MATHEMATICS

CHUZHONGSHUXUEZHONGKAOAOSAISHIYONGTIDIAN

新课程新奥赛系列丛书

AO

初中数学中考·奥赛实用题典

SAI

张志朝/主编

南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

MATHEMATICS

CHUZHONGSHUXUEZHONGKAOAOSAISHIYONGTIDIAN

AO

初中数学中考·奥赛实用题典

SAI

主　编
张志朝

作　者
徐　伟　朱建新　袁如标
俞萍鸽　束亚娟　王俊涛
封中华　张　雷　孟　敏

南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

初中数学中考·奥赛实用题典 /张志朝主编. —南京：南京师范大学出版社，2005.6

ISBN 978-7-81101-303-0/G·859

Ⅰ.初...　Ⅱ.张...　Ⅲ.数学课—初中—习题—升学参考资料　Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 069320 号

书　　名	初中数学中考·奥赛实用题典
主　　编	张志朝
责任编辑	王书贞
出版发行	南京师范大学出版社
地　　址	江苏省南京市宁海路 122 号(邮编:210097)
电　　话	(025)83598077(传真)　83598412(营销部)　83598297(邮购部)
网　　址	http://press.njnu.edu.cn
E — mail	nspzbb@njnu.edu.cn
照　　排	江苏兰斯印务发展有限公司
印　　刷	扬州市文丰印刷制品有限公司
开　　本	850×1168　1/32
印　　张	15.25
字　　数	381 千
版　　次	2009 年 6 月第 2 版第 3 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-81101-303-0/G·859
定　　价	22.00 元

前　　言

新课程的三维目标引起了初中数学教学与考试的深刻变化。长期以来数学知识传授与检测的僵化呆滞，已逐渐地为“走向生活，体现应用；走向人文，体现环保；走向综合，体现渗透；走向前言，体现科技；走向创新，体现科研”所替代。在这些情况下，数学问题更加注重应用性和探索性，问题的解决在需要扎实的双基能力的同时，也需要较强的综合思维能力和一定的探究创新能力。

《初中数学中考·奥赛实用题典》汇集了初中数学各知识板块的经典题目，体现了最新的数学中考和竞赛的动向。详解过程一目了然，思想方法点拨到位，可使读者一窥初中数学全貌的同时，有的放矢地自学自查。

本书若配合《初中数学中考·奥赛一本通》使用，效果更好。希望广大读者在本书使用过程中，将发现的谬误之处及时告知我们，以便日后的修正。

编　者

目　录

第1讲　整　数

第1节　整数的基本知识

基础练习

一、选择题

2 3 5

1. 三个不同的质数 m,n,p 满足 $m+n=p$，则 mnp 的最小值是(　　).

(A)15　　(B)30　　(C)6　　(D)10

解　最小的三个质数 2,3,5 恰好满足 $m+n=p$，故 mnp 的最小值应为 30.

故选(B).

2. 有下列说法：

①奇正整数总可表示为 $4n+1$ 或 $4n+3$ 的形式，其中 n 为正整数；

②任意一个正整数总可表示为 $3n$ 或 $3n+1$ 或 $3n+2$ 的形式，其中 n 为正整数；

③一个奇正整数的平方总可以表示为 $8n+1$ 的形式，其中 n 为正整数；

④任意一个完全平方数总可以表示为 $3n$ 或 $3n+1$ 的形式，其中 n 为正整数.

其中正确说法的个数是(　　).

(A)0　　(B)2　　(C)3　　(D)4

解　因为 n 为正整数，正整数 1 均不符合题中四种说法.
故选(A).

3. 已知两个不同的质数 p,q 满足下列关系：$p^2-2001p+m=0$，$q^2-2001q+m=0$，m 是适当的整数，那么 p^2+q^2 的数值是(　　).

(A)4004006　　(B)3996005

(C)3996003　　(D)4004004

解　由题意，得 $p\neq q$，且 p,q 互为质数.
又 p,q 是二次方程 $x^2-2001x+m=0$ 的根，由韦达定理，得 $p+q=2001$.
因为 p,q 均为质数且 p,q 中有一个是奇数，另一个是偶数，故 p,q 中有一个为 2.
不妨设 $p=2$，则 $q=1999$.
所以 $p^2+q^2=4+1999^2=3996005$.
故选(B).

4. (江西省竞赛试题)2007^{2007} 的末位数字是(　　).

(A)1　　(B)3　　(C)7　　(D)9

解　末位是数字 7，其各幂次数的末位数字依次为 7，9，3，1，7，9，3，1….
又 $2007=501\times4+3$
故 2007^{2007} 的末位数字是 3.
故选(B).

二、填空题

$a+b+c-a=4011$

5. (全国竞赛试题)已知 a,b,c 为整数，且 $a+b=2006$，$c-a=2005$. 若 $a<b$，则 $a+b+c$ 的最大值为__________.

解　由 $a+b=2006$，$c-a=2005$，得 $a+b+c=a+4011$.
因为 $a+b=2006$，$a<b$，a 为整数，所以 a 的最大值为 1002. 于

是 $a+b+c$ 的最大值为 5013.

6. 已知 2005 是两个质数的和，那么这两个质数的积等于______. 2.2003

解 ∵2005＝2＋2003，2 与 2003 均为质数，

∴两个质数的积等于 4006.

7. 已知三个正整数 x,y,z 满足：$x+y+z=xyz$，且 $x<y<z$，则 $x=$______，$y=$______，$z=$______.

解 易知 $x\geqslant1$，$y\geqslant2$，$z\geqslant3$.

设 $x=1+\Delta_1$，$y=2+\Delta_2$，$z=3+\Delta_3$，其中 $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3\geqslant0$，

则 $x+y+z=6+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3$，

$xyz=6+6\Delta_1+3\Delta_2+2\Delta_3+3\Delta_1\Delta_2+2\Delta_1\Delta_3+\Delta_2\Delta_3+\Delta_1\Delta_2\Delta_3$.

又 $x+y+z=xyz$，

$$6\Delta_1+3\Delta_2+2\Delta_3+3\Delta_1\Delta_2+2\Delta_1\Delta_3+\Delta_2\Delta_3+\Delta_1\Delta_2\Delta_3$$
$$=\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3,$$

∴$x=1$，$y=2$，$z=3$.

8.（江苏省竞赛试题）某次数学测试共有 20 题，每题答对得 5 分，不答得 0 分，答错得 -2 分. 若小丽这次测验得分是质数，则小丽这次最多答对______题.

解 可以设答对 x 道，不答 y 道，答错 z 道题，那么小丽得分可以表示为 $5x+0y-2z$.

其中 $x+y+z=20$.

经过验算，当 $x=17$，$y=2$，$z=1$ 时，取到质数 83.

即小丽最多答对 17 题.

$(m+2)^2-m^2=2008$

$(m+2+m)(m+2-m)=2008.$

三、解答题

$2m+2=1004$

$2m=1002$

9. 已知两个连续奇数的平方差为 2008，试求这两个连续奇数.

$m=501$

m

$m+2$

$m+2=503$

解 设两个连续奇数为 m,n，且 $m<n$.

则有 $\begin{cases} n^2-m^2=\pm 2008, \\ n-m=2. \end{cases}$

由此可得 $n+m=1004$ 或 $n+m=-1004$.

考虑到 $n-m=2$，所以可求得 $\begin{cases} n=503, \\ m=501; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} n=-501, \\ m=-503. \end{cases}$

10. 两位数 A 的数字和的平方等于数 A^2 的数字和，试求出所有这样的两位数 A.

解 注意到 $A^2\leqslant 99^2=9801<9999$，所以 A^2 的数字和不会大于 $9\times 4=36$. 由于这等于 A 的数字和的平方，也就是说，A 的数字和要小于 6，即小于或等于 5，这样就只可能有以下 15 种情况，它们是：10，11，12，13，14，20，21，22，23，30，31，32，40，41 和 50. 经过逐一筛选，其中 10，11，12，13，20，21，22，30 和 31 九个数是符合条件的.

11. a,b,c,d 都是质数，且 $10<c<d<20$，$c-a$ 是大于 2 的奇质数，$d^2-c^2=a^3b(a+b)$，求 a,b,c,d 的值.

解 因为 a,b,c,d 都是质数，且 $10<c<d<20$，于是 c 可取 11，13，17，而 d 可取 13，17，19. 又因为 $c-a$ 是奇质数，所以 $a=2$. 注意到 $c<d$，所以只能 $c=13$.

(1)若 $d=17$，则 $17^2-13^2=8b(2+b)$，即 $b^2+2b-15=0$，解之，得 $b=3$ 或 $b=-5$(不合题意，舍去).

(2)若 $d=19$，则 $19^2-13^2=8b(2+b)$，即 $b^2+2b-24=0$，解之，得 $b=4$ 或 $b=-6$(都不合题意，舍去).

综上所述，$a=2,b=3,c=13,d=17$.

12. 设 x,y,z 都是整数，满足条件 $(x-y)(y-z)(z-x)=x+y+z$，试证明 $x+y+z$ 能被 27 整除.

解　(1)若 x,y,z 被 3 除余数均相同,则

$3|(x-y),3|(y-z),3|(z-x)$.

故 $27|(x-y)(y-z)(z-x)$,即 $27|(x+y+z)$.

(2)若 x,y,z 被 3 除余数均不相同,则 3 不能整除$(x-y)$,$(y-z)$,$(z-x)$,故 3 不能整除$(x-y)(y-z)(z-x)$,但 $x+y+z=3k+0+1+2=3(k+1)$,故矛盾了.

(3)若 x,y,z 被 3 除有两个余数相同,而第三个与此两个不同(例如:x,y 被 3 除余数相同,而 z 被 3 除的余数与它们不同),则 $3|(x-y)(y-z)(z-x)$,而 3 不能整除 $x+y+z$,仍矛盾,故不可以.

综上所述,$27|(x+y+z)$.

第 2 节　整除的基本性质

基础练习

一、选择题

1. 1898 年 6 月 9 日,英国强迫清政府签约将香港 975.1 平方千米土地租借给英国 99 年,1997 年 7 月 1 日香港回归祖国,中国人民终于洗刷了百年耻辱.已知 1997 年 7 月 1 日是星期二,那么,1898 年 6 月 9 日是星期(　　).

(A)二　　(B)三　　(C)四　　(D)五

解　1898 年 6 月 9 日至 1997 年 7 月 1 日经历了 99 年 22 天,其中有 24 个闰年,所以共经历了 $365\times99+22+24=365\times99+46$(天),它被 7 除余数为 5,故应为星期四.

故选(C).

2. 已知 x,y 是正整数,并且 $xy+x+y=23,x^2y+xy^2=120$,则 x^2+y^2 等于(　　).

(A)34　　　　(B)25　　　　(C)15　　　　(D)49

解　由$\begin{cases}xy+x+y=23,\\x^2y+xy^2=120,\end{cases}$可得$\begin{cases}xy=23-(x+y),&①\\xy(x+y)=120.&②\end{cases}$

将①代入②，并整理可得$(x+y)^2-23(x+y)+120=0$.

解之得 $x+y=15$ 或 $x+y=8$.

再将它们代入①，可知 $x+y=15$ 不合题意.

所以$\begin{cases}x+y=8,\\xy=15.\end{cases}$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=34$.

故选(A).

~~7m+2~~

3. 如果 a,b 均为自然数，a 除以 7 余 2，b 除以 7 余 5，当 $a^2>3b$ 时，a^2-3b 除以 7 的余数是(　　).　$a=7m+2$　$b=7n+5$

(A)1　　　　(B)3　　　　(C)4　　　　(D)6

解　设 $a=7m+2$，$b=7n+5$，其中 m,n 为非负整数. 则

$$\begin{aligned}a^2-3b&=(7m+2)^2-3(7n+5)\\&=49m^2+28m-21n-11\\&=7(7m^2+4m-3n-2)+3.\end{aligned}$$

所以 a^2-3b 除以 7 的余数是 3.

故选(B).

$(7m+2)^2-3(7n+5)$
$=49m^2+28m+4-21n-15$
$=7(7m^2+4m-3n)-11$
$=7(7m^2+4m-3n-2)+3$
$14-3=11$

4. 打字员小金连续打字 14 分钟，打了 2098 个字符，测得她第一分钟打了 112 个字符，最后一分钟打了 97 个字符. 如果测算她每一分钟所打字符的个数，则下列不成立的是(　　).

(A)必有连续 2 分钟打了至少 315 个字符

(B)必有连续 3 分钟打了至少 473 个字符

(C)必有连续 4 分钟打了至少 630 个字符

(D)必有连续 6 分钟打了至少 946 个字符

解　小金中间的 12 分钟打了 $2098-112-97=1889$(个)字符.

把这12分钟平均分成6段、4段、3段，每段分别为2分钟、3分钟、4分钟，由$1889\div6=314\cdots\cdots5$，$1889\div4=472\cdots\cdots1$，$1889\div3=629\cdots\cdots2$，应用抽屉原理，知(A)、(B)、(C)均成立. 但$1889\div2=944\cdots\cdots1$，因此如果小金每分钟所打字符个数依次是112，158，157，158，157，158，157，158，157，158，157，157，157，97，则她连续6分钟最多打了$3\times(158+157)=945$(个)字符，结论(D)不成立.

故选(D).

$A=2005n+1 \Rightarrow -A=-2005n-1 \Rightarrow -A=-2005n-2005+2004$

二、填空题

5. 若a被2005除，余数是1，则$-a$被2005除，余数是__2004__.

解 可设$a=2005k+1$，

则$-a=-2005k-1=-2005(k+1)+2004$.

$=-2005(n+1)+2004$

故余数是2004.

6. 已知a能被11整除，且各位数字之和等于13，则满足这个条件的最小正整数$a=$______.

解 a一定是3位数，通过枚举可以发现$a=319$.

7. 正整数A除以3余2，除以4余1，那么A除以12的余数是______.

$A=3m+2 \Rightarrow 12m+8$

$=4n+1 \Rightarrow \cancel{12m}$ $12n+3$

解 设$A=3m+2$， ①

$A=4n+1$. ②

其中m、n为整数.

由①×4－②×3，得$A=12(m-n)+5$.

因为m、n为整数，

$12m+8=12n+3$

所以$m-n$也为整数，

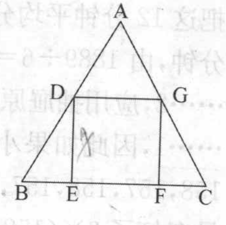
$12(m-n)=-5$

从而A除以12的余数是5.

~~$12m+8=12n+5$~~

$A=\begin{cases}12m+8=A\\12n+3=A\end{cases}$

8.（全国竞赛试题）如图，面积为$a\sqrt{b}-c$的正方形$DEFG$内接于面积为1的正三角形ABC，其中a,b,c为整数，且b不能被任何质数的平方整除，则$\frac{a-c}{b}$的值等于______.



（第8题）

解 设正方形$DEFG$的边长为x，正三角形ABC的边长为m，则$m^2=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

由$\triangle ADG\backsim\triangle ABC$，可得$\frac{x}{m}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}m-x}{\frac{\sqrt{3}}{2}m}$，解得$x=(2\sqrt{3}-3)m$.

于是$x^2=(2\sqrt{3}-3)^2m^2=28\sqrt{3}-48$，

由题意，$a=28,b=3,c=48$，

得$\frac{a-c}{b}=-\frac{20}{3}$.

三、解答题

9. 某商场向顾客发放9999张购物券，每张购物券上印有一个四位数的号码，从0001到9999号. 如果号码的前两位数字之和等于后两位数字之和，则称这张购物券为“幸运券”. 例如号码0734，因为$0+7=3+4$，所以这个号码的购物券是幸运券. 证明这个商场所发的购物券中，所有幸运券的号码之和能被101整除.

证明 号码是9999的是幸运券. 除此券外，如果某个号码n是幸运券，那么号码为$m=9999-n$的购物券也是幸运券. 由于9是奇数，因此$m\neq n$.

由于$m+n=9999$，相加时不出现进位，这就是说，除了号码是9999这张幸运券之外，其余所有幸运券全部可以两两配对，而每一对两个号码之和均为9999，即所有幸运券号码之和是9999的整数倍.

因为 $9999=99\times101$，即 9999 被 101 整除，

所以所有幸运券号码之和也能被 101 整除.

10. 7 位数 $\overline{1287xy6}$ 是 72 的倍数，求出所有符合条件的 7 位数.

解　由题意知，所求 7 位数被 8 和 9 整除.

所以 $1+2+8+7+x+y+6=24+x+y$ 被 9 整除，且 $0\leqslant x+y\leqslant18$.

所以 $x+y=3$ 或 12.

又因为 $\overline{xy6}$ 必须是 8 的倍数，

所以 $\overline{y6}$ 必须是 4 的倍数，所以 y 只能是 1,3,5,7 或 9.

当 $y=1$ 时，$x=2$，216 是 8 的倍数；

当 $y=3$ 时，$x=0$ 或 9，36 不是 8 的倍数，936 是 8 的倍数；

当 $y=5$ 时，$x=7$，但 756 不是 8 的倍数；

当 $y=7$ 时，$x=5$，576 是 8 的倍数；

当 $y=9$ 时，$x=3$，但 396 不是 8 的倍数.

所以符合条件的 7 位数是 1287216，1287936，1287576.

11. p 是质数，设 $q=4^p+p^4+4$ 也是质数，试确定 q 的值.

解　因为 4 被 3 除余 1，所以 4^p 被 3 除余 1. 因此 4^p+4 被 3 除余 2.

如果 $p\neq3$，则质数 p 不被 3 整除，p^2 被 3 除余 1，推知 p^4 被 3 除余 1.

所以 $q=4^p+p^4+4$ 被 3 整除，而 $q>3$，所以此时 q 为合数，与 q 是质数的条件不符，因此，只能 $p=3$.

当 $p=3$ 时，$q=4^3+3^4+4=149$. 经检验，149 是质数，合乎要求.

培优训练

一、选择题

1. 如果 a、b、c 是三个任意整数，那么，$\frac{a+b}{2}$、$\frac{b+c}{2}$、$\frac{c+a}{2}$（　　）.

(A)都不是整数　　(B)至少有两个整数

(C)至少有一个整数　　(D)都是整数

解　因为任给三个整数中,至少有两个整数同奇或同偶,所以,这两个数之和必能被2整除.

故选(C).

2. 已知 a 为整数,关于 x 的方程 $a^2x-20=0$ 的根是质数,且满足 $|ax-7|>a^2$,则 a 等于(　　).

(A)2　　(B)2或5　　(C)± 2　　(D)-2

解　若 $a=2$,则 $x=5$,$|ax-7|=3<a^2$,排除(A)、(B)、(C).

故选(D).

3. (武汉 CASIO 杯赛试题)设分式 $\frac{n-13}{5n+6}(n\neq 13)$ 不是最简分数,那么正整数 n 的最小值可能是(　　)

(A)84　　(B)68　　(C)45　　(D)115

解　设 d 是 $n-13$ 与 $5n+6$ 的一个公约数,则

$d|(n-13)$,$d|(5n+6)$,

$\therefore d|[(5n+6)-(n-13)]$,$\therefore d|71$,

$\because 71$ 是素数,$\therefore d=71$,$\because d|(n-13)$,

$\therefore n-13\geqslant 71$,$\therefore n\geqslant 84$,$n$ 的最小值是84.

故选(A).

4. 某校九年级两个毕业班的学生和教师共100人一起在台阶上拍毕业照留念,摄影师要将其排列成前多后少的梯形对阵(大于等于3排),且要求各排的人数必须是连续的自然数,这样才能使后一排的人均在前一排两人间的空当处.那么,满足上述要求的排法的方案有(　　).

(A)1种　　(B)2种　　(C)4种　　(D)0种

解 设最后一排有 k 个人，共有 n 排，那么，从后往前各排的人数分别为 $k,k+1,k+2,\cdots,k+(n-1)$.

依题设，得 $kn+\frac{n(n-1)}{2}=100$，即 $n[2k+(n-1)]=200$.

因为 k,n 都是正整数，且 $n\geqslant3$，

所以 $n<2k+(n-1)$，且 n 与 $2k+(n-1)$ 的奇偶性不同.

由于 n 能整除 200，

所以 $n=5$ 或 $n=8$.

若 $n=5$，则 $k=18$；

若 $n=8$，则 $k=9$.

所以共有两种不同的方案.

故选(B).

二、填空题

5. 设 $N=23x+92y$ 为完全平方数，且 N 不超过 2392. 则满足上述条件的一切正整数对 (x,y) 共有______对.

解 $\because N=23x+92y=23(x+4y)$，且 23 为素数，$N$ 为不超过 2392 的完全平方数，

$\therefore x+4y=23m^2$（m 为正整数）且 $N=23^2\cdot m^2\leqslant2392$.

故 $m^2\leqslant\frac{2392}{23^2}=\frac{104}{23}<5$.

解得 $m^2=1$ 或 4.

当 $m^2=1$ 时，由 $x+4y=23$，可得 $y=1,2,3,4,5$，$x=19,15,11,7,3$；

当 $m^2=4$ 时，由 $x+4y=92$，可得 $y=1,2,3,4,5,\cdots,22$，$x=88,84,80,\cdots,4$.

所以共有 $(19,1),(15,2),(11,3),(7,4),(3,5)$ 及 $(88,1),(84,2),\cdots,(4,22)$.

故满足条件的一切正整数对 (x,y) 共有 $5+22=27$（对）.