

理论力学 习题及解答



理工科大学参考书

四川大学物理系力学教研室

031-44

S1

理 論 力 学

习 題 及 解 答

理工科大学参考书



ZL112209

1980, 6, 23.

大学物理系力学教研室

一九八〇年



215022

04
48

编 者 的 话

在整理历年教学中使用的习题资料的基础上，我们编写了这本《理论力学习题及解答》，以供教学和自学参考。

为突出力学概念和解题线索，解答力求简明扼要，繁复的数学运算和次要的说明性叙述均已删去。为节省篇幅，在排印格式上未过于讲究，且每题只给出一种参考解答。

由于水平有限，时间仓促，不妥之处，肯定存在。请读者批评指正。

四川大学物理系力学教研室

一九八〇年三月

目 录

(801).....	第一章 静力学	1.58
(802).....		2.58
(803).....		3.58
§ 1.1 平面汇交力系.....		(1)
§ 1.2 平面任意力系.....		(8)
§ 1.3 摩擦.....		(19)
§ 1.4 空间力系.....		(26)

第二章 质点运动学

§ 2.1 直线运动.....	(33)
§ 2.2 速度、加速度的直角坐标表示.....	(39)
§ 2.3 速度、加速度的极坐标表示.....	(45)
§ 2.4 速度、加速度的自然坐标表示.....	(51)

第三章 刚体运动学

§ 3.1 刚体的定轴转动.....	(56)
§ 3.2 刚体的平面运动.....	(57)
§ 3.3 刚体的定点运动.....	(70)

第四章 质点动力学

§ 4.1 牛顿运动定律.....	(81)
§ 4.2 运动微分方程.....	(84)
§ 4.3 动量定理、动量矩定理、动能定理.....	(103)
§ 4.4 有心运动.....	(120)
§ 4.5 微小振动.....	(131)

第五章 相对运动

§ 5.1 相对运动的速度.....	(137)
§ 5.2 相对运动的加速度.....	(141)
§ 5.3 相对运动的动力学方程.....	(148)
§ 5.4 地面附近的运动.....	(158)

第六章 质点组动力学

§ 6.1 质量中心、质点组动力学基本方程.....	(161)
§ 6.2 绕质心的相对运动.....	(174)
§ 6.3 二体问题、碰撞问题.....	(183)
§ 6.4 变质量问题.....	(193)

第七章 刚体动力学

- § 7.1 物体的转动 惯量、惯量椭圆.....(198)
- § 7.2 刚体的动力学 特征量.....(203)
- § 7.3 刚体的定轴转动和平面平行运动.....(206)
- § 7.4 刚体的定点运动和一般运动.....(222)

(8) 第八章 虚功原理、达朗伯原理

- § 8.1 虚功原理.....(236)
- § 8.2 达朗伯原理.....(243)

第九章 拉格朗日方程

- § 9.1 拉格朗日方程.....(250)
- § 9.2 拉格朗日方程及其积分.....(260)
- § 9.3 微振动.....(289)

(10) 第十章 哈密顿正则方程

- § 10.1 正则运动方程及其积分.....(304)
- § 10.2 泊松括号、正则变换.....(332)
- § 10.3 哈密顿—雅可俾方程.....(342)

(07) 第十一章 力学中的变分原理

- § 11.1 哈密顿原理、最小作用量原理.....(353)

(18) 第十二章 弹性力学基本方程

- § 12.1 应力分析.....(360)
- § 12.2 应变分析.....(366)
- § 12.3 基本方程组.....(371)

第十三章 流体运动学

- § 13.1 处理流体运动的两种方法.....(375)
- § 13.2 连续性方程.....(377)
- § 13.3 流体质点速度分析、形变速度.....(379)
- § 13.4 无旋运动、平面势流.....(380)

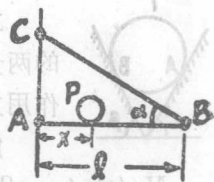
第十四章 流体动力学

- § 14.1 理想流体动力学方程.....(388)
- § 14.2 流体静力学方程.....(390)
- § 14.3 理想流体定常运动和无旋运动.....(394)
- § 14.4 气体的一维定常运动.....(403)

第一章 静力学

§1.1 平面汇交力系

1.1—1 一水平梁长 l ，以 A 端用铰链固定，另一端 B 以和水平成倾角 α 的连杆 BC 悬挂。一重物 P 沿梁移动，以 x 表示与铰链 A 的距离，试以重物位置表示 BC 杆的张力。梁的重量不计。



解：因 AB 杆仅受 P 、 N 、 T 三力，必为汇交力系，作受力图。沿二方向求合力为零有：

$$T \cos \alpha = N \cos \beta,$$

$$T \sin \alpha + N \sin \beta = P$$

又有几何关系 $x \tan \beta = (l - x) \tan \alpha$

即 $x = l \tan \alpha / (\tan \alpha + \tan \beta)$

代入前二式可得 $T = Px / l \sin \alpha$

又：视为平面力系，对 A 取矩，有

$$T l \sin \alpha - Px = 0$$

亦得同解。

1.1—2 重 P 的球用绳固定于点 B ，球靠在光滑斜面上 A 点，如已知 α 及 β 角，求 A 点的反作用力 N 及绳的张力 T 。研究下列二种情况：1. $\alpha = \beta$ ；2. $\alpha = 0$

解：作球之受力图如右



$$N / \sin(\pi - \beta) = T / \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = P / \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta)$$

得 $N = P \sin \beta / \cos(\alpha - \beta)$,

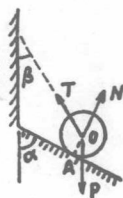
$$T = P \cos \alpha / \cos(\alpha - \beta)$$

(1) $\alpha = \beta$ 有

$$N = P \sin \alpha, T = P \cos \alpha$$

(2) $\alpha = 0$ 有

$$N = P \tan \beta, T = P \sec \beta$$



1.1—3 重 P 的球靠在水平成 α 及 β 角的两光滑固定面上之 A, B 点, 求 A, B 点的反作用力。

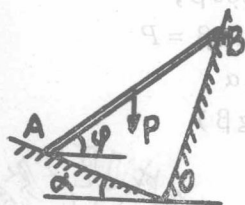
解: 作球之受力图如右

$$N_A / \sin(\pi - \beta) = N_B / \sin(\pi - \alpha)$$

$$= P / \sin(\alpha + \beta)$$

得 $N_A = P \sin \beta / \sin(\alpha + \beta)$

$$N_B = P \sin \alpha / \sin(\alpha + \beta)$$



1.1—4 长 $2l$ 重 P 的均匀杆, 在铅垂平面内处于平衡状态, 在两端靠在互相垂直的两光滑斜面上, 如已知其中一斜面与水平成 α 角, 求杆与水平所成的角 φ 及 AO 的距离。

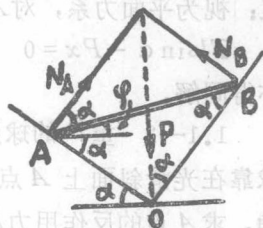
解: 作 AB 杆的受力图如右

AB 杆受三力, N_A, N_B, P ,

它们仅在为共点力系时方能平衡。

由图知: $\varphi = (\pi/2) - 2\alpha$

故 $AO = 2l \sin \alpha$



1.1—5 小圈 A 可在垂直放着的、以 O 点为中心的铁圈上自由滑动, 小圈一边系着一重 P 的砝码, 另一边固定一绳子, 此绳绕过固于铁圈上最高点 B 的小滑轮后, 其另一端悬一重 Q 的重物, 求平衡时之 $\varphi = \angle AOB$ 角及 A, B 点之反作

用力。

解：在A点平衡时

$$N_A / \sin(\varphi + \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2})$$

$$= P / \sin(\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2})$$

$$= Q / \sin(\pi - \varphi) \quad (\text{因 } T = Q)$$

$$\therefore N_A = P, \quad Q/P = \sin \varphi / [\cos(\varphi/2)] = 2 \sin(\varphi/2),$$

$$\varphi = 2 \sin^{-1}(Q/2P)$$

在B点平衡时

$$N_B = \sqrt{2Q^2 + 2Q^2 \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2})} = Q \sqrt{2 + 2 \sin \frac{\varphi}{2}}$$

$$= Q \sqrt{2 - \frac{Q}{P}}$$

1.1—6 在光滑的园柱面上搁两小球A与B；园柱的轴

线是水平的，园柱半径为 $OA = 0.1$ 公

尺，小球A重0.1公斤，小球B重0.2公斤，

两小球用0.2公尺的线连结，求当小球在平

衡位置时，半径OA和OB各与铅垂线的

夹角 φ_1 和 φ_2 ，并求在A点和B点处小球

对园柱的压力 N_1, N_2 。小球的大小略去不计。

解：在A点平衡

$$T / \sin(\pi - \varphi_1) = N_1 / \sin[(\pi/2) + \varphi_1]$$

$$= 0.1 / \sin(\pi/2)$$

$$\therefore N_1 = 0.1 \cos \varphi_1 \quad T = 0.1 \sin \varphi_1$$

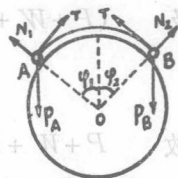
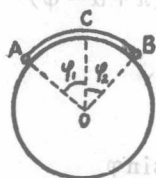
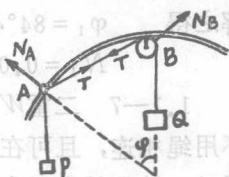
在B点平衡

$$T / \sin(\pi - \varphi_2) = N_2 / \sin[(\pi/2) + \varphi_2]$$

$$= 0.2 / \sin(\pi/2)$$

$$\therefore N_2 = 0.2 \cos \varphi_2 \quad T = 0.2 \sin \varphi_2$$

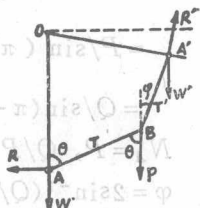
$$\text{有} \quad \sin \varphi_1 = 2 \sin \varphi_2$$



又由 AB 弧长的计算知 $\varphi_1 + \varphi_2 = 2$

解之得 $\varphi_1 = 84^\circ 45'$ $\varphi_2 = 29^\circ 50'$
 $N_1 = 0.0092$ 公斤 $N_2 = 0.173$ 公斤

1.1—7 二重 W 及 W' 之光滑小环用绳相连, 且可在两条固定铁丝上滑动, 铁丝前者铅直而后者与水平成倾角 α , 有重 P 之物系于绳上, 而绳之二部分与铅直方向成 θ 、 φ 角, 证明:



$$\cot \theta : \cot \varphi : \cot \alpha$$

$$= W : P + W : P + W + W'$$

解: 由图可知反力 $R \perp OA$ $R' \perp OA'$

故在 B 点: $P / \sin(\pi + \varphi - \theta) = T / \sin \varphi = T' / \sin \theta$

在 A 点: $T = R / \sin \theta = W / \cos \theta$

在 A' 点: $T' / \sin \alpha = R' / \sin \varphi = W' / \sin(\pi + \alpha - \varphi)$

所以 $P / \sin(\theta - \varphi) = W / \cos \theta \sin \varphi$
 $= W' \sin \alpha / \sin \theta \sin(\varphi - \alpha)$

因此 $P / W = \sin(\theta - \varphi) / \cos \theta \sin \varphi$
 $= (\sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi) / \cos \theta \sin \varphi$

及 $(P + W) / W = (\sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi + \cos \theta \sin \varphi) / \cos \theta \sin \varphi = \cot \varphi / \cot \theta$

及 $(P + W + W') / W = \sin \theta \cos \varphi / \cos \theta \sin \varphi$
 $+ [\sin \theta \sin(\varphi - \alpha)] / \cos \theta \sin \varphi \sin \alpha$
 $= \cot \alpha / \cot \theta$

故 $P + W + W' : P + W : P = \cot \alpha : \cot \varphi : \cot \theta$

1.1—8 二重为 P 、 Q 的环可在无重绳上滑动, 绳的两端固定在与水平成 θ 角的直杆上, 绳又通过杆上一无重可滑动的环, 而二重环分别在它的两边, 所有接触都光滑, 在平衡时与轻环两边的绳都成 φ 角, 证明

$$\operatorname{tg} \theta / \operatorname{tg} \varphi = (P - Q) / (P + Q)$$

解: $Q = 2T \cos[(\pi/2) + \theta - \varphi] = 2T \sin(\varphi - \theta)$

$$P = 2T \cos[(\pi/2) - \theta - \varphi] = 2T \sin(\varphi + \theta)$$

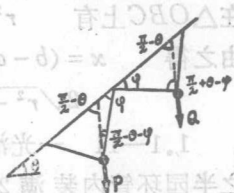
故 $Q/P = \sin(\varphi - \theta) / \sin(\varphi + \theta)$

$$= (\sin \varphi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta) / (\sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta)$$

于是 $(P + Q)/P = 2 \sin \varphi \cos \theta / (\sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta)$

$$(P - Q)/P = 2 \cos \varphi \sin \theta / (\sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta)$$

故 $(P - Q) / (P + Q) = \operatorname{tg} \theta / \operatorname{tg} \varphi$



1.1—9 二有重量的小环可在光滑铁丝上滑动，铁丝在铅直面内并对水平方向呈抛物线，二环用绕过焦点的轻绳相连，证明在平衡时各环的高度与其重量成正比。

解：抛物线为 $y^2 = 2px$;

于是 $dy/dx = p/y$ 如 φ 是 R 与 x 轴间的夹角，故

$\operatorname{tg} \varphi = -p/y$ 分解到垂直方向：

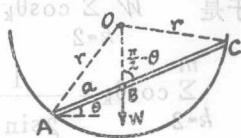
$w = -Ty / (x + p/2) - Ry / \sqrt{y^2 + p^2}$ ，分解到水平向

$$0 = -T(x - p/2) / (x + p/2) + Rp / \sqrt{y^2 + p^2}$$

可解得: $pw = -Ty$;

于是 $w/y = -T/p$

1.1—10 一轻杆在半径为 r 的光滑半碗内处于静止状态，在杆上距两端为 a 与 b 的点处固定有一重 W 之物，证明若杆在平衡时与水平的倾角为 θ 则有



$$2\sqrt{r^2 - ab} \sin \theta = b - a$$

解：设图中之 $OB = x$ ，则在 $\triangle OAB$ 内有

$$r^2 = a^2 + x^2 + 2ax \sin \theta$$

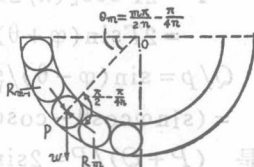
在 $\triangle OBC$ 上有 $r^2 = b^2 + x^2 - 2bx \sin \theta$

由之得 $x = (b-a)/2\sin \theta$ 再代入第一式得

$$2\sqrt{r^2 - ab\sin \theta} = b - a$$

1.1—11 一光滑的园截面

之半园环管内装满 $2n$ 个 相同的滚珠,每珠重 W ,与管恰好密合,放在铅直平面内且两端等高,如 R_m 是由顶端起第 m 个和第 $m+1$ 个珠间的压力,证明



$$R_m = W \sin(m\pi/2n) \csc(\pi/2n)$$

解: 每个小珠由园心之张角 $\alpha = \pi/2n$, 故有 如图的角度。将力 W 、 R_{m-1} 、 R_m 分解到垂直于 PO 的方向有

$$W \cos \theta_m = (R_m - R_{m-1}) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4n}\right)$$

$$W \cos \theta_{m-1} = (R_{m-1} - R_{m-2}) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4n}\right)$$

$$\dots\dots\dots W \cos \theta_2 = (R_2 - R_1) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4n}\right)$$

因而
$$W \sum_{k=2}^m \cos \theta_k = (R_m - R_1) \cos \frac{\pi}{4n}$$

于是
$$W \sum_{k=2}^m \cos \theta_k = (R_m - W) \cos \frac{\pi}{4n}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^m \cos \theta_k &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{4n}} \sum_{k=2}^m 2 \cos\left(\frac{k\pi}{2n} - \frac{\pi}{4n}\right) \sin \frac{\pi}{4n} \\ &= \frac{1}{2 \sin(\pi/4n)} \sum_{k=2}^m \left\{ \sin\left[\left(\frac{k\pi}{2n} - \frac{\pi}{4n}\right) + \frac{\pi}{4n}\right] \right. \\ &\quad \left. - \sin\left[\left(\frac{k\pi}{2n} - \frac{\pi}{4n}\right) - \frac{\pi}{4n}\right] \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sin(\pi/4n)} \sum_{k=2}^m \left(\sin \frac{k\pi}{2n} - \sin \frac{k-1}{2n} \pi \right)$$

$$= \frac{1}{2\sin(\pi/4n)} \left(\sin \frac{m\pi}{2n} - \sin \frac{\pi}{2n} \right)$$

因而 $\frac{W}{2\sin(\pi/4n)} \left(\sin \frac{m\pi}{2n} - \sin \frac{\pi}{2n} \right) = (R_m - W) \cos \frac{\pi}{4n}$

得 $W \left(\sin \frac{m\pi}{2n} - \sin \frac{\pi}{2n} \right) = (R_m - W) \sin \frac{\pi}{2n}$

故 $R_m = \frac{W [\sin(m\pi/2n) - \sin(\pi/2n)]}{\sin(\pi/2n)} + W$

$$= W \sin \frac{m\pi}{2n} \csc \frac{\pi}{2n}$$

1.1—12 上题中, 让珠的尺寸无限缩小, 证明二珠间的压力与该珠由管顶算起的深度成正比。

解: 当 n 无限增加时, $\sin(\pi/2n)$ 趋于 $\pi/2n$, 而 $\sin(m\pi/2n)$ 趋于 θ , 若 ρ 为单位长度的重量, 则 $W = \rho(\pi r/2n)$, 因此

$$R_\theta = R_m = \frac{\rho \pi r}{2n} \frac{\sin \theta}{\pi/2n} = \rho r \sin \theta = h\rho$$

当珠趋于零时,

$$W \cos(\theta + d\theta) = [R_\theta + (\partial R_\theta / \partial \theta) d\theta - R^\theta] \cos(d\theta/2)$$

得 $W \cos \theta = (\partial R_\theta / \partial \theta) d\theta$ 又 $W = \rho r d\theta$

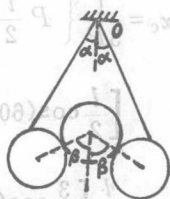
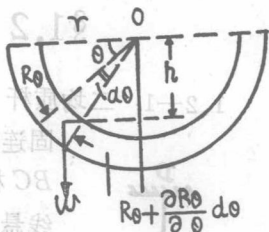
故 $\rho r \cos \theta = dR/d\theta$ 即 $dR = \rho r \cos \theta d\theta$

因此 $R = \rho r \sin \theta + c$ 而当

$$\theta = 0, R = 0 \quad \text{故} \quad c = 0$$

于是 $R = \rho r \sin \theta = \rho h$

1.1—13 相同的两个均质光滑球悬在结于定点 O 的两根绳子上, 此两球同时又支持一等重的均质球。求 α 角及 β 角



之间的关系。

解：由对称性，问题可在三个球心与 O 点共同的铅直平面内考虑。设绳的张力 T ，球间相互作用力 N ，因二球光滑，故 N 沿连心线，因此张力 T 必过二球之重心，故有



$$P/\sin(\beta - \alpha) = N/\sin \alpha = T/\sin \beta$$

又由上球的平衡可知 $2N\cos \beta = P$

由此可得

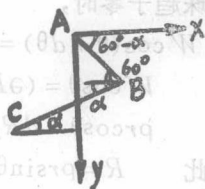
$$\operatorname{tg} \beta = 3 \operatorname{tg} \alpha$$

§1.2 平面任意力系

1.2—1 二均质杆 AB 及 BC ，有相同截面，以其末端固连成有 60° 的摇手柄 ABC ， AB 杆仅 BC 杆的一半长，此摇手柄 A 端以 AD 线悬挂。试求平衡时 BC 杆和水平所成倾角 α 之大小。杆截面的大小可略去不计。



解：设 AB 长 l 重 P ， BC 长 $2l$ 重 $2P$ ，平衡时， ABC 重心的水平坐标应与 A 点的水平坐标相同。取 Axy 坐标系如图，设体系重心的 x 坐标为 x_c ，则有



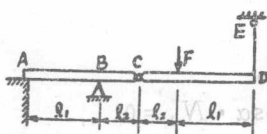
$$x_c = \frac{1}{3P} \left\{ P \frac{l}{2} \cos(60^\circ - \alpha) + 2P \cdot \right.$$

$$\left. \left[\frac{l}{2} \cos(60^\circ - \alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2} l \sin(60^\circ - \alpha) \right] \right\}$$

$$= \frac{l}{3} \left[\frac{3}{2} \cos(60^\circ - \alpha) - \sqrt{3} \sin(60^\circ - \alpha) \right] = 0$$

得 $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}/5$

1.2—2 复梁由梁 AC 与 CD 以铰链接于 C 点而构成，在 A 点为固定铰支，在 B 点为动支（在滚子上），梁之一端 D 以铅垂细绳 DE 挂起，在梁 CD 上作用已知力 F ，求铰链 A 的反作用力，支点 B 的反作用力及绳 DE 的张力。

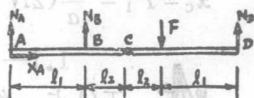


解：先对整个复梁写平衡方程有： $X_A = 0, \Sigma m_A = 0,$

$$N_A + N_B + N_D - F = 0,$$

$$l_1 N_B + 2(l_1 + l_2) N_D -$$

$$-(l_1 + 2l_2) F = 0$$

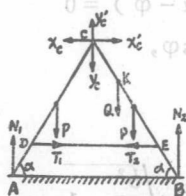


单独分析 CD 梁，对 C 点

取矩有 $(l_1 + l_2) N_D - l_2 F = 0$ 得 $N_D = l_2 F / (l_2 + l_1)$

代入前式得 $N_B = F, N_A = F - N_B - N_D = -l_2 F / (l_1 + l_2)$

1.2—3 梯子由两相同的部分



AC 与 BC 均匀棒构成，这两部分各重 P 公斤，用铰链连接于 C 点，并用绳子 DE 互相联系。梯放在光滑的水平地板上，在其上 K 点处站一人，重 Q 公斤。求在 A 点与 B 点的反作用力，绳的张力和铰链 C 内的反作用力，如 $AC = BC = 2l, DC = EC = a, BK = b$ ，又 $\angle CAB = \alpha$

解： $T_2 = -T_1$ ，又以 x'_c, y'_c 表 C 点左梯对右的水平与铅垂作用，若对左梯的作用表为 x_c, y_c 。有 $x'_c = -x_c,$

$$y'_c = -y_c.$$

整梯有平衡方程

$$N_1 + N_2 - 2P - Q = 0,$$

$$4l \cos \alpha \cdot P + b \cos \alpha \cdot Q - 4l \cos \alpha \cdot N_1 = 0$$

$$\text{得 } N_1 = P + \frac{b}{4l} Q, \quad N_2 = P + (1 - \frac{b}{4l}) Q.$$

再考察左梯之平衡, 有:

$$T_1 - x_c = 0, \quad N_1 - y_c - P = 0,$$

$$a \sin \alpha \cdot T_1 + l \cos \alpha \cdot P - 2l \cos \alpha \cdot N_1 = 0$$

$$\text{得 } y_c = N_1 - P = \frac{b}{4l} Q,$$

$$x_c = T_1 = \frac{l}{a} (2N_1 - P) \cot \alpha = \frac{l}{a} (P + \frac{b}{2l} Q) \cot \alpha.$$

1.1—4 有一园板半径为 r 重 P , 以一绳系于 O 点, 绳长为 b , 另有一重 Q 长 $2a$ 之杆亦系于 O 点, 绳与杆皆可绕过 O 点的水平轴转动, 问当平衡时绳 b 与铅垂线间夹角 φ 满足何种关系?

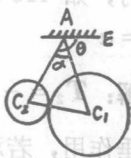
解: 平衡条件是合力为 0 合矩为 0。由图示 $OA = b$, $oc = a$ 。故 $bP \sin \varphi - aQ \sin(\alpha - \varphi) = 0$

$$\text{得 } (bP + aQ \cos \alpha) \sin \varphi = aQ \sin \alpha \cos \varphi,$$

$$\text{又 } \sin \alpha = r/b, \quad \cos \alpha = \sqrt{b^2 - r^2}/b$$

$$\text{故 } \cot \varphi = \frac{bP + aQ \frac{\sqrt{b^2 - r^2}}{b}}{aQ \cdot \frac{r}{b}} = \frac{b^2 P}{aQr} + \sqrt{\frac{b^2}{r^2} - 1}$$

1.2—5 两光滑均匀球 C_1 及 C_2 , 其重量为 P_1 及 P_2 , 以二绳悬于 A 点, 且知 $AC_1 = AC_2$, $\angle C_1 AC_2 = \alpha$ 。试求绳 AC_2 与水平面 AE 之夹角 θ 及绳中张力 T_1 、 T_2 以及两球间的压力 N 。



解: 仅在 $AC_1 C_2$ 组成的铅垂平面内考虑问题。

1. 设 $AC_1 = AC_2 = L$, 则体系质心的 x 坐标为

$$x_c = \frac{L}{P_1 + P_2} [P_1 \cos(\theta - \alpha) + P_2 \cos \theta],$$

平衡时 $x_c = 0$, 因而 $\operatorname{tg} \theta = -(P_1 \cos \alpha + P_2) / P_1 \sin \alpha$

$$2. \quad \vec{AC}_1 = L \cos(\theta - \alpha) \mathbf{i} + L \sin(\theta - \alpha) \mathbf{j},$$

$$\vec{AC}_2 = L \cos \theta \mathbf{i} + L \sin \theta \mathbf{j}$$

$$P_1 = P_1 \mathbf{j}, \quad T_1 = -T_1 \cos(\theta - \alpha) \mathbf{i} - T_1 \sin(\theta - \alpha) \mathbf{j}$$

对 C_2 取矩有 $\vec{C}_2 \vec{C}_1 \times P_1 + \vec{C}_2 \vec{C}_1 \times T_1 = (\vec{AC}_1 - \vec{AC}_2)$

$$\times (P_1 + T_1) = 0.$$

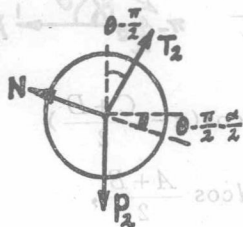
故 $P[\cos(\theta - \alpha) - \cos \theta] + T_1[\sin(\theta - \alpha) \cos \theta$

$$- \sin \theta \cos(\theta - \alpha)] = 0$$

$$= 2P \sin(\theta - \frac{\alpha}{2}) \sin \frac{\alpha}{2} - 2T_1 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 0$$

$$\text{得 } T_1 = P_1 \frac{\sin(\theta - \frac{\alpha}{2})}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{同理可得 } T_2 = P_2 \frac{\sin(\theta - \frac{\alpha}{2})}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$



$$\text{得 } N = -P_2 \frac{\cos \theta}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

3. 再考虑 C_2 球的平衡有

$$N \cos(\theta - \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2})$$

$$= T_2 \sin(\theta - \frac{\pi}{2})$$

$$= -T_2 \cos \theta.$$

1.2—6 四边形 $ABCD$ 的边上作用有沿边 AB 、 BC 、 CD 、 DA 的力, 力的大小分别与边长成 α 、 β 、 γ 、 δ 倍, 证

明如此系统保持平衡, 则 $\alpha\gamma = \beta\delta$ 。

解: 对 A 点取矩:

$$\beta \overline{AB} \cdot \overline{BC} \sin \angle B + \gamma \overline{CD} \cdot$$

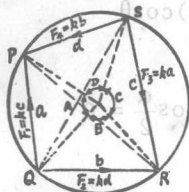
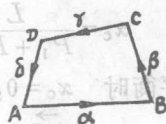
$$\overline{AD} \sin \angle D = 0,$$

对 C 取矩: $\delta \overline{AD} \cdot \overline{CD} \sin \angle D + \alpha \overline{AB} \cdot \overline{CB} \sin \angle B = 0,$

即 $\beta \overline{AB} \cdot \overline{BC} \sin \angle B = -\gamma \overline{CD} \cdot \overline{DA} \sin \angle D,$

$$\alpha \overline{AB} \cdot \overline{BC} \sin \angle B = -\delta \overline{CD} \cdot \overline{DA} \sin \angle D.$$

以此二式相除得 $\alpha\gamma = \beta\delta$ 。



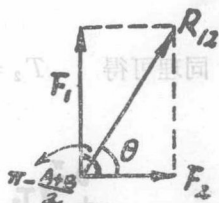
1.2-7 有四边形内接于圆, 证明沿此四边作用着与对边成比例的力时将保持平衡, 且其逆命题亦真, 即如平衡, 力必与对边成比例。

解: 作四边形 $PQRS$, 设其边长分别为 a, b, c, d , 作用力为 F_1, F_2, F_3 及

F_4 , 并作各边所对的园心角 A, B, C, D , 设 F_1, F_2 之合力为 R_{12} , F_3, F_4 之合力为 R_{34} , 则有

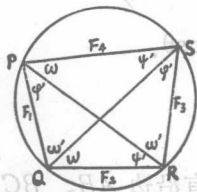
$$R_{12} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \frac{A+B}{2}}$$

$$= k \sqrt{c^2 + d^2 - 2cd \cos \frac{A+B}{2}}$$



但在 $\triangle PRS$ 有 $\overline{PR}^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos(\pi - \frac{C+D}{2})$

$$= c^2 + d^2 - 2cd \cos \frac{A+B}{2},$$



故 $R_{12} = k \overline{PR}$. 同理可证

$$R_{34} = k \overline{PR}.$$

$$\text{由力图知 } \frac{\sin \theta}{kc} = \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{R_{12}}$$