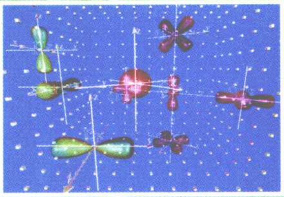
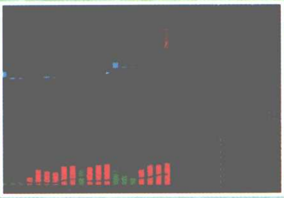
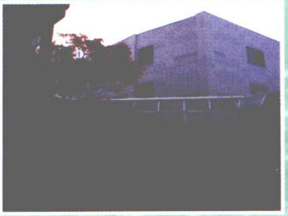
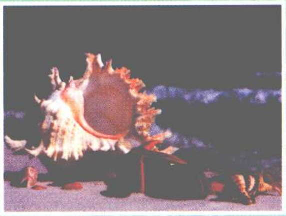
大学文科数学

华东师范大学数学系 编









上海市著名商标
华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

大学文科数学

华东师范大学数学系 编

华 东 师 范 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学/华东师范大学数学系编. —上海:华东师范大学出版社,2011.9
ISBN 978-7-5617-8925-4

Ⅰ.①大… Ⅱ.①华… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 187084 号

大学文科数学

编　　者　华东师范大学数学系
责任编辑　朱建宝
审读编辑　李　娜
封面设计　黄惠敏

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　上海华大印务有限公司
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　7.25
字　　数　162 千字
版　　次　2011 年 11 月第一版
印　　次　2011 年 11 月第一次
印　　数　3100
书　　号　ISBN 978-7-5617-8925-4/O·214
定　　价　16.00 元

出 版 人　朱杰人

前言

本书是给大学文科学生写的数学书，内容有微积分和线性代数，是高等数学中最基本的内容. 作为给文科学生学习的教材，本书的目的不是为了教会文科学生如何进行数学推理，掌握数学的逻辑系统. 我们希望用数学的思想、历史和应用将基本内容串联起来，使文科学生体会到数学并不是只有抽象的令人生畏的外表，还有亲切自然的一面.

通常认为数学有三个层面的意义，第一是作为理论的数学，主要是培养学生的逻辑思维能力，是数学研究所必须具备的；第二是作为应用的数学，以前数学是作为一种工具在科学技术中发挥作用，而近年来数学与计算机的结合直接成为能创造财富的生产力了；第三是作为文化修养的数学，我们从小学就开始学习数学，真正将来能从事数学理论研究和实际应用的人毕竟还是少数，大多数人学习数学是作为训练理性思维能力的载体，是人的基本素质的一部分. 一般我们不会要求每个学生都能写诗绘画，但会要求具备艺术修养、文学素质. 对待数学也应该如此.

既然是基本素质，我们仅仅知道初等数学，那就很不够了. 人类进入工业社会，数学是起了很大作用的. 微积分的诞生，在很大程度上影响了工业革命的进程，同时开创了人类科学的黄金时代，成为人类理性精神胜利的标志. 而微积分最重要的思想就是“极限”，这是近代数学与初等数学的本质性的差别. 作为21世纪的大学生应该要了解这一点，不然就很难说已经具备了数学的基本素质. 这也是编写本书的想法.

尽管数学素质非常重要，但文科学生对学习数学还是会有一些疑问. 比如，数学在人文学科中有什么应用？

实际上，在半个世纪以前的很长时间内，数学的应用还基本局限于物理学、力学等传统领域. 二战以后，人们将数学应用于信息、控制领域，产生了“信息论”和“控制论”. 发电报传送的信息，用脑控制手去捡东西都成为了数学研究的对象. 影响更大的是美国数学家冯·诺依曼基于数学基础的计算机方案，从理论上为我们今天计算机的飞速发展打下了基础. 在上世纪50年代，数学又被应用到了金融学中，诞生了数理金融学，在以前认为只要简单算术就可以解决问题的金融学中，用起了大量的现代数学.

医学从来就被认为是实验科学，基本是靠医生的经验去解决问题，所谓郎中还是老的好. 但是在上世纪60年代诞生的“X光断层扫描技术”，即我们熟知的CT机，就是数学和计算机技术相结合的产物. CT大大提高了疾病的诊断精度，极大地减少了

前言

对医生经验的依赖，是数学直接产生生产力的一个很好的例子.现在，数学在文学、考古学等纯文科领域也有了很多的应用.如用数学方法研究文学作品的作者，典型的例子是上世纪80年代，复旦大学数学系李贤平教授使用数学中统计学方法，对谁是红楼梦的作者进行了研究，得出了自己的结论.在考古学中应用数学，产生了新的学科：计量考古学.

总之，随着社会经济的发展，数学必将在更多的领域中发挥作用.纵观这几十年，很多伟大的发现，都是在传统认为不需要数学的地方运用了数学而获得的.所以，学习数学对于文科学生来说，除了基本素质的要求，还应该看高一层.

在文科专业中，很多学生并不喜欢数学，这或许是由于多少年来我们数学教学总是循着定义、定理、证明这样一条形式化的路线，中学数学基本也是如此，甚至将数学教学变成了解题教学.这种过于死板的教学，对学生的吸引力当然是很有限的，很多学生对数学的反感，大多源于此.在本书中，希望通过我们的探索和努力，让读者对数学有一个新的认识.

本书在成书过程中参考了不少文献和书籍，重要的都列在了书末的参考书目一栏，特别是参考书目1，书中很多素材来自于该书.

本书由柴俊任主编，并完成全部书稿.同时本书的编写得到了华东师大教学建设基金的资助，也得到了数学系很多同事的帮助，特别是程靖、林磊、汪志鸣、戴浩晖、王一令、袁富荣和贾挚，他们提出了很多非常好的意见和建议，林磊、汪志鸣、戴浩晖、王一令还为本书提供了素材，程靖和贾挚阅读了本书的初稿，改正了初稿中不少错误，在此对他们表示衷心的感谢.

由于试着要改变一些传统，所以有些想法会有局限，也会有很多地方存在疏漏，非常需要广大读者提出批评和建议，我们一定会认真听取、衷心感谢.

柴 俊

2011年6月于华东师大

目录

第一章

微积分研究的对象——函数

函数是微积分研究的对象，要学习微积分，首先要了解函数. 由于在中学阶段已经学习了函数的相关知识，对于函数的基本概念读者应该都是熟悉的. 所以本章仅对函数作一个概括，给出一些理解性的论述.

§1 表示变量因果关系的函数

一、函数的概念

世间出现的各种变量之间，有些是有联系的，有些则没有. 函数表达的就是变量之间的因果关系，是用来描述事物(变量)关系变化的工具. 我们熟悉的一元函数就是两个变量的相互关系，如圆的面积 S 与它的半径 r 这两者就有关系 $S=\pi r^2$. 半径定了，面积自然定了(对于半径 r，有唯一确定的面积 S). 因此变量 r 就称为自变量，S 的变化是由于 r 的变化引起的，就称为因变量. 产生 S 的法则(公式 $S=\pi r^2$)就称为**对应法则**. 在一般情形下，对应法则往往用 f 表示. 因此函数的表达式就是

$$y=f(x),\ x\in D.$$

这里 x 是自变量，y 是因变量，x 的取值范围 D 称为函数的**定义域**，因变量的取值范围称为**值域**. 中学数学告诉我们，一个函数由它的定义域和对应法则唯一确定，因此值域并不是一个函数的独立要素.

函数的英语名称是"function"，所以为什么我们习惯用 f 表示函数也就清楚了. 实际上，用其他字母表示函数也是一样的.

从上面的讨论可以知道，函数的表达式是函数对应法则的**代数解释**.

在中学阶段我们就已经知道，一个函数可以与直角坐标中的一条曲线相对应，这条曲线称为该函数的图形或图象，这就是对应法则的**几何解释**. 如函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图形就是图 1－1 表示的曲线.

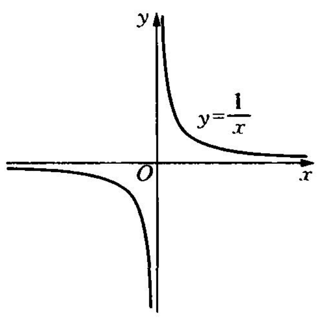


图 1－1　函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图形

一条几何曲线可以用某个函数来表示，这是在笛卡儿(法国数学家，1596—1650)创立直角坐标系以后的事情. 也正是笛卡尔，将代数和几何结合在一起，建立了解析几何. 代数(公式)和几何(图形)的相互转化，极大地促进了数学的发展，同时也大大增加了数学的应用性. 在这之前，代数和几何是两码事，没有代数帮忙的欧氏几何(中学称为平面几何)，大家都已经领教过它的困难！直角坐标系的建立是近代数学的起点，为微积分的创立打下了基础.

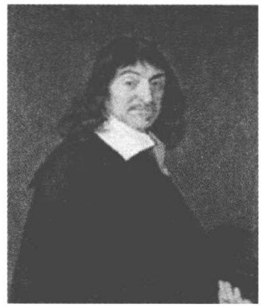


图 1-2　勒奈·笛卡儿
(Rene Descartes)

二、函数的表示

在以往的学习中，我们比较熟悉函数的解析表示法(或称公式法)，即函数的两个变量之间的关系用一个公式来表示，如线性函数 $y=ax+b$；幂函数 $y=ax^n$；三角函数 $y=\sin x$ 等等. 但有时两个变量尽管有联系，但却很难找出一个公式来表示它们之间的函数关系，比较常见的例子是气温 C 与时间 t 的关系，不同时间有不同的温度，可以画出图，也可以列出表，但却找不到合适的解析式来表示这个关系. 但它是一个函数，因为在某一个时间 t_0，有唯一确定的温度 C_0 与 t_0 对应. 所以，函数还可以用一个表格(数值的方法)表示(见表 1.1)，或者用一个曲线的图形来表示(见图 1-3).

表 1.1　2010 年 9 月 8 日从 9 点到 24 点上海世博会入园人数(单位：千人)

时间 t	9	10	11	12	13	14	16	18	20	22	24
入园人数 L	0	141	190	202	209	214	224	241	249	250	250

用图形表示函数：直角坐标中的一条曲线，当任何垂直于 x 轴的直线与该曲线最多只有一个交点时，这条曲线就表示一个函数.

图 1-3 中函数的定义域 D 是曲线在 x 轴上的投影 $[a, b]$；对应法则是这样的，在定义域中任取一点 $x_0 \in [a, b]$，过点 x_0 与 x 轴垂直的直线与曲线交于唯一的一点 $M_0(x_0, y_0)$，M_0 的纵坐标 y_0 就是点 x_0 的对应值. 所以图 1-3 的图形就表示了一个函数：$y = f(x)$.

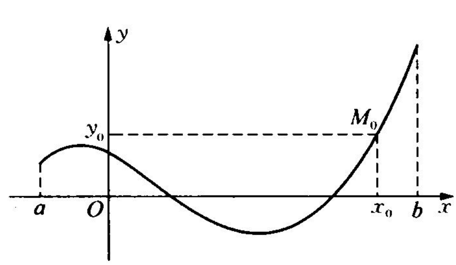


图 1-3　图形表示函数

通过上面的讨论可知，函数通常有三种表示方法：**公式法**(又称解析法)、**图形法**和**数值法**. 在计算机飞速发展的今天，数值法越来越显示出它的重要性，因为计算机就是以数值计算见长. 而且在我们日常生活和社会人文科学中碰到的函数关系，很多都是数值形态的，我们经常看到的国民经济的统计数据，人口与消费等等，都是数值形态的.

在这几种表示方法中，公式法的优点是函数关系明确，便于数学推导，在理论研究上非常重要. 图形法的优点是形象，便于宏观观察，很容易看出函数的变化趋势，但不像公式法那样精确，至于要求一点的函数值那就只能根据图形估计了. 由此看到，图形法的优点

恰是公式法的缺点，图形法的短处又恰是公式法的长处.

数值法表示函数其实在中学就已经有过体验，如数学手册中的三角函数表、对数表等等就是用数值法表示三角函数和对数函数的例子. 数值法的优点是表中列出的那些点（只能是有限个！）的函数值非常明确，但缺少整体的对应. 正因为这个缺点，以前在数学教材中很少受到关注，但现在我们应该多多关注它了.

三、基本初等函数和初等函数

从上面的讨论知道，函数的种类有很多，有些能用公式表示，有些只能用表格和图形表示. 在所有能用公式表示的函数中，有六类我们常见的函数称为**基本初等函数**，分别是：

1. 常值函数：$y=C$（C 是常数），即不论自变量取何值，其对应的函数值总是常数 C. 常值函数的图形如图 1－4.

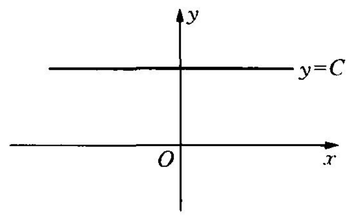


图 1－4

2. 幂函数：$y=x^\alpha$，α 是一个实数. 中学阶段的幂函数要求 α 是有理数. 当 $\alpha=2$ 时，就是熟知的二次函数 $y=x^2$（图 1－5）；当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时，为 $y=\sqrt{x}$（图 1－6）；$\alpha=-1$ 时，是反比例函数 $y=\frac{1}{x}$（图 1－1）.

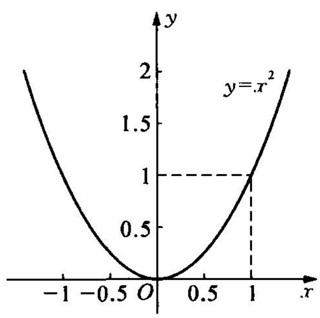


图 1－5

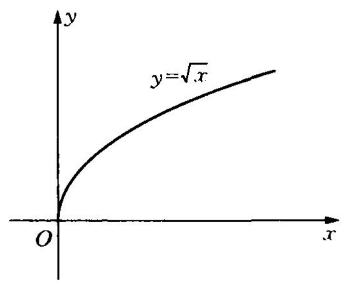


图 1－6

3. 指数函数：$y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$），特别当 $a=\mathrm{e}$ 时，$y=\mathrm{e}^x$（图 1－7）.

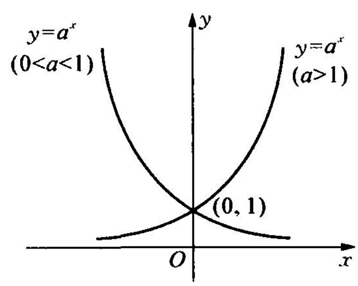


图 1－7

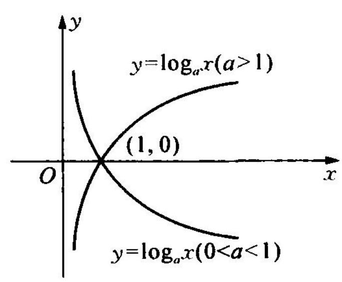


图 1－8

4. 对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$）. 对数函数是指数函数的反函数，当 $a=\mathrm{e}$ 时，就是非常重要的自然对数函数 $y=\ln x$（图 1－8）.

5. 三角函数：$y = \sin x$，$y = \cos x$，$y = \tan x$，$y = \cot x$(图 1－9 和图 1－10)．

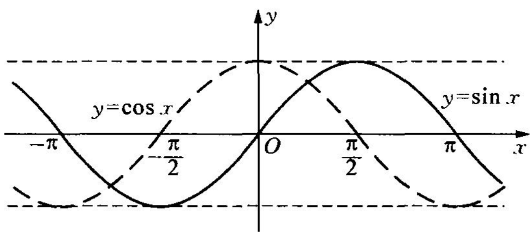


图 1－9

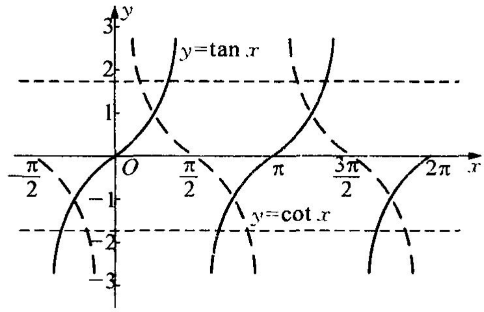


图 1－10

6. 反三角函数：$y = \arcsin x$，$y = \arccos x$，$y = \arctan x$，$y = \operatorname{arccot} x$(图 1－11～图 1－14)．

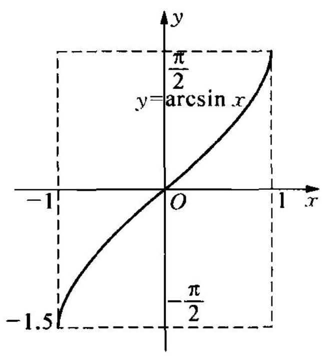


图 1－11

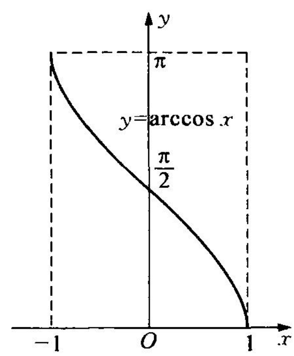


图 1－12

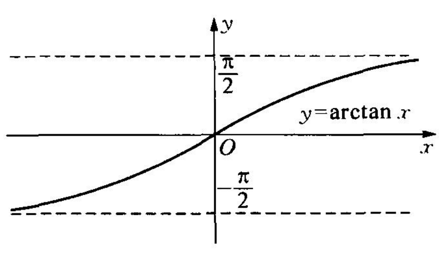


图 1－13

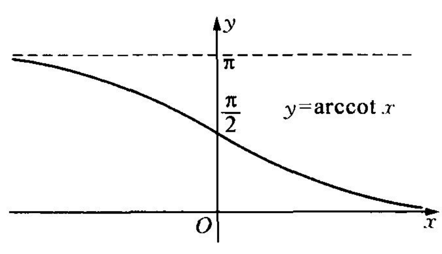


图 1－14

这六类函数经过有限次的加减乘除以及复合运算，产生的函数如果能用一个公式表示，就称为**初等函数**．在现阶段我们所看到的函数绝大部分都是初等函数．

什么是函数的复合运算？有时两个变量之间的关系不那么直接，需要通过第三个变量联系起来，如在物体的自由落体中，动能 E 与时间 t 之间的关系就是要通过速度 v 获得：物体的质量是 m，动能与速度的关系是 $E = \frac{1}{2}mv^2$，速度又是时间的函数 $v = gt$，所以动能 E 就成了时间 t 的函数 $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2$．这个过程，就是函数的复合，$E =$

$\frac{1}{2}mg^2t^2$ 称为由函数 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 与 $v=gt$ 复合得到的**复合函数**，中间出现过的变量 v 称为**中间变量**.

复合函数实际上是通过若干个中间变量，最终将两个不直接相关的变量（自变量和因变量）建立起函数关系. 就如甲乙两人本不直接认识，通过丙的介绍相识，丙就是中间变量，甲乙之间的关系犹如复合函数.

一般情况下，对于两个函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$，如果 $g(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域有公共部分，则这两个函数就可以复合成 $y=f(g(x))$（见图 1-15）. 通常称 f 为**外层函数**，称 g 为**内层函数**.

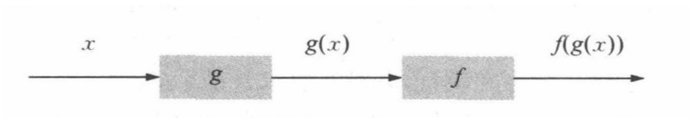


图 1-15　函数的复合

例 1　函数 $y=e^{\sin x}$ 是由基本初等函数 $y=e^u$，$u=\sin x$ 复合而成的.

例 2　分段函数. 在自变量不同的取值范围用不同的公式来表示同一个函数，称为**分段函数**，如下面两个函数就是分段函数，它们的图形分别是图 1-16 和图 1-17.

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ e^x, & x\geqslant 0,\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

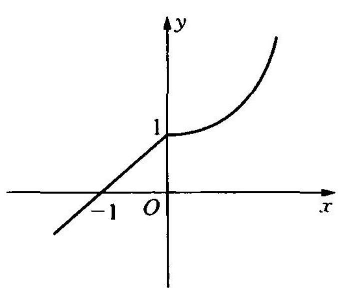


图 1-16

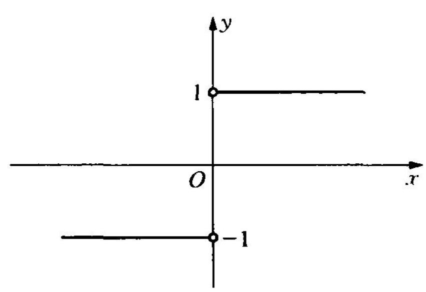


图 1-17

分段函数一般是不能用一个公式表示的，因此不是初等函数，但也有例外，请看下例.

例 3　$y=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 是分段函数（图 1-18），但可以用 $y=\sqrt{x^2}\,(=|x|)$ 表示，所以是初等函数.

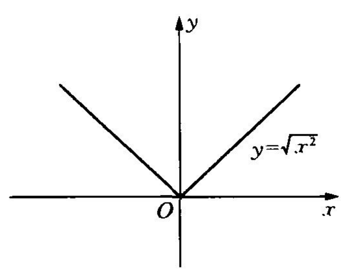


图 1-18

例 4　我们知道，世界上有两个温度标准：华氏度和摄氏度. 我国用摄氏温标，美国用华氏温标. 这两个温标之间的关系是 $y=\frac{5}{9}(x-32)$，其中 x 表示华氏温度，y 表示摄氏温度. 这是一个线性函数，也可以看成幂函数和常值函数相减. 有了这个公式，你就不会被华氏温度搞糊涂了.

四、函数的基本性质

函数的基本性质是指有界性、单调性、奇偶性和周期性.不是每个函数都会有这些性质,但了解这些性质对我们今后进一步熟悉和学习微积分是有很大好处的.

1. 有界与无界. 函数的有界性是一个很重要的性质,所谓有界,就是指这个函数的值域可以包含在某个闭区间中.我们用数学化的语言表述如下:

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有定义,如果存在一个正数 $M>0$,使函数的值域 $\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}\subset[-M,\ M]$,即 $|f(x)|\leqslant M$ 对所有的 $x\in D$ 成立,则称函数 f 是数集 D 上的**有界函数**,或称 f 在 D 上有界.否则就称 f 在 D 上**无界**.

注意:定义中的 M 只要存在就行,并没有要求是最小的.

无界是有界的反面,函数 f 在 D 上无界就是再大的闭区间也无法将该函数的值域包含在内,总有例外.数学化的表述就是:对于任何无论怎样大的正数 M,总有 $x_M\in D$,使得

$$|f(x_M)|>M.$$

欣赏:宋朝叶绍翁《游园不值》中的诗句"春色满园关不住,一枝红杏出墙来"从文学的意境表达了无界的含义:再大的园子(闭区间)也无法将所有的春色(函数值)关住,总有一枝红杏(某个函数值)跑到园子的外面.诗的比喻如此恰切,其意境把枯燥的数学语言形象化了.

例 5 正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 在其定义域 $(-\infty,\ +\infty)$ 内是有界函数,因为对一切的 $x\in(-\infty,\ +\infty)$,都有 $|\sin x|\leqslant 1$, $|\cos x|\leqslant 1$.

反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,\ +\infty)$ 上是有界函数,因为当 $x\in[1,\ +\infty)$ 时,$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$;而在 $(0,\ +\infty)$ 上则是无界的,因为当自变量 x 无限接近于 0 时,其函数值会无限地增大,再大的闭区间也无法将其全部包含(图 1-1).

可见,函数的有界性与所考虑的自变量的取值范围有关,在大的范围无界,在小的范围内可能就有界了!

函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上有界的几何解释是:函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上的图形位于两条直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间(图 1-19).

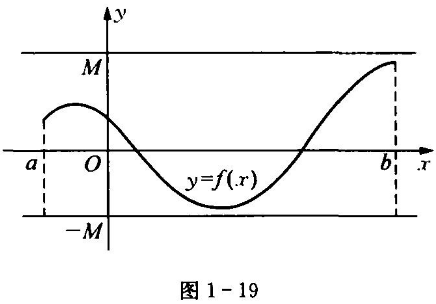


图 1-19

例 6 判断下列函数的有界性:

(1) $y=4+3\sin x-5\cos 2x$;　　(2) $y=\ln x,\ x\in(1,\ +\infty)$.

解 一个函数 $f(x)$ 是否有界,就看是否能找到一个正数 M,使得对一切在讨论范围的 x,有 $|f(x)|\leqslant M$. M 只要存在即可,并不要求是最好的,或最小的.

(1) 因为

$$
\begin{aligned}
|y| = |4 + 3\sin x - 5\cos 2x| &\leqslant 4 + 3|\sin x| + 5|\cos 2x| \\
&\leqslant 4 + 3 + 5 = 12(M = 12),
\end{aligned}
$$

所以 $y = 4 + 3\sin x - 5\cos 2x$ 有界.

(2) 观察 $y = \ln x$ 的图象(图 1-8),可以判断出 $y = \ln x$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上无界. 验证如下:

对任意 $M > 0$(不论多大),只要取 $x_M = \mathrm{e}^{M+1} \in (1, +\infty)$,就有 $\ln x_M = \ln \mathrm{e}^{M+1} = M+1 > M$,所以,$y = \ln x$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上无界.

2. 单调增加与单调减少. 函数的单调增加(或减少)是指当自变量变大时,对应的函数值也在变大(或变小). 函数单调增加和减少统称为**函数的单调性.**

如果一个函数的定义域是有限集,这个函数就可以列成表格. 函数是否单调,只要把自变量由小到大排列起来,看函数值是否不断增加(或减少)就可以了.

例 7 30 年来我国国民生产总值(简称 GDP)年度数据见表 1.2,从表中看到,随着时间的增加,GDP 也增加,并且是单调增加函数.

表 1.2 我国历年 GDP 数据,是单调增加函数

年份	1978	1980	1985	1990	1995	2000	2002	2005	2006	2007	2008
GDP(亿元)	3624	4517	8964	18 548	58 487	89 468	104 791	183 868	211 923	257 306	314 045

由于只有有限个数据,一个个地比较就可以判断了,没有什么困难. 但是如果定义域是一个区间,就麻烦了,因为你根本无法将一个区间的实数按大小排起来,也就无法逐一检验"自变量变大时,对应的函数值也在变大"这个条件. 怎么办? 于是,我们用数学化的方法定义如下:

定义 2 设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义,如果对于任意两点 $x_1, x_2 \in D$,当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) < f(x_2)$(或 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$),则称函数 $f(x)$ 在 D 上严格单调增加(或单调增加).

如果对于任意两点 $x_1, x_2 \in D$,当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) > f(x_2)$(或 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$),则称函数 $f(x)$ 在 D 上严格单调减少(或单调减少).

在这里,用"任意两点 $x_1, x_2 \in D$,当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) < f(x_2)$"完成了对"自变量变大时,对应的函数值也在变大"的检验,显示了数学语言的简洁而且严密.

例 8 通过函数的图形,容易看出,线性函数 $y = 2x + 1$(图 1-20) 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调增加;指数函数 $y = \mathrm{e}^x$(图 1-7) 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调增加;$y = \cos x$(图 1-9) 在闭区间 $[0, \pi]$ 上严格单调减少.

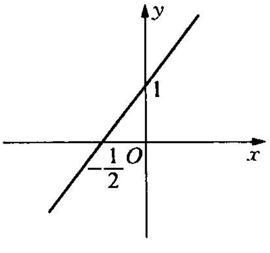


图 1-20

与有界性类似,函数的单调性也与自变量的取值范围有关. 如二次函数 $y = x^2$(图 1-5),在 $[0, +\infty)$ 上单调增加,在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少,而在整个定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上则不具有单调性.

3. 奇偶性和周期性. 在中学数学学习中,这两个性质应该比较熟悉,这里仅作简单介绍,不再多叙.

如果 $f(-x)=f(x)$, $x\in D$,则称 f 为**偶函数**;如果 $f(-x)=-f(x)$, $x\in D$,则称 f 为**奇函数**. 这里 D 是 f 的定义域. 可见,奇函数的图形是关于原点对称的,而偶函数的图形是关于 y 轴对称的. 还有一点要注意,讨论函数的奇偶性时,其定义域 D 一定是关于原点对称,即当 $x\in D$ 时, $-x$ 也要属于 D.

如果 $f(x+T)=f(x)$,对一切 $x\in D$ 成立,则称 f 为**周期函数**,T 称为周期. 使得 $f(x+t)=f(x)$ 成立的最小正数 t 称为 f 的最小正周期. 一般所说的周期都是指最小正周期,如 $y=\sin x$ 的周期是 2π, $y=\tan x$ 的周期是 π 等等.

§2 函数的实例

这里举几个函数的实际例子,领略一下函数的实用价值.

例 1 复利问题. 银行要对存贷款计算利息,是金融学中的一个基本问题. 计息方法有多种,最常见的有单利计息和复利计息. 所谓复利计息,就是每个计息期满后,随后的计息期将前一计息期得到的利息加上原有本金一起作为本次计息期的本金,俗称"利滚利".

这好比一对兔子,经过一段妊娠期之后,会生出一对小兔子来. 此后,大兔子继续生小兔,小兔子又会生小小兔,小小兔还会生小小小兔子……. 试问经过一段时间之后,将会有多少对兔子? 这与复利是同一性质的问题. 下面来看复利计息的计算.

一般银行计息周期是以年为单位的,即每年计息一次. 设年利率为 r,本金为 A,一年以后的利息为 $I=Ar$,本利和(本金加利息的和)为

$$A_1=A+Ar=A(1+r).$$

于是第二个计息期以 A_1 为本金,到期的本利和为

$$A_2=A_1+A_1r=A(1+r)+A(1+r)r=A(1+r)^2.$$

因此,经过连续 n 个计息期的到期本利和就是下面的**复利计息公式**

$$A_n=A(1+r)^n. \tag{1.1}$$

如果每年不是计息一次,而是计息 t 次(如三个月的定期存款,每年计息 4 次),于是原 n 个计息期就变成了 nt 个计息期,而每个计息期的利率则是 $\frac{r}{t}$,这样公式(1.1)就变成

$$A_n=A\left(1+\frac{r}{t}\right)^{nt}. \tag{1.2}$$

以后还会看到,当 t 越来越大趋于无穷时,公式(1.2)会是怎样的结果.

例 2 测定生物体年龄. 碳 14(^{14}C)是放射性物质,随时间而衰减,碳 12 是非放射性

物质. 活性物体(生物或植物)通过与外界的相互作用(吸纳食物、呼吸等)获得碳 14,恰好补偿碳 14 衰减损失量而保持碳 14 含量的比例不变,因而所含碳 14 与碳 12 之比为常数,但死亡后由于碳 14 无法得到补充,会随时间的增长而逐渐衰减. 因此碳 14 测定技术已经成为考古学的常用技术手段,但它是数学应用的结果.

现已测知一古墓中遗体所含碳 14 的数量为原有碳 14 数量的 80%,试求遗体的死亡年代.

解 科学研究已经证实,放射性物质的衰减速度与该物质的含量成比例,并且符合指数函数的变化规律. 设遗体当初死亡时^{14}C的含量为 p_0,在 t 时的含量为 $p=f(t)$,故$p_0=f(0)$,衰减的比例系数为常数 k,于是^{14}C 含量与时间的函数关系就是

$$p=f(t)=p_0e^{kt}.$$

衰减系数 k 是这样确定的:因为从化学知识知道,^{14}C 的半衰期为 5730 年,即^{14}C 经过 5730 年后其含量会减少一半,因此有

$$\frac{p_0}{2}=p_0e^{5730k}\text{,约去 }p_0\text{,得}\frac{1}{2}=e^{5730k}.$$

两边取对数,$5730k=\ln\frac{1}{2}$,用计算器很容易计算出 $k=-0.000\,120\,9$.

于是我们得到^{14}C 含量与时间之间的函数关系是

$$p=p_0e^{-0.000\,120\,9t}. \tag{1.3}$$

将(1.3)式用于本题,已知 $p=0.8p_0$,代入得 $0.8=e^{-0.000\,120\,9t}$,取自然对数 $\ln 0.8=-0.000\,120\,9t$,用计算器计算得 $t\approx 1846$(年). 即古墓中遗体已经死亡了约 1846 年,应该是汉朝人.

例 3 人口模型. 假设在一定时期内,某国的年人口增长率(即出生率减去死亡率)是一个常数 r,即如果第一年的人口为 P_0,则第二年的人口就是 $P_1=P_0(1+r)$,以此类推,第 n 年的人口为 $P_n=P_0(1+r)^n$(可以看到人口问题与复利问题也是一样性质的问题). 设该国原有人口为 1 亿,$r=2\%$,问多少年后,该国人口将达到 2 亿?

解 设 n 年后人口达到 2 亿,将具体数据代入上述公式,得 $2=1\cdot(1+2\%)^n$. 取对数,得到

$$\ln 2=n\ln 1.02,\ n=\frac{\ln 2}{\ln 1.02}=\frac{0.693\,15}{0.019\,80}\approx 35(\text{年}).$$

约 35 年后,该国人口将达到 2 亿.

当 r 很小时,有 $e^r-1\approx r$,于是人口函数模型还可以写成

$$P_n=P_0(1+r)^n\approx P_0e^{rn}.$$

马尔萨斯(Malthus,英国,1766—1834)根据上述模型提出了著名的马尔萨斯人口理论. 不过上述模型仅适用于生物种群(动物、鱼类、细菌)生存环境宽松的情况,当生存环境

恶化(如食物短缺)时此模型就不适用了.

例 2 和例 3 的最终结果都归结到以 e 为底的指数函数(在第二章可以看到例 1 最终也归结为以 e 为底的指数函数),其中有无内在的原因?请关注下面一章的内容.

习题一

1. 判断下列函数的有界性:

(1) $y = 1 + 3\sin x - 5\cos x$; (2) $y = x\sin x$;

(3) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$; (4) $y = \dfrac{1}{x-1}$, $x \in (0, 1)$.

2. 指出下列各函数是由哪些基本初等函数复合而成:

(1) $y = \arctan\sqrt{x}$; (2) $y = e^{\sin x^2}$.

3. 指出下列函数的单调性:

(1) $y = x^4$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

(2) $y = x + \arctan x$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

4. 长沙马王堆一号墓于 1972 年 8 月出土,测得尸体的 ^{14}C 的含量是活体的 78%,求此古墓的年代.

5. 一个圆柱形有盖饮料罐,其容积是一个定值 V,底面半径是 r,求此罐的表面积 A 与底面半径 r 的函数关系.

第二章

微积分的基础——极限

“极”、“限”二字，在我国古代就有了，今天，人们把“极限”连起来，将不可逾越的数值称为极限，因此“挑战极限”成了当今的流行用语．自从 1859 年清代数学家李善兰（1811～1882，图 2－1）和英国传教士伟列亚力（A. Wylie）翻译《代微积拾级》时，将“limit”翻译为“极限”，用以表示变量的变化趋势，极限也就成为了数学名词．

图 2－1　清代数学家李善兰

§1　数列极限的初步认识

在微积分教科书中，常常用《庄子．天下篇》中的“一尺之棰，日去其半，万世不竭”作为极限的例子．这个“棰”的剩下部分的长度用数学符号表示，就是以下数列

$$1,\ \frac{1}{2},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots$$

当时间（日数）n 的不断增加并趋向于无穷大时，尽管它剩下部分的长度总不会是零，但会无限地接近 0，最后的归宿（极限）就是 0．它非常形象地描述了一个无限变化的过程．

一般我们把根据某个规则按照自然数顺序排成一列的无限多个实数

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

称为**数列**．其中第 n 项 x_n 称为该数列的通项，上述数列可以简记为 $\{x_n\}$．

如果数列的通项 x_n 随着 n 增大而能无限接近某个固定常数 a，则称这个数列 $\{x_n\}$ 是**收敛**的，称 a 是数列的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$．

如上面“一尺之棰”的数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，其极限是 0．我们把有极限的数列称为**收敛数列**，没有极限的数列称为**发散数列**．

先看几个例子，使我们对数列极限有更多的感性认识．