经济数学

（第二版） 主编 葛云飞 张淑玲

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

经济数学

Jingji Shuxue

（第二版）

主　编　葛云飞　张淑玲
副主编　李万军　焦清云　孙晓梅
编　委　李坤花　张之红　焦慧平

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

为了适应新形势对高等职业教育技术应用型人才的新要求，把"教、学、做"融为一体，我们在教学实践中对工学交替、任务驱动、项目导向、顶岗实习等教学模式进行了探索。为使数学课程能在经济类、管理类专业中得到实际应用，我们在研究的基础上修订了这本具有高职特色的经济数学教材。

本书以案例引入的方式展开知识，用通俗简洁的语言阐明数学概念的内涵和实质，并把数学中的方法和技能展现给学生，体现了"数学为本，经济为用"的经济数学特点。

本书是对第一版教材的修改、整合、完善，更适用于目前高职高专数学改革的现状.第二版的内容包括：一元函数微分、积分及备选内容——多元函数的微积分、行列式与矩阵、线性方程组及其应用、随机事件及概率。

本书适用于高职院校经济类、财经类、管理类等专业的学生，同时也可作为成人高校和普通高等院校的通用教材，或作为有关人员学习经济数学知识的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

经济数学 / 葛云飞，张淑玲主编．-- 2版．-- 北京：高等教育出版社，2012.6

ISBN 978-7-04-034841-5

Ⅰ．①经… Ⅱ．①葛…②张… Ⅲ．①经济数学－高等学校－教材 Ⅳ．①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 088665 号

策划编辑 崔梅萍　责任编辑 崔梅萍　封面设计 王 睢　版式设计 余 杨
插图绘制 宗小梅　责任校对 刘 莉　责任印制 田 甜

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　刷	北京宏伟双华印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　本	787mm×1092mm 1/16		
印　张	23.5	版　次	2009年7月第1版
字　数	570千字		2012年6月第2版
购书热线	010-58581118	印　次	2012年6月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	36.60元

物 料 号 34841-00

第二版前言

为了适应新形势对高等职业技术应用型人才的新要求，配合产业技术的提升和社会经济的迅速发展，提升高等职业技术人才的综合能力和素质，切实贯彻融“教、学、做”为一体的教学理念，我们根据高等职业教育数学教学特点、需求及高等职业教育培养目标，本着重能力、重应用、重素质、求创新的总体思路，编写了这本数学教材，供高等职业院校经济类、财经类、管理类等专业的学生使用。本教材在许多方面具有明显的高等职业教育的特色，具体反映在以下三个方面：

1. 尊重科学，但不恪守学科。自觉摆脱传统专科的学科型教育和“专科教材为本科教材的压缩”的旧框架，打破传统数学教材的结构，将微积分、线性代数和概率论与数理统计的基本知识有机地结合在一起，根据数学的认知规律组织和编排全书内容。特别在教材内容设计方面，力求实现实用性和发展性的和谐统一。

2. 以项目导向、任务驱动、案例引入的方式，展开知识。从经济方面的实例引出概念，并用通俗简洁的语言阐明概念的内涵和实质。对基础理论和结论一般不做论证，不过分追求理论上的严密性，适度注意保持数学自身的系统性与逻辑性，尽量用几何图形、数表、案例说明其实际背景和应用价值，由此加深对基本理论和概念的理解。

3. 注重数学应用能力的培养。注意向学生展现方法和技能。为了培养学生用定性和定量相结合的方法解决实际问题的能力，本书配备了案例、实训和综合实训三类题目。本书特别注意那些与实际应用联系较多的知识、方法和技能的训练，目的是强化学生应用数学知识解决实际问题的能力，力图使学生具有举一反三、融会贯通的能力、创新能力和职业能力。

本书在保持第一版教材风格的基础上做了以下修改：

(1) 删掉了一些难度较大且不是必需的知识点；

(2) 删掉了一些难度较大的例题；

(3) 增补了应用性较多的知识章节内容；

(4) 增补了一些与知识点对应的易于理解的例题；

(5) 修改了一些编写和制版错误；

(6) 调整了章节编排顺序。

使用建议：

在目前高职高专注重专业实训和实践教学的今天，基础学科的数学课时不断压缩已成事实，在课时不足的情况下如何上好数学课，我们认为首先要精简核心内容，然后针对不同专业选择调整教学内容。如果每周只开设四学时一个学期数学课，则选择前三章必学内容，再根据专业不同选择后面的两章或三章内容。如果开设每周四学时两个学期的数学课，则可以讲授所有内容。

学时分配参考如下：

章序号	内容	学时(本章小结学时)
1	函数　极限　连续	10(2)
2	导数与微分	8(2)
3	导数的应用	10(2)
4	积分及应用	14(2)
5	常微分方程	8(2)
6	多元函数的微积分*	18(4)
7	行列式与矩阵	12(2)
8	线性方程组及其应用	8(2)
9	随机事件及概率	10(2)
10	随机变量及其分布	10(2)
合计		108(22)

本书编写分工为:张淑玲(第一章、第三章)、张之红(第二章、第九章)、李坤花(第四章及附录六)、葛云飞(第五章)、孙晓梅(第六章及附录一、二、三、四、五)、焦清云(第七章)、焦慧平(第七章)、李万军(第八章)。主编葛云飞教授修改部分章节内容,对全书进行了严格审核和把关,负责统稿和最终定稿等工作。

本书的修订得到了河南省教育厅和高等教育出版社的大力支持和帮助,他们对本书提出了许多宝贵的意见和建议,并组织专家进行修改和审定。

由于编者的水平有限,教材中一定存在不妥之处,希望同仁和广大读者批评和指正。

编　者

2012年5月

目 录

第一章　函数　极限　连续

函数是数学中最基本的概念之一，是客观世界中变量之间依存关系的反映；极限是高等数学中重要的工具，借助于极限进行推理是这门课程的基本手段；连续则是函数的一个重要的性态.

第一节　函　　数

在自然现象、经济活动和工程技术中，往往同时遇到几个变量，这些变量通常不是孤立的，而是遵循一定规律相互依赖的，这个规律反映在数学上就是变量与变量之间的函数关系. 关于函数的有关知识，已在中学数学中作了介绍，本节仅就其中的一部分作简要的叙述，并作必要的补充.

一、函数的概念

1. 案例引入

案例 1［面积与半径的关系］　圆的面积公式为

$$S = \pi r^2.$$

公式中，r 是圆的半径. r 不同，S 也就不同，而 π 在圆的面积计算中总是不变的，因此，在这个给定的问题中，π 是常量，r 和 S 都是变量. 当 r 取定某一数值时，则 S 也随之有一个确定的数值与之对应，如 $r=1$ 米时，$S=3.14$ 平方米.

案例 2［成本与产量的关系］　设某水泥厂每日最多能生产水泥 100 吨，固定成本为 3 000 元，每生产水泥 1 吨，成本增加 120 元，则水泥厂每日的总成本 C 与产量 q 的关系为

$$C = 120q + 3\ 000.$$

当产量 q 在生产能力允许的范围 $[0,100]$ 内取定某一数值时，总成本也随之有一个确定的数值与之对应. 例如，当产量 $q=80$ 吨时，则总成本

$$C = 120 \times 80 + 3\ 000 = 12\ 600(\text{元}).$$

综合上述两个例子，就所涉及函数包含的具体意义而言，有几何的、有经济的，抛开各自的具体含义，可抽象出函数的一般概念.

2. 概念阐述

定义 1.1 设有两个变量 x 和 y,若当变量 x 在实数的某一范围 D 内任意取定一个数值时,变量 y 按照一定的规律 f,有唯一确定的值与之对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作 $y=f(x)$,$x\in D$. 其中变量 x 称为**自变量**,变量 y 称为**函数(或因变量)**. 自变量的取值范围 D 称为函数的**定义域**.

若对于确定的 $x_0\in D$,通过对应规律 f,函数 y 有唯一确定的值 y_0 相对应,则称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值,记作 $y=y|_{x=x_0}=f(x_0)$.

函数值的集合,称为函数的**值域**,记作 M.

为了深入理解函数定义,再说明以下几点:

① 在函数定义中,仅要求对自变量 $x\in D$,都有确定的 $y\in M$ 与之对应,因此,常量 $y=C$ 也符合函数的定义,因为当 $x\in\mathbf{R}$ 时,所对应的 y 值都是确定的常数 C. 一般称 $y=C$ 为常函数.

② 若函数在某个区间上的每一点都有定义,则称这个函数在该区间上有定义.

③ 若对于 D 中的每个 x 的取值,y 有唯一的值与之对应,称这样的函数为单值函数,以后我们所涉及和讨论的函数一般都是指单值函数.

④ 函数的定义中涉及定义域 D、对应规律 f 和值域 M 三个因素,显然,给出定义域 D 和对应规律 f,那么值域 M 就被相应地确定了,所以定义域 D 和对应规律 f 是决定一个函数的两个要素. 两个函数相同的充要条件是定义域和对应规律相同,需要注意的是,同一问题中涉及多个函数时,则应用不同的符号分别表示它们各自的对应规律.

3. 方法展示

➡求函数定义域的方法

(1) 分母不能为零.

(2) 偶次根号下非负.

(3) 对数的底大于零而且不等于 1,真数大于零.

(4) 三角函数和反三角函数要符合其定义.

(5) 如果函数的表达式由若干项组合而成,则它的定义域是各项定义域的公共部分.

4. 应用举例

例 1.1 设 $y=f(x)=2x^2-x+1$,求 $f(0)$, $f(1)$, $f(x_0)$.

解
$$y|_{x=0}=f(0)=2\times0^2-0+1=1,$$
$$y|_{x=1}=f(1)=2\times1^2-1+1=2,$$
$$y|_{x=x_0}=f(x_0)=2\times x_0^2-x_0+1=2x_0^2-x_0+1.$$

例 1.2 设 $f(x+1)=x^2-3x$,求 $f(x)$.

解 令 $x+1=t$,则 $x=t-1$,
$$f(t)=(t-1)^2-3(t-1)=t^2-2t+1-3t+3=t^2-5t+4,$$
即 $f(x)=x^2-5x+4$.

例 1.3 求 $f(x)=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$的定义域.

解 要使函数有意义,应满足$\begin{cases}4-x^2\neq0,\\x+2\geqslant0,\end{cases}$ 即有 $x>-2$ 且 $x\neq2$,所以函数的定义域为$(-2,2)\cup$

$(2,+\infty)$.

例 1.4 求函数 $f_1(x)=\dfrac{x^2-2x}{x}$ 的定义域，并与函数 $f_2(x)=x-2$ 比较一下，看它们是否表示同一个函数.

解 $f_1(x)$ 的定义域是 $x\neq0$ 的一切实数，即 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；而 $f_2(x)$ 的定义域是一切实数，即 $(-\infty,+\infty)$.

由于函数 $f_1(x)$ 与函数 $f_2(x)$ 的定义域不同，故函数 $f_1(x)$ 与函数 $f_2(x)$ 表示的不是同一个函数.

二、函数的表示法

1. 案例引入

案例 1 下面是第 29 届奥运会金牌榜的一部分（金牌超过 10 块的国家或地区）如表 1.1.

表 1.1

国家	中国	美国	俄罗斯	英国	德国	澳大利亚	韩国
金牌数	51	36	23	19	16	14	13

案例 2［出租车费与路程关系］ 某市出租车执行起步价 6 元（含两公里及以内），两公里后每公里 1.5 元计费标准，而计费表显示整元，则有出租车费 y 与路程 s 的关系为

$$y=\begin{cases}6,0<s\leqslant2,\\7,2<s\leqslant\dfrac{8}{3},\\8,\dfrac{8}{3}<s\leqslant\dfrac{10}{3},\\9,\dfrac{10}{3}<s\leqslant4,\\\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{cases}$$

案例 3 图 1.1 记录了一个自来水厂某一天 24 小时内水压变化的情况.

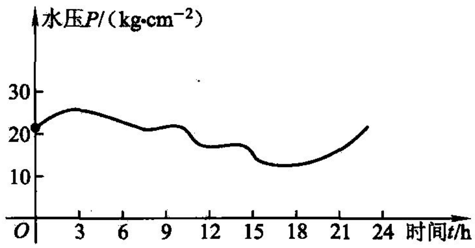

图 1.1

以上三个案例用不同的方法表示了不同的函数.

2. 概念阐述

表示函数的方法,常用的有**表格法**、**图像法**和**公式法**三种.

表格法 将自变量的值与对应的函数值以表格的形式表示出来的方法.如案例1.

图像法 在坐标系中用图像来表示函数关系的方法.如案例3.

公式法 将自变量和因变量之间的关系用数学式子来表示的方法,称为公式法或解析法.这些数学式子也叫做解析表达式,如 $y=x^2+x+3$.

但在经济数学中还会遇到:

(1) 在定义域不同的取值范围内,用不同的解析式来表示的函数,如案例2.这样表示的函数称为分段函数.

(2) 自变量 x 和因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定的函数.如

$$x\cos y-\sin(x+y)=0$$

可确定函数 $y=f(x)$,也可以确定函数 $x=\varphi(y)$.

这样的函数称为隐函数.而直接由自变量 x 的解析式表示出来的函数,如 $y=x+1$,就称为显函数.

三、函数的几种特性

1. 案例引入

案例1 图1.2显示的是一个煤气站在某一天中家用煤气的使用率随着时间变化的图像.

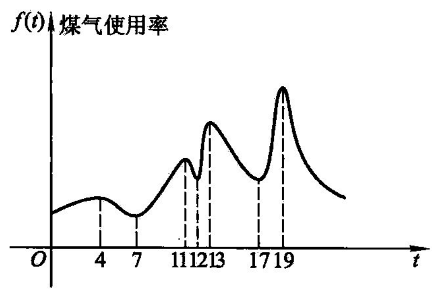

图1.2

图1.2中表示了两个变量的函数关系,煤气的使用率随着时间的变化而变化.

案例2 图1.3是正弦函数与余弦函数的图像.

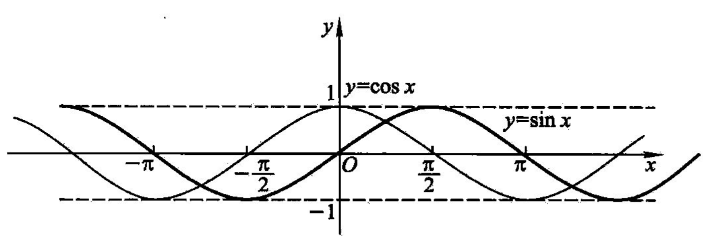

图1.3

图 1.3 中表示了正弦函数与余弦函数两个函数的图像，两个函数的图像分别关于原点对称和关于 y 轴对称，它们图像周而复始地重复，并总处于一个带形区域内.

2. 概念阐述

定义 1.2 如果对属于定义域内某个区间上的任意两个自变量 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是**增函数**，如图 1.4；如果对于属于定义域内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是**减函数**，如图 1.5.

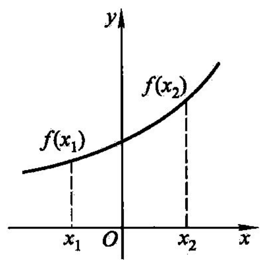

图 1.4

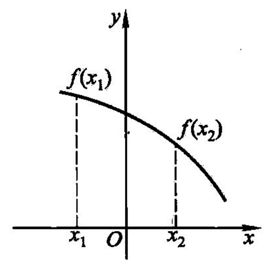

图 1.5

如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间上是增函数或减函数，那么就说函数 $y=f(x)$ 在这一区间上具有**单调性**，这一区间叫做函数 $y=f(x)$ 的**单调区间**.

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义，若存在正数 M，使得对于一切 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 为 D 上的有界函数，如图 1.3. 否则称为 D 上的无界函数.

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若对任何 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么就称 $f(x)$ 为**奇函数**；若对任何 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，那么就称 $f(x)$ 为**偶函数**. 偶函数图像关于 y 轴对称，奇函数图像关于原点对称. 如图 1.3.

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的常数 T，使得一切 $x\in D$，$x+T\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 在 D 上为周期函数，T 称为这个函数的周期. 如图 1.3.

通常，我们所说的周期函数的周期是指**最小正周期**（如果存在），记为 T.

3. 应用举例

例 1.5 判断函数 $f(x)=x\sin x$ 的奇偶性.

解 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，定义域关于原点对称. 又因为

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)\sin(-x) \\ &= -x(-\sin x) \\ &= x\sin x = f(x), \end{aligned}$$

所以，函数 $f(x)=x\sin x$ 是偶函数.

例 1.6 判断函数 $f(x)=e^{\sin x}$ 的有界性.

解 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，$e^u$ 是增函数，所以 $e^{-1}\leqslant e^{\sin x}\leqslant e^1$，故 $f(x)=e^{\sin x}$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 内是有界函数.

四、常见的几种初等函数

1. 概念阐述

(1) 常量函数 $y=C$

常量函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$,由于无论 x 取何值时,都有 $y=C$,所以它的图像是过$(0,C)$平行于 x 轴的一条直线,它是偶函数. 如图 1.6.

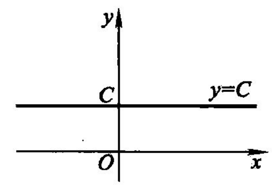

图 1.6

(2) 幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 为实数)

该函数的定义域随 α 而定. 我们只讨论 $x\geqslant 0$ 的情形,而 $x<0$ 时的图像可根据函数的奇偶性确定.

当 $\alpha>0$ 时,函数的图像通过原点$(0,0)$和点$(1,1)$,在$(0,+\infty)$内单调增加且无界(如图 1.7).

当 $\alpha<0$ 时,函数的图像不过原点,但仍通过点$(1,1)$,在$(0,+\infty)$内单调减少、无界,曲线以 x 轴和 y 轴为渐近线(如图 1.8).

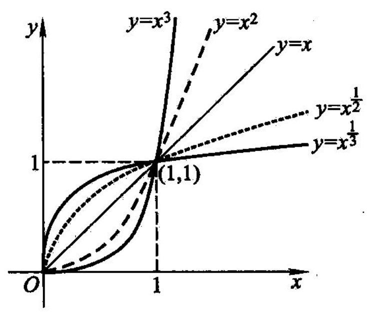

图 1.7

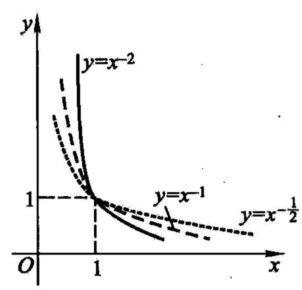

图 1.8

(3) 指数函数 $y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$

指数函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$,由于无论 x 取何值,总有 $a^{x}>0$,且 $a^{0}=1$,所以指数函数 $y=a^{x}$ 的图形都过点$(0,1)$且位于 x 轴的上方,也就是说它的值域为$(0,+\infty)$(见图 1.9). 特别地当 $a=\mathrm{e}=2.718\ 282\ 845\cdots$时,函数为 $y=\mathrm{e}^{x}$.

当 $a>1$ 时,函数单调增加且无界,曲线以 x 轴负半轴为渐近线;

当 $0<a<1$ 时,函数单调减少且无界,曲线以 x 轴正半轴为渐近线.

(4) 对数函数 $y=\log_{a}x(a>0,a\neq 1)$

对数函数的定义域是$(0,+\infty)$,图像全部在 y 轴右方,值域为$(-\infty,+\infty)$,无论 x 取何值,曲线都经过点$(1,0)$(见图 1.10).

当 $a>1$ 时,函 $y=\log_{a}x$ 是单调增加的,曲线以 y 轴负半轴为渐近线;

当 $0<a<1$ 时,函数 $y=\log_{a}x$ 是单调减少的,曲线以 y 轴正半轴为渐近线;以 e 为底的对数函数记为 $y=\ln x$,称之为自然对数函数.

对数函数与指数函数互为反函数,它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

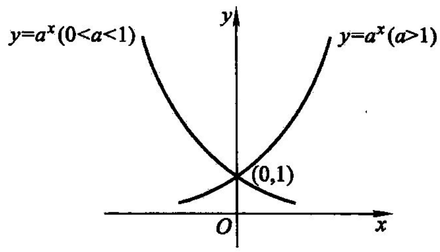

图 1.9

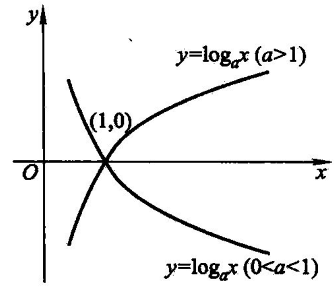

图 1.10

(5) 三角函数

正弦函数 $y=\sin x, x\in(-\infty,+\infty), y\in[-1,1]$;奇函数,有界,以 2π 为周期(见图 1.3);

余弦函数 $y=\cos x, x\in(-\infty,+\infty), y\in[-1,1]$;偶函数,有界,以 2π 为周期(见图 1.3);

正切函数 $y=\tan x, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}, y\in(-\infty,+\infty)$;奇函数,无界,以 π 为周期;以直线 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 为渐近线;

余切函数 $y=\cot x, x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}, y\in(-\infty,+\infty)$;奇函数,无界,以 π 为周期;以直线 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 为渐近线.

正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$;

余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

(6) 反三角函数

反正弦函数 $y=\arcsin x, x\in[-1,1], y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,单调增加的奇函数;

反余弦函数 $y=\arccos x, x\in[-1,1], y\in[0,\pi]$,单调减少的函数;

反正切函数 $y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty), y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$,单调增加的奇函数(见图 1.11);

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x, x\in(-\infty,+\infty), y\in(0,\pi)$,单调减少的函数.

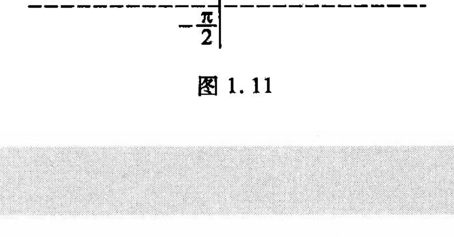

图 1.11

以上六类函数：常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数称为基本初等函数.

定义 1.6 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$. 若 $y=f(u)$ 的定义域与 $u=\varphi(x)$ 的值域的交集非空，则称函数 y 是由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 经过复合而成的**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 x 是自变量，$u=\varphi(x)$ 是中间变量.

说明 （1）不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数.

例如 $y=\arcsin u$ 和 $u=x^2+2$ 就不能复合成复合函数，因为 $u=x^2+2$ 中 $u\geqslant 2$；而 $y=\arcsin u$ 中 $-1\leqslant u\leqslant 1$；其交集为空集.

（2）一个复合函数，可以由多个简单函数复合而成。

（3）分解复合函数时应自外向内逐层分解，并把各层函数分解到基本初等函数或简单函数为止.

由基本初等函数经过有限次的四则运算或复合运算并由一个表达式表示的函数，叫做**初等函数**.

2. 应用举例

例 1.7 指出下列复合函数的复合过程.

（1）$y=\sin^2 x$；（2）$y=\arcsin(\ln x)$；（3）$y=e^{\sin(x^2+1)}$；（4）$y=\ln\sin 2x$.

解 （1）$y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的.

（2）$y=\arcsin(\ln x)$ 是由 $y=\arcsin u$ 和 $u=\ln x$ 复合而成的.

（3）$y=e^{\sin(x^2+1)}$ 是由 $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=x^2+1$ 复合而成的.

（4）$y=\ln\sin 2x$ 是由 $y=\ln u$，$u=\sin v$，$v=2x$ 复合而成的.

五、常见的几种经济函数

在用数学方法解决经济问题时，往往需要找出经济变量之间的函数关系，建立数学模型. 下面介绍几种常用的经济函数.

1. 案例引入

案例 1［需求量与价格的关系］ 一种商品的市场需求量与该商品的价格密切相关，通常降低商品价格，需求量增加；提高商品价格，需求量减少.

我们将问题理想化，视其他因素不变，只考虑商品价格，可以把它简化为一种函数关系，简单地认为价格确定了，需求量就随之确定了，这样需求量就是价格的函数.

案例 2［供给量与价格的关系］ 一种商品的市场价格高，厂家会增加生产，供给量就增大；反之供给量就减少. 我们也可以把它简化为供给量与价格的一种函数关系. 于是供给量也是价格的函数.

2. 概念阐述

表示某种商品市场需求量 Q 与价格 p 关系的函数，称为**需求函数**，记作 $Q=Q(p)$，需求函数一般是单调减函数.

常见的需求函数有：

（1）线性需求函数 $Q=a-bp$（$a>0,b>0$）；