高等学校教材

高等数学（下册）

李伟 主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

（下　册）

李　伟　主编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书依据高等学校数学与统计学教学指导委员会新修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成。本书注重培养学生用“已知”认识、研究、解决“未知”的能力；注重给学生营造一个启发式、互动式学习的氛围与环境，使学生在“边框”中提出的问题的启发、引导、驱动下边思考、边读书、边总结；内容力求简明、引出尽可能直观，注重避免新的概念、新的结论、新的方法“从天而降”。同时注意为青年教师实施启发式、互动式教学提供一定的借鉴。

全书分上、下两册，下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等，书末附习题参考答案与提示。本书可供高等学校理工科非数学类各专业高等数学课程教学使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下册／李伟主编．--北京：高等教育出版社，2011.11(2012.9重印)

ISBN 978-7-04-033982-6

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①李…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 217517 号

策划编辑　于丽娜　　责任编辑　贾翠萍　　封面设计　张雨微　　版式设计　范晓红

责任校对　姜国萍　　责任印制　韩　刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京汇林印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	24	版　　次	2011年11月第1版
字　　数	430千字	印　　次	2012年9月第4次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	32.50元

物 料 号　33982-00

目　　录

第七章　向量代数与空间解析几何 …… 1

第一节　向量的概念及其运算 …… 1

1. 向量的概念 …… 1

2. 向量的线性运算 …… 2

3. 向量的投影 …… 5

4. 向量的数量积与向量积 …… 6

习题 7-1(A) …… 9

习题 7-1(B) …… 10

第二节　向量的坐标及用坐标研究向量 …… 10

1. 空间直角坐标系 …… 10

2. 向量的运算以及与向量有关量的坐标表示 …… 13

习题 7-2(A) …… 22

习题 7-2(B) …… 23

第三节　平面 …… 24

1. 图形与方程 …… 24

2. 平面的方程 …… 25

3. 两平面之间的位置关系 …… 29

习题 7-3(A) …… 32

习题 7-3(B) …… 33

第四节　空间直线 …… 33

1. 空间直线的一般式方程 …… 33

2. 空间直线的点向式方程和参数方程 …… 34

3. 两直线的夹角 …… 37

4. 直线与平面的夹角 …… 38

5. 平面束方程 …… 39

习题 7-4(A) …… 40

习题 7-4(B) …… 41

第五节　曲面 …… 42

1. 柱面 …… 42

2. 旋转曲面 …… 43

3. 其他常见的一般二次曲面 …… 47

习题 7-5(A) …… 51

习题 7-5(B) …… 52

第六节 空间曲线 …… 52

1. 空间曲线的一般方程 …… 52

2. 空间曲线的参数方程 …… 53

3. 空间曲线在坐标面上的投影 …… 55

习题 7-6(A) …… 58

习题 7-6(B) …… 59

第七节 利用软件进行向量运算和画图 …… 59

1. 向量的运算 …… 59

2. 曲面的图形演示 …… 60

总习题七 …… 61

第八章 多元函数微分学 …… 65

第一节 多元函数及其连续性 …… 65

1. 区域 …… 65

2. 二元函数 …… 67

3. 多元函数的极限 …… 69

4. 多元函数的连续性 …… 71

习题 8-1(A) …… 73

习题 8-1(B) …… 74

第二节 偏导数 …… 75

1. 一阶偏导数 …… 75

2. 高阶偏导数 …… 79

习题 8-2(A) …… 81

习题 8-2(B) …… 82

第三节 全微分 …… 82

1. 全微分的定义 …… 83

2. 可微与偏导数之间的关系 …… 84

3. 函数 $z=f(x,y)$ 的局部线性化与全微分的应用 …… 87

习题 8-3(A) …… 90

习题 8-3(B) …… 91

第四节 多元复合函数的求导法则 …… 91

1. 复合函数的微分法 …… 92

2. 全微分形式的不变性 …… 97

习题 8-4(A) …… 99

习题 8-4(B) …… 100

第五节　隐函数的求导法则 …… 100
1. 一个方程时的情况 …… 101
2. 方程组时的情形 …… 104
习题 8-5(A) …… 106
习题 8-5(B) …… 107
第六节　一元向量值函数　多元函数微分学在几何中的应用 …… 107
1. 一元向量值函数　曲线的向量值方程 …… 107
2. 空间曲线的切线方程与法平面方程 …… 111
3. 曲面的切平面与法线 …… 114
习题 8-6(A) …… 117
习题 8-6(B) …… 118
第七节　方向导数与梯度 …… 118
1. 方向导数 …… 118
2. 梯度 …… 122
3. 场的简介 …… 124
习题 8-7(A) …… 124
习题 8-7(B) …… 125
第八节　多元函数的极值与最值问题 …… 125
1. 多元函数的极值 …… 126
2. 多元函数的最值 …… 128
3. 条件极值与拉格朗日乘数法 …… 132
4. 数学建模的实例 …… 136
习题 8-8(A) …… 140
习题 8-8(B) …… 140
第九节　利用软件计算偏导数 …… 141
总习题八 …… 142
第九章　重积分 …… 146
第一节　二重积分的概念与性质 …… 146
1. 两个实际问题 …… 146
2. 二重积分的定义 …… 148
3. 二重积分的几何意义 …… 149
4. 二重积分的性质 …… 150
习题 9-1(A) …… 151
习题 9-1(B) …… 152
第二节　二重积分的计算 …… 153
1. 直角坐标系下二重积分的计算 …… 153

2. 极坐标系下二重积分的计算 …… 162
习题 9-2(A) …… 167
习题 9-2(B) …… 169
第三节 三重积分 …… 170
1. 三重积分的概念与性质 …… 170
2. 利用直角坐标计算三重积分 …… 171
3. 利用柱面坐标计算三重积分 …… 176
4. 利用球面坐标计算三重积分 …… 179
习题 9-3(A) …… 181
习题 9-3(B) …… 183
第四节 重积分的应用 …… 183
1. 重积分的微元法 …… 183
2. 利用重积分计算曲面的面积 …… 184
3. 在物理上的应用 …… 187
习题 9-4(A) …… 193
习题 9-4(B) …… 194
第五节 利用软件计算多元函数的积分 …… 194
总习题九 …… 195
第十章 曲线积分与曲面积分 …… 199
第一节 对弧长的曲线积分 …… 199
1. 对弧长的曲线积分的定义 …… 199
2. 对弧长的曲线积分的性质 …… 201
3. 对弧长的曲线积分的计算 …… 201
习题 10-1(A) …… 205
习题 10-1(B) …… 206
第二节 对坐标的曲线积分 …… 206
1. 引入——变力沿曲线作功问题 …… 206
2. 对坐标的曲线积分的定义与性质 …… 207
3. 对坐标的曲线积分的计算 …… 209
4. 第二型曲线积分的另外表示法 两类曲线积分之间的联系 …… 214
习题 10-2(A) …… 217
习题 10-2(B) …… 218
第三节 格林公式 …… 218
1. 单连通区域与多连通区域 区域边界的正向 …… 219
2. 格林公式 …… 220
3. 平面上的曲线积分与路径无关的条件 …… 225

习题 10-3(A) …… 236
习题 10-3(B) …… 237
1. 对面积的曲面积分的概念与性质 …… 238
习题 10-4(A) …… 241
习题 10-4(B) …… 242
第五节　对坐标的曲面积分 …… 24[illegible]
2. 对坐标的曲面积分的定义 …… 245
4. 对坐标的曲面积分的计算 …… 248
习题 10-5(B) …… 255
习题 10-6(A) …… 265
2. 收敛级数的性质 …… 275
习题 11-1(B) …… 279
1. 基本定理 …… 280
2. 比较判别法 …… 280
3. 比值判别法与根值判别法 …… 285
习题 11-2(A) …… 288
习题 11-2(B) …… 289

第三节 任意项级数的绝对收敛与条件收敛 …… 290

1. 任意项级数的绝对收敛 …… 290

2. 交错级数 …… 291

3. 条件收敛 …… 293

4. 绝对收敛级数的性质 …… 294

习题 11-3(A) …… 295

习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295
习题 11-3(A) …… 295

第七章　向量代数与空间解析几何

图形与方程本是互不相关的，但通过平面解析几何的学习我们看到，当在平面上建立了平面坐标系之后，就将平面中的点与二元有序数组建立起一一对应，进而把平面中的曲线与二元方程建立起对应关系，从而就可以利用方程来研究图形. 我们生活的空间中有大量的几何图形，或许大家在想，能否像在平面中用方程研究平面图形那样来研究空间中的图形？本章就来讨论这一问题，这就是空间解析几何的内容，它是之后要学习的多元微积分的基础. 在研究空间解析几何之前，我们先讨论有关向量的问题，它在几何、物理与力学中扮演着重要的角色，特别地，它也是研究空间图形的重要工具.

第一节　向量的概念及其运算

1. 向量的概念

1.1　向量的基本概念

前面学习过的像长度、面积、体积、温度等量都是数量. 其特点是，它们只有大小或多少的意义. 比如，一条线段长 18 cm，某房间的面积为 24 m^2，教室里有 136 个学生，室外的温度为10℃等. 但是我们也遇到过像速度、位移、力等另外一种量. 它们的特点是，既有大小，同时又有方向.

既有大小又有方向的量称为**向量**. 通常用有向线段来表示向量. 将以 A 为起点，B 为终点的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{AB}$（图 7-1）. 这时线段$\overrightarrow{AB}$的长度表示向量$\overrightarrow{AB}$的大小，称为向量$\overrightarrow{AB}$的模，记作$|\overrightarrow{AB}|$；点 A 到点 B 的方向为$\overrightarrow{AB}$的方向. 按照这种说法，两向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BA}$是不同的，因为它们的方向不同.

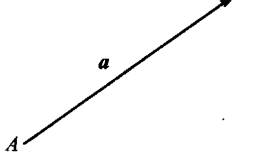


图 7-1

有时也用一个黑斜体字母来表示向量，例如向量 $\boldsymbol{a}$.

由向量的定义，向量由它的模和方向确定. 也就是说，我们可以将所研究的向量自由地平移到另外的位置，而认为该向量没有改变，因此通常也称它为**自由向量**.

模为零的向量称为**零向量**，记为 **0**. 零向量的起点与终点相同，其方向可以是任意的，它是唯一方向不确定的向量. 模为 1 的向量称为**单位向量**. 与 $\boldsymbol{a}$ 有相同方向的单位向量称作 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记作 $\boldsymbol{e}_a$.

1.2　两向量之间的关系

若向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的模相等并且方向相同，则称它们是**相等**的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 相等的向量也称为是同一个向量.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相反、模相等的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$.

如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反，就称它们是**互相平行**的，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 并且约定，零向量与任何向量平行.

例如，在平面平行四边形 $ABCD$（图 7-2）中，$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}/\!/\overrightarrow{BC}$，并且有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，而 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{CB}$.

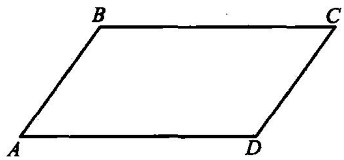


图 7-2

当两个向量互相平行时，可以通过平移使它们具有共同的起点，这时它们的终点必落在同一条直线上. 因此，彼此平行的向量也称为是**共线**的.

类似地，若有 $n(n\geqslant 3)$ 个向量，当通过平移使得它们有共同的起点，如果这时它们的终点与（公共的）起点在同一平面内，则称这 n 个**向量共面**.

下面介绍两向量夹角的概念：

若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，将其中一个作平移，使它们有共同的起点 O，记 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$（图 7-3）. 称不超过 π 的 $\angle AOB$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

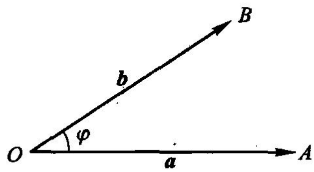


图 7-3

两向量共能形成几个角？它们有何关系？

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定其夹角可以在 $[0,\pi]$ 上任意取值.

按照这样的规定，两互相平行（共线）的向量夹角要么为 0（同向时）要么为 π（反向时）. 若两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$，则称它们**互相垂直**，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 根据零向量与向量夹角之规定，可以认为零向量与任意向量都垂直.

2. 向量的线性运算

2.1　加减法运算

数的运算我们是非常熟悉的. 但是，向量是有方向的量，如何来刻画向量的

运算呢？在力学中学习了求两个力的合力，把它推广到一般的向量，就是向量的相加.

对任意给定的两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，我们仿照力学中求力的合力的平行四边形法则来定义两向量的和向量：设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行，如图 7-4(1)所示，以 A 为起点，作向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$，连接 AC，称向量 $\overrightarrow{AC}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和向量**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种求和向量的方法称作**平行四边形法则**.

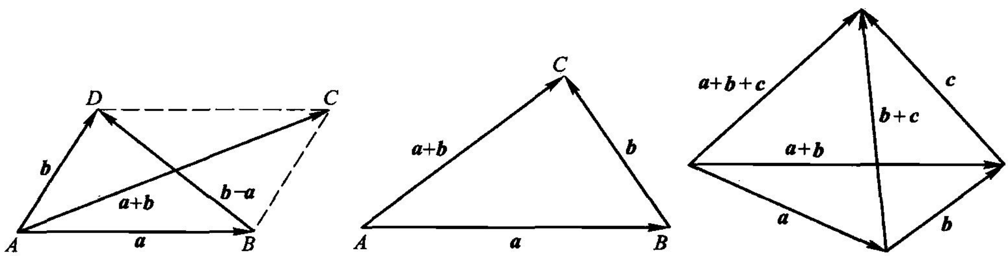
设有两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，也可按照下述的**三角形法则**来求它们的和向量：如图 7-4(2)，作向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC，向量 $\overrightarrow{AC}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 利用向量的三角形法则可以比较方便地求出多个向量的和向量（图7-4(3)）.

零向量与任何向量 $\boldsymbol{a}$ 的和向量还是向量 $\boldsymbol{a}$.

若两向量平行，应该用什么样的方法作它们的和向量？

显然，这样定义的加法运算满足交换律与结合律：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},$$
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$



(1)　(2)　(3)

图 7-4

称向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的负向量 $-\boldsymbol{b}$ 的和向量为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差向量**，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. 例如，图 7-5 中向量 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差向量，而图 7-4(1)中的向量 $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. 特别地，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

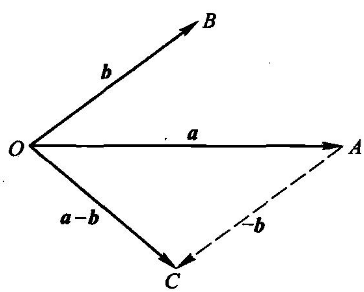


图 7-5

由于三角形的两边之和大于第三边，因此由图 7-4(1)易得

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,\quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

上面的两个不等式统称为**三角不等式**，其中等号分别仅在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立.

若记 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=0$ 可以吗？为什么？

2.2 数乘运算

经过几次大提速，火车的速度提升了 3 倍. 由于速度是向量，因此这句朴素的语言实则蕴含着向量的数乘运算. 下面给出向量的数乘运算的定义：

设有向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$：

(1) $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模：$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$.

(2) $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，其方向规定如下：

当 $\lambda>0$ 时，与向量 $\boldsymbol{a}$ 有相同的方向；当 $\lambda<0$ 时，与向量 $\boldsymbol{a}$ 有相反的方向；当 $\lambda=0$ 时，由上述(1)的规定，不论 $\boldsymbol{a}$ 是否为零向量，$\lambda\boldsymbol{a}$ 都为零向量，因此其方向是任意的.

一个向量的负向量可以理解为该向量与数 -1 的乘积.

设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，根据上面(1)的规定，向量 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 的模 $\left|\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right|=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=1$. 由此，$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是单位向量，并且由于 $\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}>0$，因而 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 有相同的方向，这就是说，$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量 $\boldsymbol{e}_a$.

由此得到求一个非零向量的单位向量的方法——**将这个向量乘它的模的倒数**.

易证，向量的数乘运算满足下列规则：

$$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a}),\ \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},\ (\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

例 1.1 设有平行四边形 $ABCD$，M 是其对角线的交点（图 7-6），并设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$ 和 $\overrightarrow{MD}$.

解 由平行四边形的对角线互相平分，所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC},$$

因此

$$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

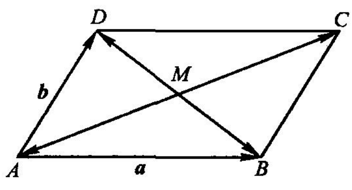


图 7-6

于是

$$\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

由 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$，故 $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$. 再由 $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

下面的判定两向量平行的充要条件不难由向量的数乘运算的定义得到：

设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}\Leftrightarrow$存在唯一的实数 λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

事实上,根据向量的数乘运算的定义,不论 λ 是怎样的实数,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 都是平行的,即充分性成立. 下证必要性:

欲证必要性,即证存在 λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,你认为需证几个方面?

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$,并假设它们同向. 取 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,由 $\lambda>0$,因此 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向,又 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向,于是 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 也同向;并且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|,$$

因此 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 异向时,取 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,仿照上面的证明,这时仍有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

同时这样的 λ 还是唯一的. 否则,设有 λ,μ 使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$ 同时成立. 两式相减,得$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,于是 $|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0$,由 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,因此 $|\boldsymbol{a}|\neq0$,所以必有 $\lambda=\mu$. 证毕.

3. 向量的投影

有了两向量之间的夹角,下面来讨论一向量在另一向量上的**投影**.

假设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是夹角为 $\theta\left(\theta\neq\dfrac{\pi}{2}\right.$,即两向量不互相垂直)的两非零向量. 将两向量其中一个作平移,使它们有相同的起点 O(图 7-7),过向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 作向量 $\boldsymbol{a}$ 所在直线的垂直平面,设垂足为 B'. 称点 B'为**点 B 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影**,数 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$(有向线段 OB' 的数值)为**向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影**,记为$(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}$,或 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$. 即

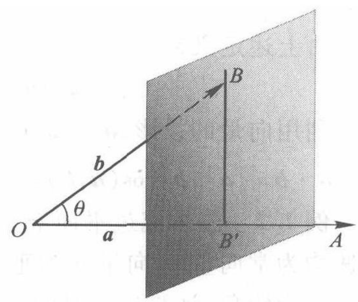


图 7-7

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}=|\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

你认为一向量在另一向量上的投影是向量还是数量?

显然,当 $0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}$时,该投影为正数;当 $\dfrac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$ 时,该投影为负数. 当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直时,规定不论是 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影还是 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影,它们都为零.

设 k 为一常数,利用上述定义可以得到向量投影的下述两条性质:

$$(k\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}=k(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}},\quad(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})_{\boldsymbol{a}}=(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}+(\boldsymbol{c})_{\boldsymbol{a}}.$$

第一个式子的正确性由定义易得. 由图 7-8,第二个式子也容易证明,留给

读者练习.

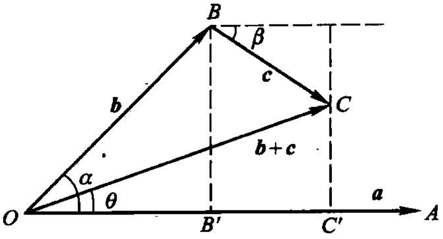


图 7-8

4. 向量的数量积与向量积

4.1 向量的数量积

在物理学中我们知道，力 $\boldsymbol{F}$ 沿位移 $\boldsymbol{s}$ 所作的功为

$$w=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cos(\widehat{\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}}),$$

我们称 w 为两向量 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的数量积. 下面一般地给出两向量的数量积的概念.

(1) 数量积的定义

下面给出两向量的**数量积**(也称**内积**、**点积**)的定义.

定义 1.1　设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，它们的夹角为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，称实数

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$$

为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个为零向量，则定义其数量积为零.

将向量的数量积与向量的加减运算及数乘运算相比较，其结果有什么最明显的不同?

由上述定义易得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2.$$

利用向量的投影，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积可以表示为：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{a}|(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}),\text{或 }\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}).$$

例 1.2　流体流过平面 π 上面积为 A 的一个区域. 设流体在区域各点处的流速均为常向量 $\boldsymbol{v}$. 向量 $\boldsymbol{n}$ 为垂直于平面 π 的单位向量(图 7-9(1))，若 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角为锐角，计算单位时间内通过这个区域的流体的体积.

解　单位时间内流经平面 π 上面积为 A 的区域的流体组成一个底面积为 A、斜高为 $|\boldsymbol{v}|$ 的斜柱体(图 7-9(2)). 该斜柱体的体积等于底面积 A 与速度 $\boldsymbol{v}$ 在向量 $\boldsymbol{n}$ 上的投影的乘积. 即有

$$V=A\cdot(\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{n}}.$$

由于 $\boldsymbol{n}$ 为单位向量，因此有 $(\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$，于是

$$V=A\cdot(\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{n}}=A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}.$$

(2) 数量积的运算规律

利用向量的数量积的定义，容易验证向量的数量积满足下面的交换律与结合律：

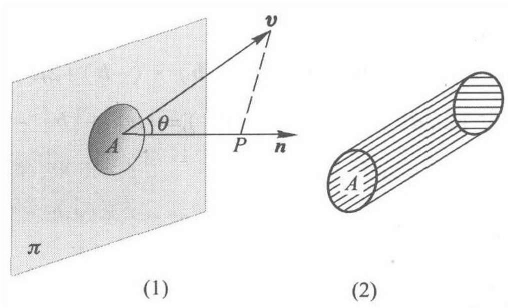


图 7-9

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\qquad\text{（交换律）},$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\text{（与数乘的结合律）}.$$

同时还有下面的分配律

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.$$

事实上，当 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 时，由数量积的定义，两边都为零，因此它们是相等的. 当 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$ 时，依照数量积的投影表示，有

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{c}}=|\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{c}}+|\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.$$

在规定零向量与任何向量都垂直的前提下，容易证明

第二个等号成立的根据是什么？

向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 垂直 $\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

事实上，若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中至少有一个零向量，依照零向量与任意向量都垂直的规定及数量积的定义，结论显然成立.

若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都不是零向量，则有 $|\boldsymbol{a}|\neq0$，$|\boldsymbol{b}|\neq0$，因此，当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 时，由

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}),$$

必有 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，也就是 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

反过来，若两非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 互相垂直，那么 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$，因此

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0.$$

例 1.3　试用向量证明三角形的余弦定理.

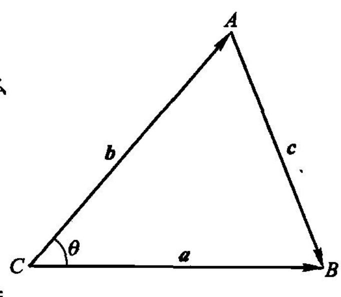


图 7-10

证　如图 7-10，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BCA=\theta$，$|CB|=a$，$|CA|=b$，$|AB|=c$，即是要证

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta.$$

记$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,则有 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,从而

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{c}|^2&=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})\cdot(-\boldsymbol{b})+2\boldsymbol{a}\cdot(-\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},(-\boldsymbol{b})})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).\end{aligned}$$

由于 $|\boldsymbol{a}|=a$, $|\boldsymbol{b}|=b$, $|\boldsymbol{c}|=c$ 及 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\theta$,即得

> 第三个等号成立的根据是什么？两个夹角$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$与$(\widehat{\boldsymbol{a},-\boldsymbol{b}})$之间有何关系？

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta.$$

4.2 向量的向量积

实际问题不仅需要研究向量的数量积,还需要研究两向量的向量积运算.

定义 1.2 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是两不共线的非零向量,若存在向量 $\boldsymbol{c}$,满足

(1) $\boldsymbol{c}$ 的模:$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$;

(2) $\boldsymbol{c}$ 的方向:垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所确定的平面,并与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 遵守右手系法则——右手的四指从 $\boldsymbol{a}$ 以不超过 π 的角转向 $\boldsymbol{b}$ 时,大拇指的指向就是 $\boldsymbol{c}$ 的方向(图 7-11).则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为两向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的向量积(也称为叉积),记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

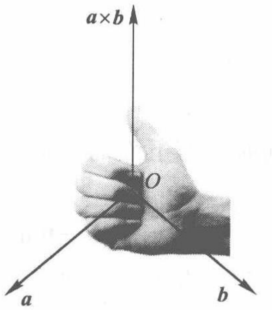


图 7-11

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线(包括 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中至少有一个为零向量)时,定义它们的向量积为零向量.

从上述定义容易得到:

> 请分析向量积与数量积有什么主要的不同？$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积与 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的向量积相同吗？你认为求两向量的向量积时要注意什么问题？

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

(2) 结合该定义及平行四边形的面积公式,两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积的模,等于以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积,或说是以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为两边的三角形面积的 2 倍.

(3) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线$\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

事实上,若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量,由于零向量与任何向量共线的规定及零向量与任何向量的向量积都为零向量,因此这时成立是显然的.

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都是非零向量,类似于两向量垂直的充要条件的证明,该结论的成立也是容易证明的.留给读者练习.

两向量的向量积满足以下规律:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\quad(\text{反交换律}),$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})\ (\text{与数乘的结合律}),$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}(\text{分配律}).$$