普通高等教育"十二五"规划教材·应用型本科系列

高等数学

（上册）

徐玉民　于新凯　主编

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材·应用型本科系列

高等数学

（上册）

徐玉民　于新凯　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书分上、下两册. 上册内容包括函数、极限、连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用、广义积分初步. 下册内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数及其微分法、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程. 书中每章都配有习题和本章学习要点.

本书是作者多年教学经验的总结，可用作独立学院非数学各专业学生的教材，也可作为相关人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/徐玉民，于新凯主编. —北京：科学出版社，2011
普通高等教育"十二五"规划教材·应用型本科系列
ISBN 978-7-03-032130-5

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①徐…②于… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 170465 号

责任编辑：王 静 王剑虹 相 凌 / 责任校对：张怡君
责任印制：张克忠 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京市安泰印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2011 年 8 月第一次印刷 印张：19 1/2
印数：1—6 500 字数：445 000

定价：36.00 元

总　　序

独立学院作为高等教育创新的产物，经过十余年的快速发展，已经取得了令人瞩目的成绩，为高等教育大众化和深化高等教育改革发挥了重要作用. 同时，也应看到独立学院在办学定位、培养目标、培养过程等诸多方面与公办一般本科院校存在着“同质化”倾向.

根据教育部关于独立学院培养适应地方、区域经济和社会发展需要的“本科应用型高级专门人才”指示精神，河北省独立学院进行了长期的调研和研究，从社会需求入手，对办学定位、培养目标、培养规格进行论证，明确了各自的人才培养目标，完成了人才培养的顶层设计，为推进教育教学改革奠定了基础；并定期召开独立学院专题研讨会，共同交流和探讨教育教学研究与改革问题.

2010 年 7 月在河北工业大学城市学院召开了“河北省独立学院教材建设研讨会”，会议达成了“以校际间合作课题组的形式，合力打造‘应用型本科’系列教材”的共识. 由河北省独立学院教材编委会组织编写、科学出版社出版的“应用型本科系列”教材终于陆续正式出版，这既是河北省独立学院优化课程内容和课程体系的研究成果，也是推动教师改革教学方法，改变“同质化”教学状况，培养基础扎实，专业能力较强，适应社会发展需求的高素质应用型人才的一项基础性工作.

本系列教材的主参编人员由独立学院教学经验丰富、治学严谨、教学效果好的优秀教师组成；他们来自不同的学校，以课题组研究的形式和高度的社会责任感，发挥各自的教学专长，分工协作，研究和讨论编写作大纲、体例和书稿.

正式出版的教材是经部分独立学院试用并根据教学效果修改书稿后出版的. 教材是体现教学内容和教学要求的知识载体，是保障和提高教学质量的重要基础. 以教材建设为抓手，改革和完善人才培养方案，优化课程体系，整合课程内容，稳步推进和深化教育教学改革，是保证独立学院健康持续发展，办出特色，培养高素质“应用型”本科人才的重要手段. 因此，我们将继续加强校际间合作，根据独立学院的专业特点和培养规格，深入研究，不断完善，努力编写出在国内有影响、特色鲜明的应用型本科系列教材.

河北省独立学院教材编委会

2011 年 8 月

前　言

作者按照高等学校本科高等数学的教学基本要求，结合十年来在燕山大学里仁学院开展的高等数学“适应性教学”实践的基础、吸收了河北工业大学城市学院高等数学教学的经验，面对独立学院学生的学习需求和学习能力编写了本书. 希望能够为本科三批学生的学习和发展提供一本适用的教材.

本书的编写，力图实现：

1. 满足不同学习基础和不同层次学习目标的需求. 教学内容分为三个层次：基本教学要求、较高教学要求、发展教学要求. 前二者在教学内容中体现，其中较高教学要求用“*”予以区分；发展教学要求在习题中（四）体现. 同时，为扩大知识视野，增加了选读内容，用“#”标明.

2. 促使学生独立完成学习过程. 课后完成的学习任务分为四个层次，（一）帮助学生从基本概念上理解学过的知识；（二）供学生在课后复习时同步完成，指明具体使用的方法并给出参考答案；（三）要求学生完成的作业，学生应运用学过的知识进行分析，选择方法，不提供参考答案，培养学生的独立思考能力；（四）发展教学要求，供学有余力的学生完成. 结合教学进程为实现进一步深造的学习目标奠定一个坚实的数学基础.

3. 激发学生自主学习的积极性. 通过设置单元检测题，由学生自己及时检测学习效果，检查学习中的问题，调整学习安排，养成自主学习的习惯.

燕山大学里仁学院和河北工业大学城市学院的部分教师结合教学实践经验，参加了教材编写.

参加上册编写的有：张波（第一章）、李秀菊（第二章）、鄂成国（第三章）、贠小青（第四章）、于 颖（第五章）、牛燕影（第六章、习题答案），上册书由牛燕影、郭献洲统稿.

参加下册编写的有：张丽超（第七章）、秦雅玲（第八章）、陆瑶（第九章）、张洁（第十章）、杨洋（第十一章）、肖晓丹（第十二章），下册书由肖晓丹、王艳统稿.

全书由徐玉民、于新凯统稿.

编　者

2011 年 6 月

目　　录

上　　册

总序
前言
第一章　函数　极限　连续 …… 1
第一节　函数 …… 1
一、变量及其变化区间 …… 1
二、函数概念 …… 2
三、函数的简单性质 …… 6
四、反函数及其图形 …… 9
五、复合函数 …… 10
六、基本初等函数　初等函数 …… 11
*七、双曲函数 …… 15
第二节　极限 …… 17
一、极限概念导引 …… 17
二、数列的极限 …… 18
三、函数的极限 …… 24
第三节　无穷小量与无穷大量 …… 29
一、无穷小量 …… 29
二、无穷大量 …… 30
三、无穷小量与无穷大量的关系 …… 31
四、无穷小量运算定理 …… 31
第四节　极限的运算法则 …… 32
第五节　两个重要极限 …… 36
一、夹逼定理(极限存在的准则) …… 36
二、重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ …… 37
三、重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ …… 39
第六节　无穷小的比较 …… 41
一、无穷小的比较 …… 41
二、等价无穷小的性质 …… 43

第七节　函数的连续性与间断点 …… 44
一、函数连续性的概念 …… 44
二、函数的间断点 …… 46
第八节　连续函数的运算与初等函数的连续性 …… 48
一、连续函数的四则运算 …… 48
二、复合函数的连续性 …… 48
三、反函数的连续性 …… 48
四、初等函数的连续性 …… 49
第九节　闭区间上连续函数的性质 …… 49
一、最大值定理和最小值定理 …… 49
二、有界性定理 …… 50
三、介值定理(中间值定理) …… 50
习题一 …… 51
本章学习要点 …… 64
第一单元(函数　极限　连续)检测题 …… 66
第二章　导数与微分 …… 69
第一节　导数概念 …… 69
一、变化率问题举例 …… 69
二、导数的定义 …… 70
三、导数的几何意义 …… 72
四、函数的可导性与连续性的关系 …… 74
第二节　基本初等函数导数公式　导数的四则运算法则 …… 76
一、基本初等函数的导数公式 …… 76
二、导数的四则运算法则 …… 77
第三节　反函数求导法则　复合函数求导法则 …… 80
一、反函数求导法则 …… 80
二、反三角函数的导数 …… 81
三、复合函数求导法则 …… 82
第四节　导数的基本公式和运算法则总结　*双曲函数和反双曲函数的导数 …… 85
一、导数的基本公式 …… 85
二、导数的运算法则 …… 86
*三、双曲函数的导数 …… 86
*四、反双曲函数的导数 …… 87
第五节　高阶导数 …… 87
第六节　隐函数的导数　由参数方程所确定函数的导数　相关变化率 …… 89

一、隐函数及其导数 …… 89
二、幂指函数 取对数求导法 …… 92
三、由参数方程所确定函数的导数 …… 92
#四、极坐标系中曲线的切线与矢径的交角公式 …… 94
五、相关变化率问题 …… 95
第七节 函数的微分法及其应用 …… 96
一、微分的概念 …… 97
二、微分的几何意义 …… 98
三、微分的运算 …… 98
四、微分在近似计算中的应用 …… 100
*五、微分在误差估计中的应用 …… 101
习题二 …… 103
本章学习要点 …… 112
第三章 中值定理与导数的应用 …… 115
第一节 中值定理 …… 115
一、罗尔(Rolle)定理 …… 115
二、拉格朗日(Lagrange)定理 …… 117
三、柯西(Cauchy)定理 …… 119
第二节 未定式求极限与洛必达法则 …… 120
一、“$\frac{0}{0}$”型未定式 …… 120
二、“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式 …… 122
三、其他类型未定式极限 …… 123
第三节 函数的单调性与极值的判别法 …… 124
一、函数单调性的判别法 …… 124
二、函数的极值及其求法 …… 125
第四节 函数的最大值、最小值及其应用问题 …… 128
第五节 曲线的凹凸性与拐点 …… 130
一、曲线的凹凸性 …… 130
二、曲线的拐点 …… 132
第六节 函数图形的描绘 …… 133
一、曲线的渐近线 …… 133
二、函数图形描绘举例 …… 134
第七节 平面曲线的曲率 …… 136
一、曲率概念 …… 137
二、弧长的微分 …… 138
三、曲率的计算公式 …… 139

四、曲率圆、曲率半径和曲率中心 …… 141

#第八节　方程的近似解 …… 143

一、二分法 …… 143

二、切线法 …… 144

习题三 …… 146

本章学习要点 …… 154

第二单元(一元函数微分学)检测题 …… 156

第四章　不定积分 …… 160

第一节　不定积分的概念与性质 …… 160

一、原函数概念 …… 160

二、不定积分概念 …… 161

三、基本积分表 …… 163

四、不定积分的性质 …… 164

第二节　换元积分法 …… 166

一、第一类换元积分法 …… 166

二、第二类换元积分法 …… 173

第三节　分部积分法 …… 178

第四节　有理函数的积分 …… 182

一、化真分式为简单分式之和 …… 182

二、四种最简分式的积分 …… 185

三、有理函数积分举例 …… 187

第五节　三角函数有理式的积分 …… 188

一、形如 $\int R(\sin x)\cos x\mathrm{d}x$、$\int R(\cos x)\sin x\mathrm{d}x$ 和 $\int R(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x$ 的积分 …… 188

二、形如 $\int R(\sin^2 x,\cos^2 x)\mathrm{d}x$ 和 $\int R(\tan x)\mathrm{d}x$ 的积分 …… 188

三、形如 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 的积分 …… 189

*第六节　简单无理式的积分 …… 191

一、形如 $\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})\mathrm{d}x$ 的积分 …… 192

二、形如 $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ 的积分 …… 192

三、形如 $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$ 的积分 …… 193

习题四 …… 194

本章学习要点 …… 199

第五章　定积分 …… 201
第一节　定积分的概念 …… 201
一、实例 …… 201
二、定积分的定义 …… 203
三、定积分的存在条件 …… 204
四、定积分的几何意义 …… 205
第二节　定积分的性质 …… 206
第三节　微积分的基本公式 …… 208
一、变速直线运动中路程函数与速度函数的关系 …… 209
二、变上限的定积分及其对上限的导数 …… 209
三、牛顿-莱布尼茨公式 …… 210
第四节　定积分的换元积分法 …… 212
一、第一类换元积分法 …… 212
二、第二类换元积分法 …… 213
第五节　定积分的分部积分法 …… 217
#第六节　定积分的近似计算 …… 219
一、矩形法 …… 219
二、梯形法 …… 220
三、抛物线法(辛普森公式) …… 220
习题五 …… 223
本章学习要点 …… 228
第六章　定积分的应用　广义积分初步 …… 230
第一节　平面图形的面积 …… 231
一、直角坐标系下平面图形的面积 …… 231
二、极坐标系下平面图形的面积 …… 234
第二节　体积 …… 236
一、平行截面面积为已知的立体的体积 …… 236
二、旋转体的体积 …… 237
第三节　平面曲线的弧长 …… 238
一、弧长的概念 …… 238
二、弧长的计算公式 …… 238
第四节　定积分的其他应用 …… 240
一、变力做功问题 …… 240
二、水压力问题 …… 241
*三、引力 …… 242
#四、物体的转动惯量 …… 243
五、平均值问题 …… 244

第五节 广义积分初步 …… 245
一、无穷区间上的广义积分 …… 245
二、无界函数的广义积分 …… 247
习题六 …… 248
本章学习要点 …… 252
第三单元(一元函数积分学)检测题 …… 254
部分习题答案与提示 …… 258
单元检测题答案与提示 …… 278
高等数学期末参考试题(第一学期) …… 281
参考文献 …… 285
附录 A 积分表 …… 286
附录 B 几种常用的曲线 …… 296
附录 C 极坐标 …… 299

第一章　函数　极限　连续

本章所研究的概念是微积分的理论基础. 函数是微积分的研究对象，极限方法是微积分的研究方法，是高等数学的基石，连续函数是微积分的主要研究对象. 由此可见，函数、极限和连续是高等数学中重要的概念.

第一节　函　　数

函数是微积分的研究对象，所谓函数关系就是变量之间的依赖关系. 本节是在中学已学知识的基础上，进一步研究函数概念，总结中学里已经学过的一些函数，并介绍函数的简单性质.

一、变量及其变化区间

1. 常量与变量

自然界的现象无一不在变化之中，在研究过程中会遇到各种各样的量，例如长度、面积、体积、时间、速度、温度等. 这些量一般分为两类：一类在研究过程中保持不变数值，称为常量；另一类在研究过程中可以取不同数值，称为变量. 常量用 a、b、c、α、β 等字母表示，变量用 x、y、z、u、v 等字母表示. 例如，研究圆的面积 A 与半径 r 的关系时，圆面积 A 和半径 r 看做变量，而圆周率 π 看做常量. 又如，在研究自由落体运动时，路程 S 和时间 t 看做变量，而重力加速度 g 则看做常量.

值得注意的是，一个量是常量或变量不是一成不变的，是有条件的，这要看所研究的具体问题而定. 例如，速度在匀速运动中是常量，而在匀加速运动中是变量.

2. 区间

我们研究变量，就是要研究变量的变化范围，称为变域. 变域一般表现为一个区间，所谓区间就是介于两个实数 a 与 b 之间的一切实数，在数轴上就是从 a 到 b 的线段，a 与 b 称为区间的端点. 当 $a<b$ 时，a 称为左端点，b 称为右端点.

区间可以分为以下几种：

(1)闭区间　包括 a 和 b 两个端点在内的一切实数，记作 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$.

(2)开区间　不包括 a 和 b 两个端点的一切实数，记作 (a,b)，即 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$.

(3)半开半闭区间　只包括一个端点的一切实数，记作 $[a,b)$ 或 $(a,b]$，即 $[a,b)=$

$\{x|a\leqslant x<b\}$或$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

除上述有限区间外，还有下列无限区间：

(4)小于 c 的一切实数记作$(-\infty,c)$，即$(-\infty,c)=\{x|x<c\}$.

(5)大于 c 的一切实数记作$(c,+\infty)$，即$(c,+\infty)=\{x|x>c\}$.

(6)全体实数，记作$(-\infty,+\infty)$，即$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$.

读者不难把无穷区间$[c,+\infty)$和$(-\infty,c]$的定义表述出来.

3. 邻域

设 a 和 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，称开区间$(a-\delta,a+\delta)$为点 a 的 δ 邻域，记作$U(a,\delta)$，a 叫邻域中心，δ 叫半径. 用不等式表示，点 a 的 δ 邻域为集合$\{x||x-a|<\delta\}$. 有时需要考虑把中心去掉的邻域，称之为开心邻域，记作 $\dot{U}(a,\delta)$，即$(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$.

二、函数概念

在微积分中所讨论的函数，其定义域和值域都是实数，记 **R** 为全体实数的集合. 为了叙述的方便，引进下列符号：

R 实数集合；　　**N** 自然数集合；

C 复数集合；　　**Z** 整数集合；

Q 有理数集合；　　**J** 无理数集合；

$x\in A$ x 是 A 的元素；

$A\subset B$ 集合 A 是集合 B 的子集；

$\exists$ “存在”或“找到”；

$\forall$ “任意”或“给定”；

$A\cup B$ 集合 A 与集合 B 的并集；

$A\cap B$ 集合 A 与集合 B 的交集.

为了引进函数概念，下面举几个例子.

例 1-1-1 自由落体运动. 设 $t=0$(s)开始，经过 t(s)后落下的距离为 s(m). 如果不计空气的阻力，则 s 与 t 之间有如下关系：

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

式中 $g=9.8\text{m/s}^2$.

设物体从开始到着地所需时间为 T(s)，则变量 t 的变化范围为 $0\leqslant t\leqslant T$. 当 t 在这个范围内每取一个值时，都可以从依存关系确定 s 的一个唯一确定的对应值. 例如：

$t=1\text{s}$ 时，$s=\frac{1}{2}g\times1^2=4.9(\text{m})$；

$t=2\text{s}$ 时，$s=\frac{1}{2}g\times2^2=19.6(\text{m})$.

在该例中，变量之间的依存关系由一个确定的公式给出. 应当指出，变量之间的依存关系并不一定由公式给出，下面两例则说明依存关系也可以由表格和图像给出.

例 1-1-2　下面表格中记录了某河流在 40 年内的平均月流量 $q(10^8\mathrm{m}^3)$和时间 t(月)之间的依存关系：

t/月	1	2	3	4	5	6
平均月流量 $q/10^8\mathrm{m}^3$	0.39	0.30	0.75	0.44	0.35	0.72
t/月	7	8	9	10	11	12
平均月流量 $q/10^8\mathrm{m}^3$	4.3	4.4	1.8	1.0	0.72	0.50

由上表可见，当月份 t 每取一个值时，月流量 q 就由表可确定唯一的对应值.

例 1-1-3　图 1-1 是某气象站自动温度记录仪描出的某一天气温变化曲线，它给出了时间 t 和气温 t_1 之间的依存关系.

时间 t 的变化区间是 $0\leqslant t\leqslant 24(\mathrm{h})$，当 t 在这个范围内每取一个值时，由曲线可唯一确定温度 t_1(℃)的一个对应值. 例如 $t=14\mathrm{h}$，$t_1=25$℃，这是一天的最高气温.

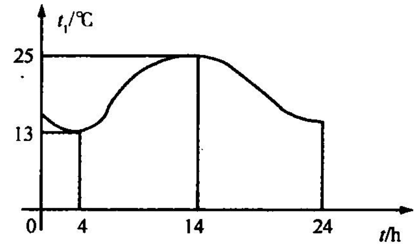

图 1-1

由以上各例可以看到，虽然它们所描述的问题中所考虑的量实际意义不同，但它们都表达了两个变量之间存在着依存关系，这种依存关系给出了一种确定的对应法则，依着这个法则，当一个变量在其变化范围内任取一个值时，另一个变量就按对应法则有一个确定值与之对应，两个变量之间的这种对应关系就是函数关系的实质. 下面给出函数概念的定义.

1. 函数定义

定义 1-1-1　设有两个变量 x、y 和非空集合 $D\subset\mathbf{R}$，$R\subset\mathbf{R}$，若存在一个对应规则 f，使得对每一 $x\in D$，都有唯一的 $y\in R$ 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的函数，或称 f 是从 D 到 R 的一个映射，通常将函数简记为

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$.

按照定义，对每个 $x\in D$，由对应法则 f，总有唯一确定的值 $y\in R$ 与之对应，该值称为函数在点 x 处的函数值，记作 $f(x)$. 函数值 $f(x)$的全体所构成的集合称为函数的值域，记作 R_f，即 $R_f=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$.

函数的记号“f”也可以改用其他字母，如“φ”、“F”等.

在函数定义中主要有两个要素，即函数的定义域和对应法则. 关于对应法则，在定义中用 f 表示. 如果同时讨论几个不同函数，应该用不同的字母表示不同的对应法则. 例如用 F、φ、g 等. 如果两个函数的定义域和对应法则相同，尽管它们是用不同字母表示的，但它们仍表示是同一函数. 关于定义域，如果考虑的是实际问题，应由问题的实际意义而定. 如例 1-1-1 中的定义域是 $D_f=[0,T]$，例 1-1-2 中的定义域是 $D_f=\{1,2,\cdots,12\}$，例 1-1-3 中的定义域是 $D_f=[0,24]$. 如果不考虑函数的实际意义，我们规定函数的定义域，应是使函数算式有意义的自变量所能取的值的全体. 例如，$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域是$[-1,1]$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域是$(-1,1)$，$y=\lg(x-1)$的定义域是$(1,+\infty)$.

最后指出几点：

(1)根据函数的定义，对于定义域中的每一 x 值，函数仅有一个确定值与之对应. 有时为了讨论问题方便，我们可以把定义放宽，如果对于定义域内的任一x 值，函数的对应值有几个，这时称函数为多值函数. 例如，圆的方程 $x^2+y^2=r^2$，对于$x\in(-r,r)$，可以确定 y 的对应值有两个，即 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$，这是多值函数.

在遇到多值函数时，总是分成几个单值函数，称为单值支. 例如，$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$可以分成 $y=\sqrt{r^2-x^2}$. 和 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$两个单值支. 今后，如无特别声明，所讨论的函数均指单值函数.

(2)函数的定义域不能是空集.

(3)如果所研究的变量多于两个，则称所确定的函数为多元函数. 关于多元函数，将在下册第八章中研究.

2. *函数的表示法*

由上面所举的三个例子可见，函数有三种表示法：

(1)解析法　函数的对应法则用一个公式或解析式子表示. 如例 1-1-1 中的 $s=\frac{1}{2}gt^2$，解析法的优点是便于作理论研究与数值计算，但不直观.

(2)表格法　如例 1-1-2 中的依存关系表. 表格法的优点是便于直观查找，但不便于作理论研究，也不直观.

(3)图示法　如例 1-1-3 中的图 1-1. 图示法的优点是直观，但不便于作理论研究.

在实际应用中，往往是三种方法配合使用，对于用公式法表示的函数，我们常作出它的图形.

3. *分段函数*

有时由于变量之间的函数关系较为复杂，需用几个式子来表示，这时不能把它们理解为几个函数，而应理解为由几个式子表示的一个函数. 例如，1g 冰由 -10℃上升到 10℃，它所吸收的热量 Q 与温度 t 之间存在着函数关系. 由于冰的比热容为 0.5×4.18 J/(g・K)，水的比热容为 1×4.18J/(g・K)，1g 0℃的冰变成 0℃的水的溶解热为 80×4.18J，所以 Q 与 t 的函数关系为

$$Q=\begin{cases}0.5\times4.18(t+10), & -10\leqslant t\leqslant 0,\\ 1\times4.18(t+85), & 0<t\leqslant 10,\end{cases}$$

上面的函数叫分段函数.

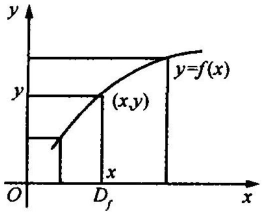

图 1-2

4. *函数的图形*

设函数 $y=f(x)$的定义域是 D_f. 对于任一$x\in D_f$，对应的函数值为 y，这样就确定了平面上一点(x,y)，当 x 遍取 D_f 的所有数值时，点(x,y)就确定了平面上一个集合 C，即

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D_f\},$$

点集 C 称为函数 $y=f(x)$的图形(图 1-2).

下面举几个常见的函数的例子.

例 1-1-4 常数 $y=c$ 可以看成是一个特殊的函数，定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{c\}$，其图形是一条平行于 x 轴的直线(图 1-3).

例 1-1-5 函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，它的图形如图 1-4 所示.

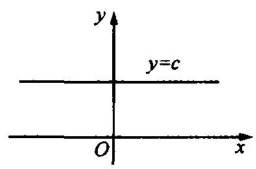

图 1-3

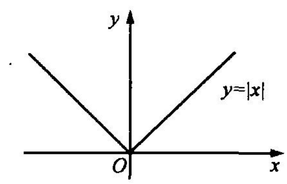

图 1-4

例 1-1-6 函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 称为符号函数，它的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域是 $R_f=\{-1,0,1\}$，其图形如图 1-5 所示.

例 1-1-7 函数 $y=[x]$ 称为取整函数，其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数. 显然 $D_f=(-\infty,+\infty)$，$R_f=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，其函数图形为阶梯曲线，如图 1-6 所示.

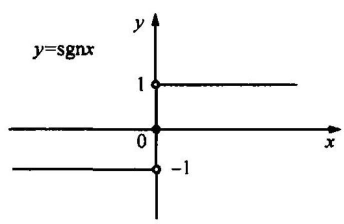

图 1-5

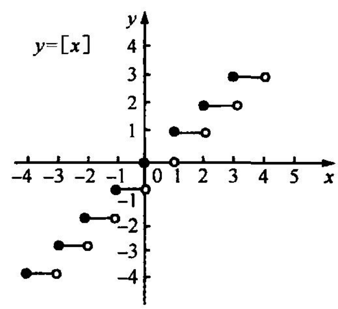

图 1-6

例 1-1-8 求 $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$ 的定义域.

解 若使函数有意义，x 必须满足

$$\begin{cases}1-x^2\neq 0,\\ x+2\geqslant 0,\end{cases}$$

解此不等式组，得 $x\geqslant -2$ 和 $x\neq\pm1$. 函数的定义域 $D_f=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

例 1-1-9 求函数 $y=\arcsin(3x-1)+\lg(1-x)$ 的定义域.

解 若使函数有意义，x 必须满足

$$\begin{cases}|3x-1|\leqslant 1,\\ 1-x>0,\end{cases}$$

解此联立不等式,得 $x<1$ 和 $0\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}$,函数的定义域为 $D_f=\left[0,\frac{2}{3}\right]$.

例 1-1-10 已知 $f(x)=x4^{x-2}$,求 $f(2)$,$f(-2)$,$f(t^2)$,$f\left(\frac{1}{t}\right)$.

解 $f(2)=2$,$f(-2)=-2\times4^{-4}$,$f(t^2)=t^2 4^{t^2-2}$,$f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t}4^{\frac{1}{t}-2}$.

例 1-1-11 已知 $f(x)=x^3+1$,求 $f(x^2)$,$[f(x)]^2$.

解 $f(x^2)=(x^2)^3+1=x^6+1$,$[f(x)]^2=[x^3+1]^2$.

例 1-1-12 已知 $f(x-1)=x^2+2x+4$,求 $f(x)$.

解 令 $x-1=t$,$x=t+1$,$f(t)=(t+1)^2+2(t+1)+4=t^2+4t+7$,所以

$$f(x)=x^2+4x+7.$$

例 1-1-13 判断函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 是否表示同一函数. 说明理由,并指出在哪个区间上是相同的.

(1) $f(x)=x$,$\varphi(x)=\sqrt{x^2}$;

(2) $f(x)=2\lg x$,$\varphi(z)=\lg x^2$.

解 (1)显然 $D_f=D_\varphi=(-\infty,+\infty)$,但对应法则不同,因为 $\varphi(x)=|x|$,当 $x<0$ 时,$\varphi(x)=-x$,$f(x)=x$. 两个函数在 $[0,+\infty)$ 上是相同的.

(2)因为 $D_f=(0,+\infty)$,$D_\varphi=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,定义域不同,故不是同一函数. 两个函数在 $(0,+\infty)$ 上是相同的.

例 1-1-14 求函数

$$y=f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant0,\\ x^2+4, & x<0\end{cases}$$

的定义域,试计算 $f(0)$,$f(1)$,$f(-1)$,$f(x-1)$ 并画 $y=f(x)$ 的图形.

解 $D_f=(-\infty,+\infty)$,

$f(0)=1$,$f(1)=3$,$f(-1)=5$,

$$f(x-1)=\begin{cases}2(x-1)+1, & x-1\geqslant0,\\ (x-1)^2+4, & x-1<0,\end{cases}$$

即

$$f(x-1)=\begin{cases}2x-1, & x\geqslant1,\\ x^2-2x+5, & x<1,\end{cases}$$

函数的图形如图 1-7 所示.

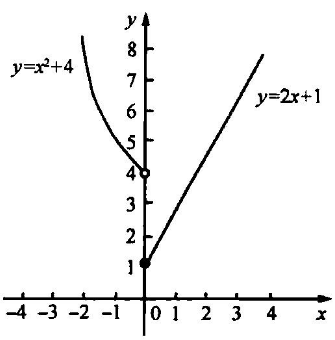

图 1-7

三、函数的简单性质

1. 函数的有界性

如果存在正数 M,使对一切 $x\in I$,恒有不等式 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,其中 $I\subset D_f$,则称 $y=f(x)$ 在 I 上有界;否则,称 $f(x)$ 在 I 上无界.

例如,函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界,因为 $|\sin x|\leqslant1$,对一切 $x\in$