 $|G|$ 的素因数 p，在 G 中存在指数为 p 的幂的极大子群；

(3) 如果 M,T 为 G 的极大子群，且 $M_G=T_G$ 则 M 与 T 在 G 中共轭。

定理 1.2.6　设 G 为 p-可解群，则 $C_G(F_p(G))\subseteq F_p(G)$。

定理 1.2.7　设 G 为可解群，则 $C_G(F(G))\subseteq F(G)$。

定理 1.2.8　设群 G 有次正规列

$$1=G_0\subseteq G_1\subseteq\cdots\subseteq G_t=G,$$

这里对于任意 $i\in\{1,\cdots,t\}$ 有 G_i/G_{i-1} 或为交换群或为 p'-群，则群 G 是 p-可解的。

定理 1.2.9　如果群 G 的阶 $|G|$ 不被 2 整除，则 G 为可解群。

定理 1.2.10　如果 $|\pi(G)|\leqslant 2$，则群 G 可解。

定理 1.2.11　如果群 G 的任意极大子群的指数为素数或素数的平方，则 G 是可解群。

性质 1.2.4 如果素数 $p \parallel \Phi(G)|$，则 $p \parallel G/\Phi(G)|$。

性质 1.2.5 设 H/K 为群 G 的 pd -主因子，则 $O_p(G/C_G(H/K))=1$。

性质 1.2.6 设 P 为群 G 的正规 p -子群，则对于任意 G 的 pd -主因子 H/K 有 $P\subseteq C_G(H/K)$。

1.2.2 有限群的超可解性

定义 1.2.2 如果群 G 的每个非 p -阶主因子都是 p'-群，群 G 是 p -**超可解的**；如果对于所有素数 $p\in\pi$，群 G 是 p -超可解的，群 G 是 π -**超可解的**；如果对于所有素数 p，群 G 是 p -超可解的，群 G 是**超可解的**。

显然，p -超可解群为 p -可解群，π -超可解群为 π -可解群，超可解群为可解群。一个群是超可解的当且仅当它的所有主因子为素数阶群。

性质 1.2.7 p -超可解群的所有子群和所有商群仍为 p -超可解群。设 A，B 为 p -超可解群，则群 $A\times B$ 也为 p -超可解的。

性质 1.2.8 群 G 为超可解群的充分必要条件是 $G/\Phi(G)$ 为超可解群。

定理 1.2.12 下列条件等价：

(1) 群 G 为 p -超可解；

(2) 群 G 为 p -可解且 G 的每个极大子群的指数或等于 p 或为 p'-数。

推论 1.2.1 下列条件等价：

(1) 群 G 超可解；

(2) 如果 M 是 G 的极大子群，则 $|G:M|$ 为素数。

以下几个定理是关于 p -超可解的充分条件及必要条件。

定理 1.2.13 设群 G 有正规列

$$1=G_0\subseteq G_1\subseteq\cdots\subseteq G_t=G, \tag{2}$$

其每个因子要么为循环群，要么为 p'-群，则 G 为 p -超可解群。

定理 1.2.14 如果群 G 的每一个包含 Sylow 子群正规化子的极大子群在 G 内有素数指数，则 G 超可解。

定义 1.2.3 设 $|G|=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$ 为群 G 的标准分解式，且 $p_1>p_2>\cdots>p_n$，如果 G 有这样的正规群列

$$1=G_0\subseteq G_1\subseteq\cdots\subseteq G_n=G, \tag{3}$$

其中 $|G_i/G_{i-1}|=p_i^{\alpha_i}$，则称群 G 为 **Sylow 塔群**。

定理 1.2.15 设 G 为超可解群，则 G 的换位子群 G' 为幂零群且 G 为 Sylow 塔群。

定义 1.2.4 如果群 G 不是超可解群，但其所有真子群都是超可解群，称群 G 为**内超可解的**；如果群 G 不是超可解群但其所有真商群都是超可解群，称 G 为**外超可解的**；如果群 G 既是内超可解的又是外超可解的，称群 G 为**极小非超可解的**。

1.2.3 有限群的幂零性

定义 1.2.5 如果对于群 G 的每个主因子 H/K，要么 H/K 是 p'-群，要么 $H/K\leqslant Z(G/K)$，群 G 是 p -**幂零的**；如果对于所有素数 $p\in\pi$，群 G 是 p -幂零的，群 G 是 π -**幂零的**；如果对于所有素数 p，群 G 是 p -幂零的，群 G 是**幂零的**。

显然，所有 p'-群和所有准素群是 p-幂零的；所有 p-幂零群和所有 p'-群为 p-超可解群。

性质 1.2.9　p-幂零群的所有子群和所有商群仍为 p-幂零群。

性质 1.2.10　设 A,B 为群 $G=AB$ 的正规的 p-幂零子群，则群 G 也是 p-幂零的。

性质 1.2.11　群 G 为幂零群的充分必要条件是 $G/\Phi(G)$ 为幂零群。

定理 1.2.16　设群 G 有这样的正规列

$$1=G_0\subseteq G_1\subseteq\cdots\subseteq G_t=G, \tag{4}$$

则 G 为 p-幂零群。若对于任意的 $i=1,2,\cdots,t$ 有 $G_i/G_{i-1}\leqslant Z(G/G_{i-1})$ 或者 G_i/G_{i-1} 为 p'-群。

定义 1.2.6　如果一个群 G 有正规 π-Hall 子群，则称群 G 为 **π-闭的**。

定义 1.2.7　如果 $H/K\subseteq Z(G/K)$，即 $C_G(H/K)=G$，则群 G 的主因子 H/K 称为**中心的**。

定理 1.2.17　对于群 G 以下条件等价：

(1) 群 G 为 p-幂零的；

(2) G 为 p'-闭的；

(3) G p-可解且每个在群 G 中指数为 p 的幂的极大子群在 G 中正规。

性质 1.2.12　群 G 的换位子群 G' 有下列性质：

(1) 如果 $N\lhd G$，且 G/N 为交换群，则 $G'\subseteq N$；

(2) G/G' 为交换群；

(3) G' 为 G 的所有使 G/N 交换的正规子群 N 的交。

定理 1.2.18　对于群 G 以下条件等价：

(1) G 幂零；

(2) 群 G 的任意子群次正规；

(3) G 为自己的 Sylow 子群的直积；

(4) $G'\subseteq\Phi(G)$；

(5) G 的每个主因子为中心的。

性质 1.2.13　对于一个群 G，下中心列 $K_{n+1}(G)=1$ 的充分必要条件是 $Z_n(G)=G$。

性质 1.2.14　群 G 为幂零群的充分必要条件是存在自然数 n，使下中心列 $K_{n+1}(G)=1$（或上中心列 $Z_n(G)=G$）。

定义 1.2.8　G 为幂零群，若存在自然数 n，使下中心列 $K_{n+1}(G)=1$，满足这种条件的最小的 n 称为 G 的**幂零类**，记为 $c(G)=n$。

定义 1.2.9　G 为群，H 为 G 的子群，令 $H^G=\langle g^{-1}Hg\mid g\in G\rangle$，称 H^G 为 H **在 G 中的正规闭**。

显然，H^G 为 G 中包含 H 的最小正规子群。

定理 1.2.19　H 为 G 的幂零子群，且 $C(H)<C(G)$，则 $C(H^G)<C(G)$。

定理 1.2.20　$F_p(G)$ 具有以下性质：

(1) $F_p(G)$ 为群 G 的最大正规 p-幂零子群；

(2) $F_p(G)/O_{p'}(G)=O_p(G/O_{p'}(G))$；

(3) $F_p(G)$ 等于所有群 G 的 pd-主因子的中心化子的交。

定理 1.2.21　(1) $F_\pi(G)$ 等于所有群 G 的 πd-主因子的中心化子的交，且为群 G 的最大

正规 π-幂零子群;(2) $F(G)$等于所有群 G 的主因子的中心化子的交,且为群 G 的最大正规幂零子群。

定理 1.2.22 若 $N\lhd G$,则 $\Phi(N)\subseteq\Phi(G)$。

定理 1.2.23 N 为群 G 的幂零子群,若 $\Phi(G)\cap N=1$,则 N 在群 G 中可补。

定义 1.2.10 群 G 的所有极小正规子群的积,称为群 G 的**基座**,记作 $Soc(G)$。

显然,$Soc(G)=L_1\times\cdots\times L_t$,其中 $L_1,\cdots,L_t$ 为群 G 的所有极小正规子群。

定理 1.2.24 以下结论成立:

(1) $\Phi(G)\subseteq F(G)$;

(2) $F(G)/\Phi(G)=F(G/\Phi(G))$;

(3) $F(G)/\Phi(G)$为群 $G/\Phi(G)$的可换极小正规子群的直积。特别地,如 G 可解,则 $F(G)/\Phi(G)=Soc(G/\Phi(G))$。

定理 1.2.25 对于群 G,以下条件等价:

(1) G 为 π-幂零群;

(2) G 有一个正规群列,其商因子 G_i/G_{i-1} 或为 π'-群或 $G_i/G_{i-1}\subseteq Z(G/G_{i-1})$;

(3) G 的任意商群 $\overline{G}$ 的极小正规子群或为 π'-群或含于 $Z(\overline{G})$;

(4) G 有正规 π-补,且 Hall π-群幂零。

定义 1.2.11 令 $O_{\pi\pi'}(G)/O_\pi(G)=O_\pi{}'(G/O_\pi(G))$。若存在自然数 n 使

$$O_{\pi'\pi\pi'\cdots\pi'\pi\pi'}(G)=G \tag{5}$$

其中,π 的个数为 n,则称 G 为 **π-分离群**。式(5)成立的最小自然数 n 称为 G **的 π-长**,记作 $l_\pi(G)$。

性质 1.2.15 群 G 为 π-分离且 π-长 $l_\pi(G)\leqslant1$ 的充分必要条件是对 G 的每个非 π'主因子 M/N,$G/C_G(M/N)$为 π-闭群。

性质 1.2.16 群 G 的两个有正规 π-补的正规子群的积仍为有正规 π-补的正规子群。

定理 1.2.26 对于群 G,以下结论成立:

(1) $F_\pi(G)\subseteq O_{\pi'\pi}(G)$;

(2) 如果 G 的 Hall π-子群幂零,则 $F_\pi(G)=O_{\pi'\pi}(G)$。

定理 1.2.27 设群 G,且 G 的 Hall π-子群幂零,则 G 为 π-分离且 π-长 $l_\pi(G)\leqslant1$ 的充分必要条件是对 G 的每个非 π'-主因子 M/N,$G/C_G(M/N)$为 π'-群。

定理 1.2.28 设 G 为有限群,p 为$|G|$的素因子,P 为 G 的 Sylow p-子群。如果 P 交换且 $N_G(P)$为 p-幂零群,则 G 为 p-幂零群。

定义 1.2.12 如果一个非幂零群含有一个幂零正规子群使得对应的商群幂零,称群 G 为**亚幂零群**。

定义 1.2.13 如果 G 本身非幂零,但 G 的所有真子群都幂零,群 G 称为 Schmidt **群**,该群也称为**内幂零群**。

1.3 群类的基本概念

定义 1.3.1 群的一个集合$\mathfrak{X}$称为群类,如果当$\mathfrak{X}$包含群 G 时,则它包含所有与 G 同构的群。

定义 1.3.2　定义$\varnothing$是空的群类；

(1) 表示为由一个单位元群组成的群类；

$\mathfrak{G}$是所有群组成的群类；

$\mathfrak{G}_\pi$ 是所有 π-群组成的群类；

$\mathfrak{S}_p$ 是所有 p-可解群组成的群类，其中 $p\in\mathcal{P}$ 为素数；

$\mathfrak{S}_\pi$ 是所有 π-可解群组成的群类，其中 $\pi\subseteq\mathcal{P}$；

$\mathfrak{S}$是所有可解群组成的群类；

$\mathfrak{U}_p$ 是所有 p-超可解群组成的群类，其中 $p\in\mathcal{P}$ 为素数；

$\mathfrak{U}_\pi$ 是所有 π-超可解群组成的群类，其中 $\pi\subseteq\mathcal{P}$；

$\mathfrak{U}$为所有超可解群的群类；

$\mathfrak{N}_p$ 是所有 p-幂零群组成的群类，其中 $p\in\mathcal{P}$ 为素数；

$\mathfrak{N}_\pi$ 是所有 π-幂零群组成的群类，其中 $\pi\subseteq\mathcal{P}$；

$\mathfrak{N}$是所有幂零群组成的群类；

$\mathfrak{A}$是所有交换群组成的群类；

$\mathfrak{A}(n)$是所有幂指数整除自然数 n 的交换群组成的群类。

定义 1.3.3　如果 U 为所有群类的集合到自身的一个映射，称 U 为群类上的一个**算子**；如果 $U(\mathfrak{X})\subseteq\mathfrak{X}$，群类$\mathfrak{X}$称为 U-**闭的**。

定义 1.3.4　算子 S-，S_N-，S_n-，Q-，D-，R_0-，N_0-，E-，E_Φ-，E_{Φ_p}-分别定义为：

$S\mathfrak{X}=\{G\mid G$为某$\mathfrak{X}$-群的子群$\}$；

$S_N\mathfrak{X}=\{G\mid G$为某$\mathfrak{X}$-群的正规子群$\}$；

$S_n\mathfrak{X}=\{G\mid G$为某$\mathfrak{X}$-群的次正规子群$\}$；

$Q\mathfrak{X}=\{G\mid G$为某$\mathfrak{X}$-群的满射像$\}$；

$D\mathfrak{X}=\{G\mid G=H_1\times H_2\times\cdots\times H_s$，对某些自然数及某些$\mathfrak{X}$-群 $H_1,H_2,\cdots,H_s\}$；

$R_0\mathfrak{X}=\{G\mid G$中存在正规子群 $N_1,N_2,\cdots,N_s(s\geqslant 2)$使得$\bigcap_{i=1}^{s}N_i=1$ 且 $G/N_i\in\mathfrak{X}\}$；

$N_0\mathfrak{X}=\{G\mid G$中存在次正规子群列 $N_1,N_2,\cdots,N_s(s\geqslant 2)$使得 $G=\langle N_1,N_2,\cdots,N_s\rangle$且对于任意 $i=1,2,\cdots,s$ 有 $N_i\in\mathfrak{X}\}$；

$E\mathfrak{X}=\{G\mid G$中存在次正规子群列 $1=G_0\subseteq G_1\subseteq\cdots\subseteq G_{t-1}\subseteq G_t=G$，对于任意 $i=1,2,\cdots,t$ 有$G_i/G_{i-1}\in\mathfrak{X}\}$；

$E_\Phi\mathfrak{X}=\{G\mid G$中存在正规子群 N，满足 $N\leqslant\Phi(G)$有 $G/N\in\mathfrak{X}\}$；

$E_{\Phi_p}\mathfrak{X}=\{G\mid G$中存在正规子群 N，满足 $N\leqslant\Phi(G)\cap O_p(G)$有 $G/N\in\mathfrak{X}\}$。

定义 1.3.5　当群 G 属于群类$\mathfrak{X}$时，称群 G 是$\mathfrak{X}$-**群**；当子群 H 属于群类$\mathfrak{X}$时，称群 G 的子群 H 为$\mathfrak{X}$-**子群**；如果 $H\in\mathfrak{X}$且由 $H\leqslant T\subset G$ 及 $T\in\mathfrak{X}$，总有 $H=T$，称群 G 的子群 H 为$\mathfrak{X}$-**极大子群**。

定义 1.3.6　如果一个群类$\mathfrak{X}$为 Q-闭且 R_0-闭，称$\mathfrak{X}$为**群系**。

定义 1.3.7　如果下列条件成立，则群类$\mathfrak{F}$称为 Fitting **类**：

(1) 如果 $G\in\mathfrak{F}$，$N\lhd G$，则 $N\in\mathfrak{F}$；

(2) 如果 $G=MN$，$M\lhd G$，$N\lhd G$ 且 $M\in\mathfrak{F}$，$N\in\mathfrak{F}$，则 $G\in\mathfrak{F}$；或者说$\mathfrak{F}$为 S_N-闭且 D-闭。

显然，对于一个群系$\mathfrak{X}$，每个群 G 都有一个使其商群属于$\mathfrak{X}$的极小正规子群。

定义 1.3.8　若对于每个群 G，$G^{\mathfrak{X}}$ 为使其商群属于$\mathfrak{X}$的极小正规子群，$G^{\mathfrak{X}}$ 称为群 G 的$\mathfrak{X}$-

上根。

定义 1.3.9　如果 $L \lhd G$ 且 $G/L \in \mathfrak{F}$，总有 $G \in \mathfrak{F}$，这里 $L \leqslant \Phi(G)$，或者说 $\mathfrak{F}$ 为 E_{Φ}-闭的，群类 $\mathfrak{F}$ 称为**饱和的**。

定义 1.3.10　令 $\mathcal{P}$ 为全体素数的集合，则 f 称为 $\mathcal{P}$ **上群系函数**，若 f 为定义在 $\mathcal{P}$ 上的函数，且若 $f(p)$ 为非空集合时，$f(p)$ 为群系；

定义 1.3.11　G 的主因子 H/K 称做 G 中的 f-**中心**，若对于所有整除 $|H/K|$ 的素数 p，有 $G/C_G(H/K) \in f(p)$；

定义 1.3.12　群系 $\mathfrak{F}$ 被说为**局部的**，如果存在群系函数 f，满足

$$\mathfrak{F}=\{G \mid G/C_G(H/K) \in f(p)，\text{其中 } H/K \text{ 是群的 } p\text{-主因子}\}，$$

并称 f **局部定义了群系** $\mathfrak{F}$ 或 f 为 $\mathfrak{F}$ 的一个**屏**，此时记 $\mathfrak{F}=LF(f)$。

众所周知，一个群系是局部的当且仅当它是饱和的。显然所有超可解群组成的群类和所有幂零群组成的群类都是饱和群系。

定义 1.3.13　设 $\mathfrak{F}_1$，$\mathfrak{F}_2$ 是两个群系，群类 $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ 称为**群系** $\mathfrak{F}_1$ **和** $\mathfrak{F}_2$ **的积**，如果 $\mathfrak{F}_2=\varnothing$，那么 $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2=\varnothing$；如果 $\mathfrak{F}_2 \neq \varnothing$，那么 $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2=\{G \mid G \text{ 是群且 } G^{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{F}_1\}$。

显然，两个群系的积仍是一个群系。

定义 1.3.14　若 $\mathfrak{F}$ 为群类，定义 $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ 为 G 的 $\mathfrak{F}$-**超中心**，若其为 G 的所有非单位的 $\mathfrak{F}$-超中心正规子群的积；特别地，$Z_{\infty}(G)$ 为 G 的幂零超中心。

1.4　有限群的局部性

1.4.1　有限群的局部性问题

群的概念源于 19 世纪 30 年代 Galois 证明有理系数多项式 $P_n(x)$，$n \geqslant 5$ 时无有限形式的根表达式，此后包括有限群在内，群的概念得到进一步发展，其研究也逐步由舍弃元素的具体内容转向抽象系统的研究。群理论的研究归结为三个主要方面：群结构的一般研究、群表示研究以及 Galois 理论。由于群概念和理论的普适性，因此广泛运用于编码理论、晶相理论以及动力系统等领域，同时也推动几何学的发展。

在研究有限群的过程中，群的结构的研究占据重要地位，而用群的各类子群描述群的特征则具有方法论上的意义。显然，子群及其性质是群重要的局部特征，因此，所谓有限群的**局部性问题**是指利用有限群的子群及其性质，讨论其对有限群构造的影响的问题，如利用子群的局部性质研究有限群的可解性、超可解性、幂零性是群论中的一个重要内容。特别地，利用群 G 的某些特殊子群，如极大子群、极小子群、Sylow 子群、Sylow 子群的极大子群、Sylow 子群的 2-极大子群、4 阶循环子群等满足某些特性的子群，甚至群系的上根等可判断群的可解性、超可解性、幂零性，方法有效，结果丰富。

众所周知，在研究有限群时，正规子群是群论中极重要的概念，多年来，人们围绕这个概念从以下两个方面进行扩展。

一是对正规子群施加更多限制。例如，一个正规子群可看做对群 G 的所有内自同构都保持不变的子群，同时提出两个更强的概念：若 H 对群 G 的所有自同构都保持不变，称群 G 的子群 H 为 G 的特征子群；若 H 对群 G 的所有自同态都保持不变，称群 G 的子群 H 为 G 的全

不变子群。

二是对正规子群或其具有的性质减弱某些限制，尤其在对正规子群具有的性质的弱化方面。国内外群论专家已经引进比正规性更弱的一些定义，如拟正规性[8]（置换子群[9]）、s-拟正规性[10]、s^*-拟正规[11]、半正规性[12]（半置换子群[13]）、s-半正规性（s-半置换子群）、苏-半正规性[14]、c-正规性[15]、弱 c-正规性[16]、s-正规性[17]、条件置换[18]、完全条件置换[18]、c^*-正规子群[19]、弱 s-置换嵌入子群[20]、Φ-补子群等。事实上，用较弱的条件去刻画群的结构，即用群的各类子群描述群的特征，不仅具有方法论上的意义，而且也是目前有限群研究的一个新热点。归纳来讲，该方向至少有两个子方向：可补子群方向和可置换子群方向。其中，前者考虑补子群的特殊性，又分为一般型、对偶性和商群型，分别为第 3 章的 c-正规子群、第 2 章的 Φ-补子群、第 5 章的 $\mathfrak{J}$-s-补子群；而后者考虑补子群的特殊性，又分为一般型和共轭型，如第 7 章的 s-半置换子群、第 8 章的完全条件置换，当然也存在上述两者（一般型和共轭型）之间交叉的内容，则称为综合型，如第 6 章的 c^*-正规子群、弱 s-置换嵌入子群。需要特别指出的是，郭文彬学派利用群类理论在该方面所做的工作，如文献[21]利用 G-覆盖子群研究有限群的超可解性与幂零性，从方法论上讲，实现了有限群局部问题研究的批处理。

1.4.2 可补子群方向的一些定义及其之间的关系

定义 1.4.1 设 H 为群 G 的子群，称 H 在 G 中**可补**，若存在的子群 K，使 $G=HK$，并且 $H\cap K=1$，这时，K 称为 H 在 G 中的**补子群**。

定理 1.4.1 （Schur-Zassenhaus 定理）设 N 为群 G 的 Hall 正规子群，则

(1) N 在群 G 中有补；

(2) 若 N 或 G/N 可解，K 和 K_1 是 N 在 G 中的两个补群，则存在 $n\in N$ 使得 $K^n=K_1$。

定理 1.4.1 是著名的 Schur-Zassenhaus 定理，它是关于特殊正规子群的定理，反映了一类特殊正规子群的可补性，受该定理的启发，人们引出定义 1.4.1，并且得到很多结果，如 W. Gashütz 获得定理 1.4.2，并得到推论 1.4.1。

定理 1.4.2 设群 G 为有限群，$N\lhd G$，N 交换，又 $N\leqslant M\leqslant G$，$(|N|,|G:M|)=1$，则

(1) 若 N 在群 M 中有补，则 N 在群 G 中有补；

(2) 若 N 在群 M 中有补，且所有这样的补全在 M 中共轭，则 N 在群 G 中的补也在 G 中共轭。

推论 1.4.1 设 N 是群 G 的交换正规子群，则 N 在 G 中有补的充要条件为对于 G 的每个 Sylow 子群 S，$S\cap N$ 在 S 中也有补。

诸如上述深刻的结论还有很多，然而人们的研究思路又向新的方向拓展，即在定义 1.4.1 的基础上，通过对可补性添加和弱化一些条件，分别获得了以下定义。

定义 1.4.2 如果存在群 G 的子群 K，使得 $G=HK$，但对于任意 K 的真子群 K_1，有 $HK_1<G$，群 G 的子群 H 称为**苏-半正规的**。

定义 1.4.3 如果存在群 G 的正规子群 K，使得 $G=HK$ 且 $H\cap K\leqslant H_G$，其中 $H_G=\bigcap_{g\in G}H^g$，称群 G 的子群 H 为 G 的 **c-正规子群**。

定义 1.4.4 如果存在群 G 的次正规子群 K，使得 $G=HK$ 且 $H\cap K\leqslant H_G$，其中 $H_G=\bigcap_{g\in G}H^g$，称群 G 的子群 H 为 G 的**弱 c-正规子群**。

定义 1.4.5 如果存在群 G 的次正规子群 K，使得 $G=HK$ 且 $H\cap K\leqslant H_{SG}$，其中