

曆法典第一百二十八卷

算法部總論

隋書 律曆志備數

五數者一十百千萬也傳曰物生而後有象滋而後有數是以言律者云數起於建子黃鐘之律始一而每辰三之歷九辰至酉得一萬九千六百八十三而五數備成以爲律法又叅之終亥凡歷十二辰得十有七萬七千一百四十七而辰數該矣以爲律積以成法除該積得九寸卽黃鐘宮律之長也此則數因律起律以數成故可歷管萬事綜覈氣象其算用竹廣二分長三寸正策三廉積二百一十六枚成六觚乾之策也負策四廉積一百四十四枚成方坤之策也觚方皆經十二天地之太數也是故探賾素隱鉤深致遠莫不用焉一十百千萬所同由也律度量衡歷率其別用也故體有長短檢之以度則不失毫釐物有多少受之以器則不失圭撮量有輕重平之以權衡則不失黍絲聲有清濁協之以律呂則不失宮商三光運行紀以曆數則不差晷刻事物糅見御之以率則不乖其本故幽隱之情精微之變可得而綜也夫所謂率者有九流焉一曰方田以御田疇界域二曰

粟米以御交質變易三曰衰分以御貴賤廩稅四曰少廣以御積冪方圓五曰商功以御功程積實六曰均輸以御遠近勞費七曰盈朒以御隱雜互見八曰方程以御錯糅正負九曰句股以御高深廣遠皆乘以散之除以聚之齊同以通之今有以貫之則算數之方盡於斯矣古之九數圓周率三圓徑率一其術疎舛自劉歆張衡劉徽王蕃皮延宗之徒各設新率未臻折衷宋末南徐州從事史祖沖之更開密法以圓徑一億爲一丈圓周盈數二丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽朒數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽正數在盈朒二限之間密率圓徑一百一十三圓周三百五十五約率圓徑七周二十二又設開差冪開差立兼以正圓參之指要精密算氏之最著也所著之書名爲綴術學官莫能究其深奧是故廢而不理

明唐順之本集 句股測望論

句股所謂矩也古人執數寸之矩而日月運行眇眇遲速之變山谿之高深廣遠凡目力所及無不可知蓋不能逃乎數也句股之法橫爲句縱爲股斜爲弦句股求弦句股自乘相併爲實平方開之得弦句股求股句弦自乘相減爲實平方開之得股股求句同法蓋一弦實藏一句一股之實一

句一股之實併得一弦實也數非兩不行因句股而得弦因股弦而得句因句弦而得股三者之中其兩者顯而可知其一者藏而不可知因兩以得三此句股法之可通者也至如遠近可知而高下不可知如卑則塔影高則日影之類塔影之在地者可量而人足可以至於戴日之下而日與塔高低之數不可知則是有句而無股弦三者缺其二數不可起而句股之法窮矣於是有立表之法蓋以小句股求大句股也小句股每一寸之句爲股長幾何則大句股每一尺之句其長幾何可知矣此以人目與表與所望之高三相直而知之也人目至表小弦也人目至所望之高大弦也又法表爲小股其高幾何與至塔下之數相乘以小句除之則得塔高蓋橫之則爲小股至塔之積縱之則爲小句至塔頂之積縱橫之數恰同是變句以爲股因橫而得縱者也句股弦三者有一可知則立表之法可得而用若其高與遠之數皆不可知而但目力可及如隔海望山之類則句股弦三者無一可知而立表之法又窮矣於是有重表之法蓋兩表相去幾何爲影差者幾何因其差以求句股亦可得矣立表者以通句股之窮也重表者以通一表之窮也其實重表一表也一表句股也無二法也

句股容方圓論

凡奇零不齊之數準之於齊圓準之於方不齊之圓準於齊之圓不齊之方準於齊之方句股容圓準於句股容方假令句五股五弦七有奇此爲整方均齊無較之句股其容方徑該得句之半蓋容方積得句股全積四分之一其取全積時句股分在兩廉則句五股五五二十五內一半爲句積一半爲股積其求容方則併句股爲縱一廉得十爲長之數得闊二五與原句相半蓋始初則一半句積一半股積橫列之而爲正方及取容方則股積在上句積在下面爲長方矣其容方所以止得半句者則以句股之數均也若句短股長則容方以漸而闊不止於半句矣故大半爲股積小半爲句積其始橫列時句積與股同長而不同闊其從列時則股積之闊如故而句積截長以爲闊則闊與股積同而長與股積異與橫列正相反此變長爲闊而取容方之法也其謂之句積股積者從容方徑與句股相乘之數而名之也若取容圓徑則用句股自之而倍其數以句股與弦併爲法蓋容圓之徑多於容方方有四角與弦相礙故其數少圓循弦宛轉故其數多若以求容方與求容圓相比則積中恰少一段圓徑與半弦和較相乘之數弦和較者勾股併與弦相較之數也假令勾五股

五相乘亦倍之得五十如求容方則亦倍勾股爲法得二十亦恰得二寸五分之徑如求容圓則不用倍勾股爲法而用一句股併與一弦是以一弦代一句股併也以一弦代一句股併恰少一弦和較加一弦和較則亦兩句股矣假令一句股得十倍句股得二十是取容方之徑一句股得十一弦得七恰少一弦和較三是取容圓之徑其所以少一弦和較者圓徑多於方徑也假令取容圓不用句股倍積而止用句股本積則宜用句股併爲廉而除去半弦和較亦得或約得圓徑之後與半弦和較相乘添積而以句股併爲廉不除亦得或用句股倍積用兩句股相併爲廉而以全弦和較與約得圓徑相乘添積亦得此改方爲圓之妙其機括只寓之於弦和較間也至於句股積與弦積亦只於句股較中求之蓋數起於參伍參伍起於畸零不齊也假令股五句五齊數之句股則句股累倍之卽得弦累蓋兩句股積而成弦積也至於句短股長相乘之積則成一長方倍之而弦側不當中徑亦不成弦累惟以一句股較積補之乃能使長方爲一正方而得弦積蓋句股之差愈遠則長方愈狹長方愈狹則句股之差積愈多故句股差者所以權長方不及正方之數以相補轉此補狹爲方之法也

弧矢論

凡弧矢算法準之於矢而參之於徑背徑求矢之法先求之背弦差而半背弦差藏之矢竅與徑相除之中倍矢竅與徑相除則全背弦差也半法簡捷故用其半竅者方眼也自乘之數必方故謂之竅假令徑十寸截矢一寸一寸隅無開方卽以一寸爲矢竅而以十寸之徑除之該得一分是半背弦差一分若二寸矢開方得四寸是爲一寸者四半背弦差得四分三寸矢開方得九是爲一寸者九半背弦差得九分皆準之於十寸之徑故一寸之竅而差一分遞而上之視其竅以爲差之多少又假令徑十三寸矢竅一寸則以十三寸之徑與一寸相除每寸該差七釐七毫弱以爲半背弦差若二寸矢開方得四該四箇七釐七毫併之得三分八毫以爲二寸矢半背弦差此準之十三寸之徑亦遞而上之視其竅以爲差之多少蓋徑長則背弦之差減故一寸矢而差止七釐有奇徑短則背弦之差增故一寸矢而差及一分雖其數有增減而準之於一寸之竅與徑相除而以漸開之每得一寸則得元差而相併以爲背弦之差則其法之一定不可易者也背徑求矢矢背求徑諸法消息管於是矣至於徑積求矢一法古法以倍截積自乘爲實四因截積爲上廉四因直徑爲下廉五

爲圓隅與矢相乘以減下廉而以上下廉與矢除實今立一法但以截積自乘爲實而遂以截積爲上廉直徑爲下廉每一寸矢帶二分五釐二寸矢則帶五分四分而增其一以減徑其倍積四因之法悉去不用頗爲簡捷蓋徑積求矢準於矢徑之差矢徑差者矢徑互爲升降也矢一寸則該減徑一寸二分五釐矢二寸則該減徑二寸五分而矢徑之差起於積數之不足且夫圓準於方而畸零之圓又準於均齊之圓以方爲率徑十寸矢一寸則積必是十寸矢二寸則積必是二十寸但得積爲實只約矢與徑爲從平方開之足矣蓋方無虛隅也又以整圓爲率徑十寸矢五寸則圓積必居方積四分之三而以四之一爲虛隅足矣蓋雖有虛隅而其數易準也惟是矢以漸而短則積以漸而減有不能及四分之三虛隅以漸而加有不止於四分之一者矣於是平方法與四分而一爲虛隅之法皆不可用惟是乘平方之積爲三乘而以四分之矢減五分之徑則不問矢之長短積與虛隅之多寡而其數皆至此而均齊猶之平方之法數有多寡而減來減去必得一均齊之數以爲準而後不齊者皆齊此天然之妙也夫積自乘而爲三乘方之實則一整方耳而矢數藏焉及立法求矢則分爲上下兩廉而矢數著焉蓋整方所以聚積而分廉所以散積補短截長而方圓斜直通融

爲一此亦天然之妙也假令徑十寸矢一寸積該三寸五分自乘該十二寸二分五釐上廉三寸五分下廉十寸以三乘方開之而一寸無開方則上下廉如元數共得十三寸五分爲廉法與一寸矢相乘除實恰少一寸二分五釐是爲負隅之數所以用每矢一寸則帶二分五釐爲準以減徑然後法實相當也又如徑十寸矢二寸積該十寸自乘該百寸上廉十寸下廉亦十寸以三乘方開之則須以矢數乘上廉上廉該得二十寸蓋長十寸而高二寸之數以矢數自乘得四而乘下廉下廉該得四十寸蓋高十寸而闊四寸之數上下廉共得六十寸又以矢二寸爲方面與上下廉相乘除實共二箇六十寸該得一百二十寸其數乃足而元數止得百寸恰少積二十寸所以用二寸五分以除下廉則該止得七寸五分爲下廉其下廉減去高二寸五分中闊該四寸則四箇二寸五分該得十寸方面二寸與十寸相乘共二十寸恰勾負隅之數所以二寸矢則用二寸五分減法也遞而上之每寸以二分五釐爲準蓋雖徑有極長極短而一寸矢帶二分五釐減徑之法則定數也徑積求矢矢積求徑徑矢求積諸法消息管於是矣然此二法者背弦之差則隨徑而不隨矢所以均爲一寸之矢而其差則有多寡之不齊矢徑之差則隨矢而不隨徑所以但得一寸之矢則不問徑之

長短而一例爲差此二法之異也若以今法與舊法相通今法不倍積所以不用四因四因者生於倍積也古法之五爲負隅卽今之一寸帶二分五釐也蓋以五乘之矢除四因之徑則亦一寸矢而減一寸三分五釐之徑也然有廉而無方隅者蓋截積止得廉數也卽此二法可見截弧截積之法皆從邊起而準之於邊以漸消息之矣旣得一寸之定差則雖倍蓰十伯錯綜變化而皆不能出乎範圍之外此天然之妙也故曰握其機而萬事理矣其弦矢求徑法半弦自乘爲實而以矢除之加矢得徑是徑之數藏於半弦冪與矢相除而加矢之中也今環而通之以爲背弦求矢諸法背弦求矢其半背冪中藏一箇半弦冪與矢相除而加矢之徑數藏一箇矢冪以徑數相除爲背弦差之數二數消息恰得半背冪本數則矢數見矣假令徑十寸矢一寸半背弦差一分半背數三寸一分自乘得九寸六分一釐其九寸爲弦冪所謂中藏半弦冪與矢相除而加矢之徑數其六分一釐乃是兩半背冪而空其一差亦名差與半背相開方之數卽以與其差一分相乘之數所謂一箇矢冪以徑數相除爲背弦差之數也二數消息以盡背冪而法可立矣其背矢求弦法若背矢先求出徑而後以矢徑求弦則爲簡捷蓋半背冪中所藏弦冪與背弦差冪今以矢冪約徑而以徑除矢冪爲背

弦差又以矢截徑以矢乘之爲半弦冪二數消息恰得半背冪本數則徑數見矣得徑而弦在其中矣其矢弦求背亦須先得徑而後得背蓋半弦冪爲實乃以矢約徑以矢減之以矢乘之恰得半弦冪本數則徑數見矣得徑而背在其中矣假令矢一寸半弦三寸自乘九寸爲半弦冪爲實以矢約寸得十寸以矢一寸減之得九寸以矢一寸乘之得九寸恰與半弦冪相同則爲徑十寸矣此背弦矢徑四者相乘除循環無窮之妙也至於徑積求矢則既然矣因而通之積矢求徑假令徑十寸矢一寸積三寸五分自乘該十二寸二分五釐乃以原積三寸五分爲上廉一寸之矢爲下廉以除自乘之積餘數得八寸七分五釐如矢帶數一寸二分五釐則爲徑十寸矣又如徑十寸矢二寸積十寸自乘寸百爲實矢乘積得二十寸爲上廉再矢自乘得八爲下廉以二乘上廉消積四十以八消餘積六十得七寸五分加入矢帶數二寸五分則徑十寸矣徑積求矢則積爲上廉而徑爲下廉矢積求徑則亦積爲上廉而矢爲下廉此其縱橫往來相通之妙而一乘上廉再乘下廉則三乘開方之定法也積矢求弦則倍其積以矢除積而減矢弦矢求積則并矢於弦以矢乘積而半其積蓋矢弦并之爲長以矢乘之而得兩積故半之而積可見也倍之則爲矢弦相併之積以矢除之而得矢

弦相併之本數除矢而弦可見也徑矢求積則先得弦而後得積蓋以矢減徑以矢乘之四因得數面弦冪藏於其中平方開之得弦乃以矢自乘以矢與弦相乘合二數而半之則得積矣此又積矢徑弦四者相乘除循環無窮之妙也其徑背求矢法則以半背自乘爲實而約矢以減徑以矢乘之爲半弦冪而平方開之以減背其減餘之數恰與矢之背弦差數相當則矢數見矣蓋半背數中藏一半弦數藏一背弦差數故合二數而消息之也徑十寸矢一寸半背三寸一分十寸之徑每一寸矢該差二分二寸矢該差四分爲定差今約矢一寸以減徑得九寸以矢乘亦得九寸平方開之得三寸爲半弦以除半背而餘一分恰勾一寸差數則矢之爲一寸也無疑矣又如徑十寸半背四寸四分約得矢二寸以減徑餘八寸以矢乘得十六寸爲弦冪平方開之爲四寸以減半背四寸而餘四分恰得二寸矢之定差則矢之爲二寸也無疑矣又法半背冪自乘爲實中藏一箇半弦自乘之數一箇背弦差與兩半背而空出一差相乘之數亦名背弦差與背相開方之數以此兩數與實相消而矢數見矣假令徑十寸半背三寸一分其半背冪該九寸六分一釐約矢一寸與徑相減相乘如前法得九寸以除實九寸而以一寸之差一分與兩半背而空出一差之數得六寸一分與上差

一分相乘得六分一釐并二數九寸六分一釐除實恰盡以是知矢之爲一寸也又如半背四寸四分自乘得十九寸三分六釐爲實約矢二寸與徑相減相乘如前法得十六寸以除十六寸而以二寸之差四分與兩半背而空出一差之數得八寸四分與上差四分相乘得三寸三分六釐併二數十九寸三分六釐除實恰盡以是知矢之爲二寸也此其法亦始於先得定差而約矢與徑兩相消息以得矢也其徑數有長短差數有多寡亦準此法而通之也在先得定差而已又法半徑自乘爲徑竅半背自乘爲背竅二竅相乘爲實乃約矢以減徑以矢乘之爲半弦竅與徑竅相乘以除實又以徑竅除其餘實恰得矢數之定差則矢可得矣蓋二竅相乘中藏一箇徑竅與弦竅相乘之數藏一箇徑竅與半背弦差竅相乘之數而背弦差者矢之所藏也假令徑十寸矢二寸背差八分半徑自乘得二十五寸半背自乘得十九寸三分六釐相乘得四百八十四寸爲實及約矢得二寸以減徑而乘之得十六寸爲弦竅與徑竅相乘得四百以除實餘八十四寸又以徑竅除之得三寸三分六釐恰與二寸矢之定差相合然二寸矢之定差四分而乃有三寸三分六釐者蓋始求背竅之時以兩背數相乘則四分寓其間恰得此數所謂差與背相開方之數也以四分與八寸四分相乘得

三寸三分六釐故定差四分而其積則三寸三分六釐也以八寸四分除之則定差本數也夫背弦差者矢之所藏也以差立法古未有之而實求矢之大機也差徑求矢以差與徑相乘平方開之得矢差矢求徑矢自乘以差爲從平方開之得徑而差與弦亦可以求矢徑半弦之竅矢除徑而矢乘徑之數也差者矢竅而徑除之之數也先約徑矢數與弦竅相同而又以徑除矢竅與差數同則得矢徑差與背求矢徑減差則得弦卽差弦求矢徑也積者矢與弦并以矢除而半之之數也積弦求矢倍積爲實約矢而加之於弦爲從方以矢爲法除之則得矢也矢積求弦矢自乘而置虛積與元積相當然後減去矢自乘之竅而以矢除其虛積與元積之并則得弦也假令矢一寸積三寸五分矢自乘得寸添積二寸五分乃與元積相當然後減去矢自乘之寸餘六寸以矢除之得弦六寸也矢二寸積十寸矢自乘得四寸加虛積六寸與元積相當減去矢自乘之寸餘十六寸以矢除之得弦八寸也如不以矢徑求弦得積而遂以矢徑求積則矢每寸截徑寸二分五釐而以矢自乘再乘以乘截餘之徑爲徑積然後以徑約積而以積與矢自乘之數相乘添入徑積合爲積竅而復以約積自乘亦與前積竅同數則積亦可得矣然不如得弦而後得積之爲簡捷也至於殘周與弦求矢

則亦用半弦自乘爲實而約出矢數以除半弦冪而加矢爲徑乃以徑補出全周之數而以半背數除半弦數餘爲半背弦差恰得矢之定差則矢可得矣假令弦六寸殘周二十三寸八分則以半弦自乘得九爲實而約出矢一寸以除實而加之得十寸爲徑該周三十寸除殘周數得半背三寸一分除半弦三寸而餘一分恰得一寸矢之定差則矢一寸也又如弦八寸殘周二十一寸二分半弦自乘得十六爲實約出矢二寸以除實而加之得十寸爲徑該周三十寸除殘周數得半背四寸四分除半弦四寸而餘四分恰得二寸矢之定差則矢二寸也數雖如是而起筭極周折惟求之弦矢徑三相權則其數可準蓋徑矢求弦則以矢減徑以矢乘之爲半弦冪徑弦求矢則以半弦自乘爲實而以徑爲益方以矢減益方而相乘除實亦是以矢減徑以矢乘之而得半弦冪也弦矢求徑則以半弦自乘以矢除之加矢而得徑由是三者輾轉求之則是半弦冪中藏却以矢減徑以矢乘之之定數以是約出矢徑而因徑以爲周減其殘周而得背以半背與半弦相較而得差恰與矢之定差相同則矢數無所失矣其有不合則更約之此數雖若眇茫然準之於以矢減徑卽以矢乘必須與半弦冪相當則亦未嘗無繩墨也此意元之又元也至神莫知也積也矢也徑也弦也背也殘周

也差也凡七者轉相爲法而轉相求共得三百二十六法而後盡渾然一圓圈而中含錯綜變化乃至於此嗚呼豈非所謂至妙至妙者哉

分法論

差分方程盈朒粟米總是一分法也物有多寡價有貴賤兩物相形已知物之孰貴孰賤各有定價矣若使兩物總共若干兩價亦總共若干則兩物混雜雖則兩物混雜而總價固相差也於是以價權物則因價之貴賤而差之也未知兩物之孰貴孰賤而但知兩物相參伍之總價若使此三而彼五則價共增若干此五而彼三則價共減若干則兩價混雜而物數固相形也於是以物權價則因物之參伍而推出價之貴賤謂之方程方程者言物價相檢括有定式而不可亂也差分方程之不能盡於是有盈朒盈者有餘朒者不足盈朒者因其外露畸零可見之數而推知其中藏隱雜不可見之數以據末穎而窺全錐也假令物共若干兩價共若干兩兩物混雜而法有不盡於差分也於是而盈朒之假令總是貴物則原總價不足若干總是賤物則原總價有餘若干於是推乘以齊其數以不足之數乘賤物以有餘之數乘貴物兩物各得其所乘之數以爲實而并有餘不足之數

以爲法而各歸之則物之多寡可得矣此差分之盈朒也未知兩物之孰貴孰賤而但知此三而彼五則價共增若干此五而彼三則價共減若干兩價混雜而法有不盡於方程也於是而盈朒之假令此賤若干彼貴若干則原總價有餘幾何此貴若干彼賤若干則原總價不足幾何於是維乘以齊其數以有餘乘此貴彼賤亦以不足乘彼貴此賤令兩賤自相減兩貴自相減爲實有餘不足亦自相減爲法則價之貴賤可得矣此方程之盈朒也差分以價權物方程以物權價差分露價而混物方程露物而混價露價而混物故以價相轄露物而混價故以物相參而盈朒通乎其間矣至於物有以多而易寡價有以貴而易賤於是有粟米則乘除互換之間而多遂與寡相當賤遂與貴相當而其數齊矣以粟易米則以粟率乘以米率除以米易粟則以米率乘以粟率除以貴物易賤物則以貴率乘以賤率除以賤物易貴物則以賤率乘以貴率除以賤物易皆以本率乘以所易之率除謂之粟米者因粟米以名諸物也

六分論

數欲以繁而從簡而數之有分者不可以常法約也於是約分之法則以子減母以母減子至於